Phys. G.
134 b (5,2

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

<36601648510012

<36601648510012

Bayer. Staatsbibliothek

Physikalisches Wörterbuch

V. Band.

Zweite Abtheilung.

I und K.

Artikel Krystall

von

Herrn Professor Hessel.

Johann Samuel Traugott Gehler's

Physikalisches

Wörterbuch

neu bearbeitet

von

Brandes. Gmelin. Horner. Muncke. Pfaff.

Fünfter Band.

Zweite Abtheilung.

I und K.

Mit Kupfertafeln XIV bis XXX.

Leipzig,
bei E. B. Schwickert.
1830.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische Staatsbibliothek München

I.

J a h r.

Annus; an, année; *year.* Die Zeit, in welcher die Sonne zu einer gleichen Stellung am Himmel zurückkehrt, nach deren Verlauf daher gleiche Erscheinungen der Tageslänge, der Kälte und Wärme, des Pflanzenwuchses u. s. w. eintreten. Die genaue Bestimmung der Dauer eines Jahres besteht darin, daſs man die Zeit einer Rotation der Erde mit der Dauer eines Umlaufs der Erde um die Sonne vergleicht, und so die Anzahl der Tage bestimmt, die ein Jahr ausmacht. Hierzu boten sich dem mit wenigen Hülfsmitteln ausgerüsteten Beobachter theils die Beobachtungen der Aufgänge und Untergänge der Sterne, theils die Beobachtungen des höchsten und niedrigsten Standes der Sonne am längsten und kürzesten Tage, als Bestimmungsmittel, dar. Schon die ältesten Völker bemerkten nämlich, daſs nach einem Zeitraume von 365 Tagen die Stellung der Sterne gegen die Sonne sich ebenso wieder zeige, daſs zum Beispiel ein Stern, welcher vor 365 Tagen Abends gleich nach Sonnenuntergang am östlichen Himmel aufgegangen war, sich auch heute wieder in eben der Stellung zeige. Diese Beobachtung, die in einem einzigen Jahre keine hinreichend genaue Bestimmung der Länge des Jahres geben würde, kann, mehrere Jahre durch fortgesetzt, wenigstens sehr nahe richtige und für das bürgerliche Leben zureichende Resultate geben, und es ist von den Aegyptiern bekannt, daſs sie durch die Achtsamkeit auf den heliakischen Aufgang (Frühaufgang) des Sirius erkannten, daſs das Jahr sehr nahe 365¼ Tage umfasse. Die Solstitien gaben eine wegen des Vorrückens der Nachtgleichen noch passendere Bestimmung der Länge des Jahres. Man beobachtete nämlich den Tag, wo der Schatten eines Gnomons um Mittag kürzer, als an den vorhergehenden und folgenden Tagen, war, und die Wiederkehr

Bayerische Staatsbibliothek München

dieser Erscheinung gab den Zeitraum zwischen den beiden längsten Tagen, die Dauer des Jahres an. Aber da um den längsten Tag die Mittagshöhe der Sonne sich wenig ändert, so war diese Beobachtung nicht gut genau auszuführen, und deswegen zog schon Hipparchus die Beobachtung der Aequinoctien vor; er stellte nämlich einen grofsen Ring in die Ebne des Aequators und bemerkte den Zeitpunct, da der Schatten der vorderen Hälfte genau die hintere Hälfte bedeckte. Diese Beobachtung würde, so weit die Gröfse und richtige Aufstellung des Instrumentes es erlaubte, ganz vollkommen den Zweck erfüllen, wenn nicht die Strahlenbrechung eine Ungleichheit in dem täglichen scheinbaren Wege der Sonne hervorbrächte. Wenn man indefs solche Beobachtungen, viele Jahre durch oder in sehr weit aus einander liegenden Jahren angestellt, benutzt, so kann man die wahre Länge des Jahres sehr wohl daraus bestimmen. Unsere jetzigen Instrumente und Methoden zur Bestimmung des Ortes der Sonne geben uns Mittel, die Zeit der Nachtgleiche genauer zu erhalten; aber wenn wir unsere jetzigen Beobachtungen mit jenen sehr alten vergleichen, so giebt die lange Reihe der seit dem verflossenen Jahre einen höchst genauen Werth der Länge des Jahres. Hipparch beobachtete zum Beispiel eine Nachtgleiche, die nach unserer Zeitrechnung am 24. März des Julianischen Kalenders 146 Jahre vor Christi Geburt in Alexandrien 1 Stunde vor Mittag, also 2 Stunden 51′ 16″ vor dem Pariser Mittage eintrat; da nun Cassini 1880 Jahre später im Jahre 1735 am 10. März des Julianischen Kalenders 2 Uhr 20′ 40″ Morgens als Zeitpunct einer beobachteten Nachtgleiche angiebt, so waren 1880 Julianische Jahre weniger 14 Tagen 6 St. 48′ 4″ (24. März 9^h 8′ 44″ — 10. März 2^h 20′ 40″), oder, da ein Julianisches Jahr 365¼ Tage enthält, 686655 Tage 17 St. 11′ 56″ für 1880 wahre Jahre verflossen; ein Jahr, der Zeitraum zwischen zwei Nachtgleichen, beträgt also hiernach [1] 365 Tage 5 Stunden 49 Min. 3½ Sec., und dieses ist nur um wenige Secunden von der durch neuere Bestimmungen gefundenen Dauer des Jahres verschieden, welche

Lalande	= 365	Tage	5^h	48′	48″.
von Zach	= 365	—	5	48	50,875.
Piazzi	= 365	—	5	48	50,27.

1 Idelers Handbuch der Chronologie. I. 34.

Delambre, welchem Carlini folgt *),
= 365 Tage 5′ 48″ 51,3936.
Littrow = 365 — 5 48 50,832.

als das genaue Mittel zwischen den beiden letzten Bestimmungen annimmt. Hiernach kann man also 365 Tage 5 Stunden 48′ 51″ als sehr genau der Wahrheit entsprechend ansehen, wenn gleich eine Unsicherheit von wenigstens 0,5 Secunden dabei übrig bleibt.

Die bisher aufgesuchte Länge des zwischen zwei Nachtgleichen verfliefsenden Jahres ist für die menschliche Gesellschaft am wichtigsten, da die Rückkehr der Sonne zur Frühlings-Nachtgleiche und die in eben so grofsen Zeiträumen statt findende Rückkehr der längsten Tage, der kürzesten Tage u. s. w. dasjenige ist, worauf es bei der Beobachtung der Jahreszeiten und bei der Anordnung unserer, in nothwendiger Beziehung zu den Jahreszeiten stehenden, Geschäfte am meisten ankömmt. Aber die Beobachtung zeigt, dafs die Zeiten, in welchen die Sonne zu einerlei Stellung gegen die Sterne zurückkehrt, nicht ganz einerlei mit dem Zeitraume zwischen zwei Frühlings-Nachtgleichen ist; ferner dafs nicht jeder einzelne Zeitraum zwischen zwei auf einander folgenden Frühlings-Nachtgleichen vollkommen genau gleich grofs ist.

Die letztere Bemerkung führt uns zu der Ueberzeugung, dafs wir die *mittlere Länge des Jahres* von der, hiervon bald im Mehr bald im Minder etwas abweichenden, Länge eines einzelnen Jahres unterscheiden müssen, und dafs die vorigen Betrachtungen uns das *mittlere Jahr* kennen lehren, statt dafs eine Berechnung der auf die Bewegung der Erde einwirkenden Störungen der Planeten und des Mondes erforderlich ist, um die Länge jedes einzelnen Jahres genau anzugeben. Die erste Bemerkung dagegen führt uns zu dem Unterschiede des tropischen und des siderischen Jahres.

Das mittlere *tropische Jahr* (*annus solaris tropicus*) ist die Länge des vorhin bestimmten Zeitraums zwischen zwei Frühlings-Nachtgleichen, zwischen zwei Herbst-Nachtgleichen, zwischen zwei längsten Tagen, zwischen zwei kürzesten Tagen u. s. w., aber da der Nachtgleichenpunct unter den Ster-

*) Esposizione di un nuovo metodo di costruire le tavole astron applicato alle tavole del Sole di F. Carlini. Milano 1810.

nen fortrückt, und die Fixsterne ihre Länge jährlich um 50″,1 vermehren, so ist das *siderische Jahr* (*annus sidericus*), das ist, die Zeit eines ganzen scheinbaren Umlaufs der Sonne um den Himmel, bis sie wieder zu demselben Fixsterne gelangt, um so viel länger, als das tropische Jahr, als die Sonne gebraucht, um durch 50″,1 fortzurücken. Diese Zeit $= \frac{50'',1}{359^\circ\ 59'\ 9'',9}$. mult. mit der Dauer des tropischen Jahres ist = 20′ 19″,96; und das siderische Jahr ist also = 365 Tage 6 Stunden 9′ 11″,35 [1], wenn man Delambre's Bestimmung annimmt, oder 365 Tage 6 Stunden 9′ 11″ als sehr nahe richtige Angabe.

Da die elliptische Bahn der Erde nicht genau eine unveränderte Lage im Weltraume behält, sondern die Hauptaxe der Ellipse, die Apsidenlinie, ihre Lage gegen die Sterne jährlich um 11″,8 verändert, so ist diejenige Zeit, welche die Sonne gebraucht, um zu einer gleichen Stelle ihrer elliptischen Bahn zurückzukehren, oder eben die Anomalie wieder zu erreichen, noch um 5′ 12″ Zeit gröfser, und so viel länger ist also das *anomalistische Jahr*, (denn so nennt man die zwischen gleichen Anomalien verfliefsende Zeit) als das siderische Jahr, oder 25′ 32″ gröfser, als das tropische Jahr.

Ehe ich die Bemühungen, unser bürgerliches Jahr dem wahren tropischen Jahre entsprechend zu machen, erzähle, mufs ich noch die zweite Art von Jahren anführen, nach welcher mehrere Völker gerechnet haben, nämlich die *Mondenjahre.*

Die schon sehr früh gemachte Bemerkung, dafs nach zwölf Mondwechseln die Sonne ziemlich zu denselben Sternen und zu denselben Stellungen gegen den Aequator zurückgekehrt sey, gab die Veranlassung, diese Zeit ein Mondenjahr zu nennen. Da die mittlere Dauer eines synodischen Monats, nämlich von einem Neumonde bis zum andern, 29 Tage 12 Stunden 44′ 3″ ist, so beträgt das mittlere Mondenjahr 354 Tage 8 Stunden 48′ 36″. Aber die Abweichung dieses Jahres vom Sonnenjahre, welche 11 Tage beträgt, macht, wenn nicht die Jahreszeiten alle Monate des Jahres durchlaufen sollen, eine Einschaltung nöthig. Diese Einschaltung besteht darin, dafs man einzelnen

1 Nach Laplace = 365 Tage 6 Stunden 9′ 11″,534. Expos. du syst. du monde p. 116.

Jahren, die alsdann *Schaltjahre* (*anni bissextiles*) heifsen, entweder einen Tag (*dies intercalaris*) oder einen ganzen Monat (*mensis intercalaris*) mehr als den übrigen, die gemeine Jahre (*anni communes*) heifsen, beilegt.

Die Anordnung der bürgerlichen Jahre (*anni civiles*) bei den verschiedenen Völkern gründet sich entweder auf das Sonnenjahr oder auf das Mondenjahr, und bei den meisten Völkern wird selbst das Mondenjahr durch Einschaltungen an das Sonnenjahr angeknüpft; nur die Türken haben ein reines Mondenjahr, dessen Anfang durch alle Jahreszeiten durchrückt.

Die Kenntnifs, dafs das Sonnenjahr $365\frac{1}{4}$ Tage umfafst, besafsen schon die Aegyptier. Da sie aber durch Festtage und heilige Gebräuche an die Zahl der 365 Tage gebunden waren, so behielten sie ein unveränderliches Jahr von 365 Tagen ohne Einschaltung bei [1], und vier ihrer Jahre waren um einen Tag zu kurz, so dafs nach $365\frac{1}{4} \cdot 4 = 1461$ Jahren erst der Anfang des Jahres wieder in die genaue Jahreszeit, auf den Tag des Sonnenjahres (so fern man hier $365\frac{1}{4}$ als dessen genaue Länge annimmt) zurückkam, wo er allezeit zu Anfang dieses Zeitraumes gewesen war. Diese Periode ist die *Hundssternsperiode* (*annus magnus* s. *canicularis*), und wenn man annimmt, dafs beim Anfange oder bei Einführung dieser Zeitrechnung der Frühaufgang des Sirius mit dem Anfange des Jahres zusammen traf, so trat eben dieses Zusammentreffen erst im 1461. Jahre dieser Zeitrechnung wieder ein. Nach Censorinus traf im Jahre 139 unserer Zeitrechnung der Anfang des Aegyptischen Jahres mit dem Frühaufgange des Sirius zusammen, und 1322 Jahre vor Christo scheint also dieses unveränderliche, aber in Beziehung auf die Erscheinungen der Sonne und der Jahreszeiten bewegliche Jahr eingeführt zu seyn.

Da es hier nicht der Ort ist, die Jahre der verschiedenen Völker, deren Kenntnifs nur in Beziehung auf die Geschichte wichtig ist, anzugeben, so gehe ich sogleich zu den Einschaltungsarten über, die bestimmt waren, das bürgerliche Jahr mit dem wahren Sonnenjahre in Uebereinstimmung zu bringen.

1 Ideler I. 126. Ich werde mich hier immer nur auf Idelers treffliches Buch beziehen, und darf dieses um so mehr, da er wirklich aus den Quellen geschöpft, und, wo es nöthig ist, diese wörtlich angeführt hat; die minder wichtigen Stellen sind wenigstens vollständig angezeigt.

Das Jahr der Römer war in den ältesten Zeiten sehr abweichend von dem unsrigen; daſs es zehn Monate hatte, darf man nach Ideler's Meinung nicht in Zweifel ziehen, aber diese Monate waren vermuthlich [1] nicht nach dem Laufe des Mondes geordnet, sondern (wie Plutarch angiebt) ungleich lang und also entweder nach andern Erscheinungen am Himmel (etwa den Aufgängen und Untergängen der Sterne), oder nach den Beschäftigungen, die jede Jahreszeit forderte, eingetheilt; und so konnte dennoch ihr zehnmonatliches Jahr so genau, als ein ungebildetes Volk es fordert, sich an das Sonnenjahr anschlieſsen. Diese uralte Anordnung des Kalenders soll schon Numa abgeschafft und ein Mondenjahr eingeführt haben, welches jedoch schon von ihm oder von spätern Verbesserern des Römischen Kalenders mit dem Sonnenjahre durch einen Schaltmonat in Verbindung gesetzt wurde. Da nämlich das Mondenjahr um 11 Tage kürzer als das Sonnenjahr ist, so würden die Tage des Kalenders, welche jetzt mit irgend einer Stellung der Sonne zusammen treffen, im nächsten Jahre 11 Tage, im zweiten Jahre 22 Tage und so ferner, früher, als eben die Stellung der Sonne eintreffen. Um dieser Ungleichheit auszuweichen, schalten die Völker, die sich gern ganz an den Mondlauf anschlieſsen wollen, zu angemessenen Zeiten einen Monat von 29 oder 30 Tagen, einen ganzen Mondenmonat ein; die Römer hingegen haben alle zwei Jahre einen Schaltmonat von 22 oder 23 Tagen zu Hülfe genommen. Nach den Angaben der alten Schriftsteller [2] war es Regel, diese Einschaltung so statt finden zu lassen, daſs der Februar in diesen Schaltjahren nur 23 Tage hatte, und dann der *mensis intercalaris* folgte, welcher 27 oder 28 Tage erhielt. Ideler bemerkt, daſs diese Einschaltung, nach einigen Aeuſserungen der alten Schriftsteller zu urtheilen, wohl manchen Unregelmäſsigkeiten unterworfen seyn mochte; sie hat aber für uns eine Merkwürdigkeit, weil noch jetzt unser Schalttag nach dem 23. Februar eingeschoben wird, und seit Caesar's Zeiten im Schaltjahre der 24. Februar als Schalttag angesehen wird.

Obgleich aber durch diese Anordnung der gleichmäſsige Fortgang der Jahre und ihr Zusammenstimmen mit dem Laufe

1 Ideler II. 29.

2 Die Ideler II. 57. anführt.

der Sonne gesichert schien, so haben doch die Willkürlichkeiten, die man sich, gewisser Feste und anderer Rücksichten halber, erlaubte, die gröfsten Unordnungen hervorgebracht [1], so dafs kurz vor Caesar's Zeit die Kalenderfeste, die sich auf die Erndte bezogen, nicht im Sommer, und die sich auf die Weinlese bezogen, nicht im Herbste gefeiert wurden [2]. Julius Caesar fand daher nöthig, die Schaltjahre bequemer zu ordnen, und ihm verdanken wir die im *Julianischen Kalender* angenommene Anordnung der Schaltjahre. Um zuerst die bis zu seiner Zeit entstandene Abweichung des Kalenders von denjenigen Zeitpuncten der Jahreszeiten, mit welchen gewisse Tage übereinstimmen sollten, zu corrigiren, fand er nöthig, dem Jahre 708 nach Erbauung Roms, oder 46 vor unserer Zeitrechnung, obgleich es schon einen Schaltmonat am Ende des Februars gehabt hatte, noch zwei Schaltmonate von 67 Tagen zuzulegen, so dafs dieses Jahr 445 Tage erhielt. Der Anfang des Januars war nämlich, nach Ideler's Bestimmung, am 13. October des rückwärts fortgerechneten Julianischen Kalenders, und das Jahr würde also, des regulären Schaltmonates ungeachtet, sich mit dem 25. Julian. October geschlossen haben; aber die zwischen November und December eingeschalteten 67 Tage brachten den 1. Januar an den Ort, wohin er gehörte. Der Anfang des Jahres sollte, wie sich aus der Berechnung zeigt, wenn gleich die Schriftsteller darüber schweigen, nicht allein um die Zeit des kürzesten Tages, wie ehemals, fallen, sondern zugleich auch mit dem Neumonde zusammen treffen; da die Rechnung nämlich den Neumond gerade als auf den so angeordneten 1. Januar 709 nach Erbauung Roms fallend ergiebt, so kann man daraus am besten Caesar's Absicht und den Grund, warum er nicht den kürzesten Tag selbst zum Anfangstage des Jahres machte, errathen.

Die Länge des Jahres ward jetzt für drei hinter einander folgende Jahre auf 365 Tage gesetzt, das vierte Jahr, als Schaltjahr, erhielt einen Tag mehr, und nach Caesar's Anordnung sollte hiermit unausgesetzt durch jeden Zeitraum von 4 Jahren fortgefahren werden. Dem Schalttage gab Caesar die Stelle, welche ehemals der Schaltmonat einnahm, nämlich zwischen

1 Ideler II. 92.

2 Sueton. Caes. cap. 40.

dem 7ten und 6ten *ante Calendas Martias*, und dieser Tag wurde als *bissextus ante Calendas Martias* angegeben, dem der *septimus ante Calendas* voranging; so entstand der Name *dies bissextilis* und *annus bissextilis*, der nach Ideler's Bemerkung unrömisch ist, und erst später statt *dies bissextus*, *annus bissextus* vorkommt. Diese Stelle des Schalttages behielt Caesar darum bei, weil er überhaupt die Festtage, so weit es nur möglich war, in ihrer Ordnung lassen wollte, und daher den Schalttag zwischen diejenigen Tage setzte, wo das Volk ohnehin schon eine Einschaltung gewohnt war. Auch die Zahl der Tage, welche er jedem Monate in dem von da an verlängerten Jahre beilegte, stand mit ähnlichen Rücksichten in Verbindung.

Die so von Julius Caesar angeordnete, von ihm theils nach eignem Studium, theils auf des Sosigenes Rath gewählte Einschaltungsmethode macht das Wesentliche des Julianischen Kalenders aus, dessen man sich bei chronologischen Vergleichungen, wegen der Einfachheit der Einschaltungen, gern selbst auch für die Zeitpuncte bedient, die seiner Einführung vorausgehen.

Die kurze Verwirrung, die nach Caesar's Tode noch einmal einrifs, weil die Priester nicht begriffen hatten, dafs vier Viertel eines Tages erforderlich wären, um einen ganzen Tag einzuschalten, sondern schon am Anfange jedes vierten Jahres, das ist am Ende des dritten Jahres, den Schalttag einrückten, ward von Augustus bald bemerkt und gehoben, so dafs seit dem Jahre 757 Roms (3 nach Christi Geburt) die Anwendung des Julianischen Kalenders keine Störung litt.

Diese Julianische Einschaltungsmethode würde das bürgerliche Jahr mit dem Sonnenjahre beständig einstimmig erhalten, wenn das tropische Sonnenjahr 365 Tage 6 Stunden hielte; aber daran fehlen 11 Min. 10 Sec., welche in 129 Jahren fast genau einen Tag ausmachen. Im Julianischen Kalender wurde also in 129 Jahren ein Tag zu viel eingeschaltet, und es entfernte sich daher das bürgerliche Jahr zwar langsam, aber doch je mehr und mehr, von den Erscheinungen, mit welchen gewisse Tage ehemals zusammengetroffen waren. Man wurde hierauf im funfzehnten Jahrhundert aufmerksam, und Petrus de Alliaco und Nicolaus Cusanus wünschten eine Verbesserung des Kalenders. Sixtus IV. wollte eine solche Verbesserung durch den Astronomen Regiomontanus veranstalten lassen,

dessen Tod aber die Ausführung hinderte. Erst unter dem Pabste Gregor XIII. kam die Verbesserung zu Stande, wobei des Aloysius Lilius Vorschläge zum Grunde gelegt wurden.

Die Bulle vom 24. Februar 1581 bestimmte die neue Anordnung des Kalenders, die durch eine Schrift der vom Pabste niedergesetzten Commission: *Canones in Calendarium Gregorianum perpetuum*, und durch eine Schrift des, mit zur Commission gehörenden, Clavius: *Romani Calendarii a* Gregorio XIII. *pont. max. restituti explicatio*, erläutert wurde. Der Zweck dieser Verbesserung, die den Namen des *Gregorianischen Kalenders* erhalten hat, war ein doppelter, erstlich für jenen Zeitpunct den Tag der Frühlings-Nachtgleiche auf den 21. März zurückzuführen und dem Osterfeste (wovon im Art. *Kalender* die Rede seyn wird) seinen richtigen Platz anzuweisen, zweitens aber künftigen ähnlichen Abweichungen durch eine neue Einschaltungsmethode vorzubeugen. Um den ersten Zweck, so weit er hier betrachtet werden kann, zu erreichen, sollten im October des Jahres 1582 zehn Tage weggelassen und sogleich nach dem 4ten Oct. der 15te Oct. gezählt werden; um den zweiten zu erreichen, sollten in vier Jahrhunderten 3 Schalttage ausgelassen werden. Da nämlich das wahre Sonnenjahr fast genau fordert, daſs in 129 Jahren ein Schalttag ausfalle, oder daſs in 387 Jahren 3 Schalttage ausfallen, so wird diesem genauen Werthe des Sonnenjahrs auf die bequemste und von der strengen Richtigkeit wenig abweichende Weise Genüge geleistet, wenn man unter den Secularjahren, mit welchen sich ein Jahrhundert schlieſst, und welche nach der Julianischen Regel sämmtlich Schaltjahre seyn sollten, nur jedes vierte, nämlich 1600, 2000, 2400 und so ferner Schaltjahre seyn läſst, den übrigen aber (nämlich den Jahren 1700, 1800, 1900, 2100, 2200, 2300 u. s. w.) keinen Schalttag zulegt. Dieses ist die wichtige Anordnung, wodurch der Gregorianische Kalender sogleich von Anfang um 10 Tage vom Julianischen abwich, und sich in der Folge noch weiter von ihm entfernte. Vermöge jener im October 1582 weggelassenen zehn Tage traf nämlich der Julianische 5. October mit dem Gregorianischen 15. October, der Julianische 1. Januar 1583 mit dem Gregorianischen 11. Januar zusammen. So blieb es bis zum Jahre 1700; da aber der Julianische Kalender im Februar 1700 einen Schalttag hatte, welcher im Gregorianischen Kalender fehlt, so war von da an der

Julianische Erste jedes Monats mit dem Gregorianischen Zwölften einerlei, bis zum Februar 1800, seit welcher Zeit aus gleichem Grunde der erste Tag jedes Monats im Julianischen Kalender mit dem dreizehnten Tage jedes Monats im Gregorianischen Kalender zusammentrifft.

Diese Einschaltung würde völlig genau seyn, wenn das Sonnenjahr 365 Tage 5 Stunden 49′ 12″ enthielte; da es aber ungefähr 22 Secunden kürzer ist, oder nach LALANDE 24 Secunden, so beträgt die Abweichung in 3600 bis 3900 Jahren einen Tag, der in 36 bis 39 Jahrhunderten zu viel eingeschaltet wird.

Wollte man bloſs nach mathematischen Regeln, ohne auf die Bequemlichkeit für das bürgerliche Leben zu sehen, eine Einschaltung erfinden, so müſste man den Ueberschuſs des Sonnenjahrs über 365 Tage durch einen continuirlichen Bruch ausdrücken und die Näherungswerthe desselben aufsuchen. Jener Ueberschuſs beträgt nach LALANDE 5 St. 48′ 48″ = 20928″, und da 1 Tag = 86400″ ist, so erhält man jenen Bruch =

$$\frac{20928}{86400} = \frac{109}{450} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}}.$$

Die Näherungswerthe sind: $\frac{1}{4}$, das heiſst man muſs jährlich $\frac{1}{4}$ Tag oder in 4 Jahren einen Tag einschalten; $\frac{7}{29}$, das heiſst es müssen in 29 Jahren nur 7 Tage eingeschaltet werden, der Schalttag des 28sten Jahres muſs allemal bis zum 29sten Jahre ausgesetzt werden; aber so wie ein Schalttag in 4 Jahren etwas zu viel beträgt, so betragen 7 Schalttage in 29 Jahren etwas zu wenig, und man erhält als dritten Näherungswerth $\frac{8}{33}$, das ist, in 33 Jahren sollen nur 8 Tage eingeschaltet, nicht das 32ste Jahr soll zum achten Schaltjahre erwählt werden, sondern das 33ste Jahr; der vierte Näherungswerth ist $\frac{31}{128}$, das heiſst in 128 Jahren sollten nur 31 Schaltjahre seyn, statt daſs die Julianische Regel 32 Schalttage giebt; der fünfte Näherungswerth $\frac{39}{161}$ fordert 39 Schalttage in 161 Jahren, und so ferner.

Als eine Anwendung einer Einschaltungsmethode, die genauer als die Gregorianische sey, giebt GATTERER die von dem Sultan DSCHELAL-EDDIN MELEK-SCHAH eingeführte an. Er und seine Astronomen, unter welchen OMAR ALCHEIJAM ge-

nannt wird, fanden nämlich, dafs man nicht alle 4 Jahre einen Tag einschalten dürfe, sondern dafs die Einschaltung zuweilen auf das fünfte Jahr hinübertreten müsse. Es scheint daher die Einrichtung statt gefunden zu haben, dafs die Jahre 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 62 Schaltjahre waren, wobei in 3487 Jahren um einen Tag gefehlt würde, statt dafs die Gregorianische Anordnung erst in 3600 Jahren um einen Tag fehlt. Diese neue Jahrrechnung nahm mit demjenigen Jahre den Anfang, wo die Sonne ziemlich genau bei ihrem Aufgange in den Widder eintrat, nämlich 1079 am 15. März des Julianischen Kalenders, und der Eintritt in den Widder sollte immer auf den Anfang des Jahres fallen. Ein solches Jahr hätte, wenn fortwährend die Anordnung beobachtet worden wäre, den Vorzug, dafs auch in den Zwischenjahren der Jahresanfang nie von dem richtigen Puncte abwiche, welches im Gregorianischen Kalender allerdings der Fall ist, aber die minder bequeme Berechnung der Schaltjahre macht eine solche Einschaltungsmethode doch zum bürgerlichen Gebrauche weniger angemessen. Nach der Absicht der Urheber dieser Jahresordnung sollten, wie Ideler erzählt, sogar die einzelnen Monate sich strenge an den Lauf der Sonne binden [1], es sollte nämlich der erste eines Monats derjenige Tag seyn, wo die Sonne in ein neues Zeichen eintrat, und die Länge jedes Monats also durch astronomische Berechnung bestimmt werden; aber diese Anordnung scheint nicht zur Ausführung gekommen zu seyn. Dagegen versichert Montucla [2], der vorzüglich aus Legentil's Nachrichten geschöpft hat, dafs bei den Indiern solche Monate von einer unbestimmten, allemal erst astronomisch zu berechnenden, Anzahl Tage statt fanden. Ihre Monate bestanden, wie er angiebt, aus Tagen und Theilen von Tagen, welche nach dem Zeitpuncte, da die Sonne den dreifsigsten Grad des Zeichens vollendet, bestimmt werden. Die Rücksicht auf diesen genauen Anfang der Monate sey ihnen darum wichtig, weil es viel darauf ankomme, die Stunde zu kennen, wo ein glücklicher oder unglücklicher Tag sich endiget oder anfängt.

Alles bisher Angeführte betraf das Schaltjahr, welches mit dem bürgerlichen Sonnenjahre verbunden werden mufs, um die-

1 Ideler II. 526.

2 Hist. d. Math. I. 434.

ses mit dem Himmel in Uebereinstimmung zu erhalten. Das Mondenjahr führt zu andern Einschaltungen.

Wenn das Mondenjahr als reines Mondenjahr in Gebrauch ist, wie bei den Arabern und Türken, so ist von irgend einer Einschaltung gar nicht die Rede. Der Monat fängt an, wenn der Neumond zuerst gesehen wird, und zwölf solche Monate heifsen ein Jahr, ohne dafs man sich um das Zusammentreffen mit gewissen Stellungen der Sonne bekümmert. Ideler macht die sehr wahre Bemerkung [1], dafs bei Völkern in heifsen Gegenden, welche meistens Nachts mehr als am Tage thätig sind, und durch keinen sehr auffallenden Wechsel der Jahreszeiten an das Sonnenjahr erinnert werden, zumal wenn sie als Nomaden keinen Landbau treiben, ein solches, blofs vom Monde abhängiges, Jahr sich gar wohl bilden konnte, und dafs dieses wohl der Grund ist, warum wir es einzig bei den herumziehenden Arabern finden, von denen Mohammed es annahm und mit seinen religiösen Festen in Verbindung setzte. Die jetzige Zeitrechnung der Mohammedaner rechnet diese Jahre von Mohammed's Flucht an, jedoch so, dafs nicht der Tag dieser Flucht den Anfang des Jahres macht, sondern der 1. Moharrem, obgleich er 68 Tage vorher fiel, als Anfang des Jahres angenommen ward, den man auf den 15. oder 16. Juli des Jahres 622 fallend findet [2].

Jene Monatsbestimmung, die vom Wahrnehmen des Neumonds abhängt, kann bei regelmäfsigen Angaben nicht gebraucht werden, weshalb Alfergani und Ulugh-Beigh die Monate abwechselnd zu 29 und 30 Tagen anrechnen. Aber ein solches Mondenjahr von 354 Tagen ist gegen das wahre Mondenjahr 8 Stunden 48′ zu kurz, es müssen daher in 30 Jahren 11 Tage eingeschaltet werden, und dieses geschieht in den Jahren 2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29 des 30jährigen Cyklus, nämlich in den Jahren, wo der Ueberschufs mehr als 12 Stunden beträgt. Hiernach lassen sich die Tafeln für die Anfangstage des Türkischen Jahres beurtheilen, wie zum Beispiel Littrow sie mittheilt [3]. Dafs der Neujahrstag dieses Kalenders in etwa 33

1 Ideler II. 28.

2 Ideler giebt an, warum jeder dieser beiden Tage als Anfang dieses Jahres könne angesehen werden. II. 485.

3 Calendariographie. S. 149.

Jahren alle Jahreszeiten durchwandert, läfst sich leicht übersehen.

Eine ganz andere Einschaltung ist nöthig, wenn man das Mondenjahr immer in naher Uebereinstimmung mit dem wahren Sonnenjahre erhalten will. Dann wird, weil das Mondenjahr um 11 Tage zu kurz ist, die öftere Einschaltung eines ganzen Monats nöthig. Schon die Griechen, die früher sich nach der Wahrnehmung des wieder erscheinenden Neumondes richteten, fühlten das Bedürfnifs, eine Reihe von Sonnenjahren aufzufinden, in denen eine Reihe ganz vollendeter Mondmonate enthalten wären, und sie fingen deshalb an, zuerst ein Jahr ums andre, später nach anderen ungenügenden Regeln dem aus zwölf Mondenmonaten bestehenden Jahre noch einen Schaltmonat beizufügen. Erst Meton und Euktemon machten die selbst in unserm Kalender noch berücksichtigte Bemerkung, dafs 19 Sonnenjahre beinahe 6940 Tage enthalten, und dafs damit die Zeit von 235 synodischen Mond-Umläufen sehr genau übereinstimme, dafs also in 19 Jahren im Ganzen 7 Schaltmonate Platz finden müfsten. Die Anordnung der dem zu Folge bestimmten Monate wich von der früheren auch darin ab, dafs nicht mehr die Monate von 29 und von 30 Tagen geradezu wechselten, sondern unter den 235 Monaten nur 110 dreifsigtägige waren. Wahrscheinlich machte Meton das dritte, fünfte, achte, eilfte, dreizehnte, sechzehnte und neunzehnte Jahr zu Schaltjahren[1], gab aber dem Schaltmonate nicht immer 30 Tage, sondern bestimmte seine Länge sowohl, als die Abwechselung der 30tägigen und 29tägigen Monate so, wie es der Uebereinstimmung mit dem Himmel am gemäfsesten schien[2].

Unter den Völkern, die jetzt noch ein mit dem Sonnenjahre in Verbindung stehendes Mondenjahr anwenden, sind die Juden uns am nächsten. Schon seit sehr alter Zeit haben sie nach Mondenjahren gerechnet, aber durch Einschaltung eines ganzen Monates setzten sie in der ältern Zeit den Anfang ihres Jahres, der damals auf den Anfang des jetzt *Nisan* genannten Monats fiel, immer in die Zeit der anfangenden Erndte, so dafs die Noth-

1 Ideler I. 331.

2 In Hinsicht auf genauere Bestimmungen glaube ich auf Ideler verweisen zu dürfen, da eine Anleitung zur Kenntnifs des atheniensischen Kalenders nicht hierher gehört.

wendigkeit, einen Monat einzuschalten, vielleicht nach der noch nicht weit genug vorgerückten Reife der Gerste bestimmt wurde. In der spätern Zeit ward eine bestimmtere Regel der Einschaltungen eingeführt und der Anfang des Jahres sechs Monate später, nämlich mit dem Anfange des Monats *Tischri* (meistens im September) angenommen. Der Schaltmonat wird aber nicht am Ende des Jahres, sondern gegen das ehemalige Ende desselben, welches sich mit dem Monate *Adar* schloſs, eingeschaltet, doch bemerkt Ideler, daſs nicht der im Schaltjahre auf den Monat *Adar* folgende *Veadar* als Schaltmonat anzusehen sey, sondern vielmehr jener erste *Adar*. Die Monate haben theils 30, theils 29 Tage, und zwar findet dieses in den *regelmäſsigen* Gemeinjahren so statt, daſs 30 und 29 Tage abwechselnd vorkommen, in den *regelmäſsigen* Schaltjahren kommt ein 30tägiger Schaltmonat hinzu; aber um die möglichste Uebereinstimmung mit dem Monde zu erhalten, bekommt zuweilen der Monat *Marchesvan* (der zweite des Jahres) 30 Tage, wodurch das Jahr ein *überzähliges* wird, und zuweilen wird dem *Kislev* ein Tag genommen, wodurch es ein *mangelhaftes* wird. Das regelmäſsige Gemeinjahr hat 354, das überzählige 355, das mangelhafte 353 Tage. In jedem Cyklus von 19 Jahren sind die Jahre 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19 Schaltjahre, und man findet die Schaltjahre, wenn man die jüdische Jahrzahl, die sie von Erschaffung der Welt an gerechnet annehmen, mit 19 dividirt, wo nämlich diejenigen Jahre Schaltjahre sind, welche die eben erwähnten Reste lassen. Die Regeln, nach welchen die ungleiche Länge der Gemeinjahre bestimmt wird, giebt Ideler vollständig an, da sie aber nicht eigentlich auf astronomischen Gründen beruhen, so sey es mir erlaubt, sie hier zu übergehen[1]. *B.*

Jahreszeiten.

Quatuor tempora anni; les saisons; *the seasons.* Jahreszeiten heiſsen diejenigen Abtheilungen des Jahres, welche durch die ungleiche Tageslänge, durch die Verschiedenheit von Wärme und Kälte, durch bestimmte Ungleichheit der Witterung, durch das Ausbrechen der Blätter oder ihr Abfallen und

1 Ideler I. 543. Bendavid: zur Berechnung und Geschichte des Jüdischen Kalenders. Berlin 1817.

durch ähnliche Umstände bestimmt werden. Wir pflegen vier Jahreszeiten anzunehmen, deren Anfang und Ende sich aus dem Stande der Sonne astronomisch bestimmen lassen, und von diesen werde ich zuerst handeln, dann aber die Ungleichheiten, welche in verschiedenen Gegenden der Erde statt finden, angeben.

Der Wechsel der Jahreszeiten hängt von der ungleichen Höhe ab, welche die Sonne über dem Horizonte desselben Ortes in den verschiedenen Theilen des Jahres erreicht. Fiele die Ebne des Aequators der Erde mit der Ebne der Erdbahn zusammen, so würde an einem bestimmten Orte der Erde die Sonne immer einen gleichen täglichen Lauf am Himmel haben, und die Abwechselung von Sommer und Winter fiele dann weg. Aber die scheinbare Bahn der Sonne am Himmel ist gegen den Aequator geneigt, die Sonne befindet sich daher bald nördlich, bald südlich von demselben, erscheint den Bewohnern der nördlichen Hälfte der Erde höher über dem Horizonte und giebt ihnen einen längeren Tag, wenn sie nördlich vom Aequator steht. Hiervon hängt theils die Ungleichheit der Jahreszeiten an demselben Orte, theils die entgegengesetzte Beschaffenheit der Jahreszeiten auf den beiden durch den Aequator der Erde getrennten Halbkugeln ab. Wenn die Sonne sich nach ihrer Ankunft im Nachtgleichenpuncte des Widders nördlich vom Aequator entfernt, so tritt für die nördliche Hälfte der Erde eine gröſsere Mittagshöhe der Sonne und ein längerer Tag ein, und dieses Höhersteigen, so wie die Zunahme der Tageslänge dauert fort, bis die Sonne beim Eintritte in den Krebs ihre gröſste Entfernung vom Aequator erreicht hat; dann nehmen auf der nördlichen Halbkugel die Tage wieder ab und die Tageslänge ist der Länge der Nacht gleich, wenn die Sonne in der Waage den Aequator wieder erreicht. So entsteht der Frühling, während die Sonne vom Aequator bis zu ihrer höchsten Stellung, der Sommer, während sie von dieser bis zum Aequator fortrückt, der Herbst dauert von diesem Zeitpuncte bis zur tiefsten Stellung der Sonne und der Winter endlich vom tiefsten Standpuncte der Sonne, bis sie höher steigend den Aequator wieder erreicht. Daſs unterdeſs die südliche Halbkugel kürzere Tage gehabt hat, während die Tage auf der nördlichen Halbkugel am längsten sind, erhellet leicht; denn da die nördlich vom Aequator stehenden Gestirne in den Gegenden der südlichen Halbkugel einen niedrigen Bogen am Himmel durchlaufen und nicht so lange, als die Sterne im Aequator, über dem Ho-

rizonte verweilen, so ist dieses auch mit der Sonne der Fall, wenn sie nördlich vom Aequator steht; es nimmt daher die Mittagshöhe der Sonne auf der südlichen Halbkugel ab, wenn sie bei uns zunimmt, die Tage sind dort am kürzesten, wenn sie bei uns am längsten sind, und die Jahreszeiten geben dort gerade die entgegengesetzten Erscheinungen von denen, welche wir zu eben der Zeit bei uns beobachten. Wenn wir also bei dem Eintritte der Sonne in den Nachtgleichenpunct des Widders sagen, die Sonne sey in der Frühlingsnachtgleiche, so beziehen wir dieses auf die nördliche Halbkugel.

Um zu übersehen, wie diese Ungleichheit bei der wahren Bewegung der Erde um die Sonne hervorgebracht wird, darf man sich nur erinnern, daſs die Axe der Erde bei dem Umlaufe um die Sonne immerfort eine parallele gegen die Ebne der Erdbahn geneigte Lage behält. Ist nun die Erde an der Seite der Sonne, wo sich unser Nordpolarstern befindet, gegen welchen hin der nördliche Theil der Erdaxe gerichtet ist, so ist der Nordpol der Erde von der Sonne weggewendet, und wird nicht von der Sonne beschienen. Der Nordpol selbst und die ihm nahe liegenden Gegenden kommen um diese Zeit, obgleich die Erde sich um ihre Axe dreht, dennoch nie über die Lichtgrenze, wo die Beleuchtung der Erde von der Sonne sich endigt, hinaus, und haben daher längere Zeit Nacht; die über 23½ Gr. weit vom Pole entfernten Gegenden der nördlichen Halbkugel treten zwar, bei der Umdrehung der Erde, auf die Seite, welche Licht von der Sonne empfängt, aber da der gröſsere Theil der nördlichen Halbkugel in der Nachtseite liegt, so verweilen jene nicht lange in dem Raume, welcher dann Licht von der Sonne empfängt, die Tage sind daher auf der nördlichen Halbkugel kurz und vorzüglich kurz in der Nähe der nördlichen kalten Zone. Dieses ist der Fall, wenn die Sonne uns in den südlichsten Gestirnen der Ekliptik erscheint, weil nämlich dann die Erde, von der Sonne aus gesehen, sich in den nördlichsten Gestirnen oder an der Seite, wo der Nordpolarstern steht, befindet. Gelangt die Erde in die Stellung, wo sie den Sonnenbewohnern 90 Grade vom Nordpolarsterne und eben so weit von den Sternen steht, die unserm Südpole entsprechen, so befindet sich die Sonne in der Ebne des Erdäquators und erscheint auf beiden Erdpolen im Horizonte; die erhellete Hälfte der Erde umfaſst dann den halben Aequator und jeden Parallelkreis halb, daher verweilt, bei der

Rotation der Erde in 24 Stunden jeder Ort eben so lange in der Tagseite, als in der Nachtseite, und es ist auf der ganzen Erde Tag und Nacht gleich lang. Je weiter die Erde auf die Seite der Sonne hinübergeht, die dem Nordpolarsterne gegenüber liegt, desto tiefer tritt der Südpol der Erde in ihre Nachtseite und desto mehr entfernt sich der Nordpol der Erde von der Nachtgrenze, tiefer in die erhellete Hälfte eintretend; die Sonne steigt daher über dem Horizonte des Nordpoles höher, die ihm nahe liegenden Gegenden haben fortwährend Tag, und da, je mehr der Nordpol der Erde sich von der Nachtgrenze entfernt, desto mehr Gegenden in den erhellten Raum, welcher während der Umdrehung stets erleuchtet bleibt, gelangen, so nimmt die Gegend, in welcher die Sonne nicht mehr untergeht, von Tage zu Tage zu, bis die Erde den Punct ihrer Bahn gerade dem Nordpolarsterne*) gegenüber erreicht hat, wo dann die Nachtgrenze allmälig wieder anfängt, sich dem Nordpole der Erde zu nähern. Daſs unterdeſs der Tag an jedem Orte der nördlichen Halbkugel länger als die Nacht ist, und daſs diejenigen Orte, die dem Pole ziemlich nahe liegen, nur auf kurze Zeit in die Nachtseite eintreten, also kürzere Nächte haben, als die dem Aequator näheren Orte, läſst sich leicht übersehen.

Diese Bestimmungen ergeben die Dauer der astronomischen Jahreszeiten; die meteorologischen Jahreszeiten sind zwar an diese geknüpft, aber doch manchen Ungleichheiten theils in den einzelnen Jahren, theils an verschiedenen Orten unterworfen. Was den regelmäſsigen Gang der Witterung in der nördlichen gemäſsigten Zone betrifft, so tritt der Frühling, so fern wir darunter das Grünwerden der Bäume, das dauernde Fortwähren angenehmer Witterung verstehen, bei uns erst ziemlich lange nach der Frühlingsnachtgleiche und in den nördlichen Gegenden noch später ein. Um nur etwas von dieser Verschiedenheit mitzutheilen, setze ich hierher die Angabe der mittlern Wärme jedes Monats für Petersburg, Mannheim und Rom, worin sich die ungleichen Wechsel der Temperatur in südlichern und nördlichern Gegenden übersehen lassen.

*) Statt Nordpolarstern müſste es eigentlich Nordpol heiſsen; ich behalte indeſs, um verständlicher zu seyn, jenen Ausdruck bei.

	Rom.	Mannheim.	Petersburg.
Januar	6,6° R.	+ 0,7° R.	÷ 8,6° R.
Februar	6,8	2,0 . .	÷ 7,6
März	8,6	3,9 . .	÷ 5,5
April	11,1	8,5 . .	+ 1,2
Mai	14,4	12,5 . .	5,7
Juni	17,6	15,2 . .	11,5
Juli	19,6	16,2 . .	14,1
August	19,7	16,0 . .	13,3
September	17,5	13,2 . .	8,6
October	13,6	8,1 . .	2,9
November	9,7	3,1 . .	÷ 2,3
December	7,5	0,8 . .	÷ 5,9

Die gröſste Kälte ist überall bald nach dem Anfange des Jahres, die gröſste Wärme zwischen dem 20. Juli und 8. August, und zwar in den nördlichen Gegenden am früheste͏n; die mittlere Temperatur des ganzen Jahres tritt ein um den 20. April und um den 20. October. Aber obgleich dieser Gang der Wärme ziemlich für die ganzen gemäſsigten Zonen gilt, so ist er doch nach der Lage der Orte in der Mitte des festen Landes oder am Meere, auf Bergen oder in der Ebne und nach andern Umständen sehr verschieden.

In der kalten Zone ist die Zunahme und Abnahme der Wärme zwar der in der gemäſsigten Zone ähnlich, aber der Uebergang von einem heftigen und mehr gleichförmig kalten Winter zur Sommerwärme erfolgt plötzlicher und auch im Herbste sinkt bei Abnahme der Tageslänge die Wärme schneller, als in den nördlichen Theilen unsrer gemäſsigten Zone.

Auf die heiſse Zone ist unsere Eintheilung der Jahreszeiten gar nicht wohl anzuwenden. Die Tageslänge, die auf dem Aequator selbst immer der Nacht gleich bleibt, ändert sich auch in den wenig vom Aequator entfernten Gegenden nur unbedeutend. Die Aenderungen der Wärme sind ebenfalls viel geringer als bei uns; die Bäume stehen niemals längere Zeit entlaubt, sondern erhalten schon neue Blätter, während die alten Blätter sich entfärben und abfallen, Blüthen und Früchte aber sieht man zu jeder Jahreszeit an den Bäumen [1]. Was man in jenen Gegenden Winter nennt, ist die Regenzeit, und das ganze Jahr theilt sich dort in zwei Jahreszeiten, die trockne Jahreszeit und

1 Vollmers Gemälde der Tropenländer. S. 216.

die Regenzeit. Diese tritt indefs nicht dann ein, wenn die Sonne sich am weitesten vom Zenith entfernt, sondern, obgleich sie von örtlichen Umständen abhängt, meistens dann, wenn die Sonne das Zenith des Ortes erreicht. Nach von Humboldt's Erzählung ist in den tropischen Gegenden nördlich vom Aequator vom December bis Februar der Himmel vollkommen heiter und der Ostnordostwind ununterbrochen. Gegen Anfang des März zeigen sich Spuren von Feuchtigkeit in der Luft, es treten Windstillen ein, und im April fängt die Regenzeit an. Diese Zeit der Regen und Stürme tritt sehr nahe dann ein, wenn die Sonne das Zenith des Ortes erreicht, und v. Humboldt sucht die Ursachen nachzuweisen, die diese Aenderung der Witterung bewirken [1]. Dafs mit dieser Angabe die Regenzeit im mittlern Africa, nördlich vom Aequator, und in Arabien, die Zeit der Nil-Ueberschwemmungen, die Regenzeit in Bengalen zusammentrifft, läfst sich aus Reisebeschreibungen leicht nachweisen.

B.

Inflammabilien.

Unter diesem Worte versteht man bald sämmtliche brennbare Stoffe, bald blofs die nicht metallischen einfachen Stoffe, die sich durch Brennbarkeit auszeichnen. *G.*

Inflexion des Lichtes.

Beugung oder Diffraction des Lichtes; *Inflexio s. diffractio luminis;* inflexion ou diffraction de la lumière; *inflexion or diffraction of light.* Die Erscheinungen der Beugung des Lichtes zeigen sich am Rande des Schattens der Körper, indem theils Lichtstrahlen innerhalb des Raumes hingelangen, der ganz von Schatten bedeckt seyn sollte, theils hellere und farbige Streifen sich am äufseren Rande des Schattens zeigen. Diese Erscheinungen sind indefs zu mannigfaltig und zu sehr zusammengesetzt, um kurz dargestellt zu werden; es mag daher hier genügen zu bemerken, dafs eine Ablenkung der Lichtstrahlen von ihrem geraden Wege, welche beim Vorübergehen an dem Rande fester Körper eintritt,

1 Annales de Ch. et Ph. VIII. p. 179.

Beugung des Lichtes heifst. Um die mannigfaltigen und unter verschiedenen Umständen sehr ungleich sich darstellenden Erscheinungen der Beugung des Lichtes so vollständig, als es die Wichtigkeit des Phänomens fordert, kennen zu lernen, ist es vortheilhaft, sie in der Ordnung, wie sie entdeckt sind, darzustellen. Ich werde daher die Bemühungen der einzelnen Physiker meistens nach der Zeitfolge erzählen und ihre Meinungen über diese Erscheinungen mittheilen, indefs mich zugleich bemühen, bei der Verschiedenheit der Erscheinungen stets auf den Grund dieser Verschiedenheit hinzudeuten.

Grimaldi machte zuerst in der Mitte des 17. Jahrhunderts Versuche [1], wodurch er zeigte, dafs Lichtstrahlen beim Vorübergehen an festen Körpern eine Beugung erleiden, und zwar theils nach aufsen, als ob der Lichtstrahl sich von dem Körper entferne, theils nach Innen, als ob er nach dem Innern des Schattens hineingezogen werde. Er setzte nämlich schmale undurchsichtige Körper dem in das dunkle Zimmer fallenden Strahle aus, und fand, dafs ihr auf weifsem Papiere aufgefangener Schatten breiter sey, als er nach dem geradlinigen Fortgange der am Rande vorbeigehenden Lichtstrahlen seyn sollte; aber umgekehrt fand er auch, dafs der erleuchtete Raum, welchen der ins dunkle Zimmer einfallende Strahl beschien, gröfser war, als er nach der geometrischen Bestimmung für gerade Lichtstrahlen seyn sollte. Er nannte diese Erscheinung *Diffraction*. Er beobachtete richtig die Farbenränder, welche den Schatten eines schmalen Körpers theils im Innern des Schattens, theils aufserhalb umgeben. Diese Versuche sind von späteren Beobachtern wiederholt und mit andern in Verbindung gesetzt, und ich brauche daher hiebei nicht zu verweilen. Aber merkwürdig, und erst durch neuere Beobachtungen als recht merkwürdig ins Licht gestellt, ist eine Beobachtung Grimaldi's, die in folgendem Theorem dargestellt ist: Ein erleuchteter Körper kann dunkler werden, wenn ein neues Licht zu dem ihn schon erleuchtenden hinzukommt. Die Beobachtung, die er zur Bestätigung dieses Satzes anführt, scheint mir zwar unvollkommen, aber die neuesten Beobachtungen werden zeigen, dafs die Behauptung richtig ist, und sich weit vollkommener darthun läfst, als es aus Grimal-

1 Grimaldi physico-mathesis de lumine, coloribus et iride; libri duo. Bologna 1665.

di's Beobachtung hervorgeht. Er liefs zwei Lichtstrahlen durch kleine Oeffnungen in das dunkle Zimmer fallen, und fing sie da auf, wo die erleuchteten Kreise, welche sie auf einer Tafel darstellten, in einander griffen. War nur eine der kleinen Oeffnungen frei, so bemerkte man, dafs der erleuchtete Kreis mitten heller, als nach den Rändern erschien; waren beide Oeffnungen frei, so zeigte sich freilich derjenige Theil beider Kreise, wo sie auf einander fielen, im Uebrigen stärker erleuchtet, aber die Randlinie jedes Kreises war in diesem erhellten Raume als dunkler zu erkennen. Unstreitig empfing diese Gegend, die dem Rande des einen Kreises, hineintretend in den andern, entsprach, eben das Licht von der einen Oeffnung, die andere mochte frei seyn oder nicht, und gewifs empfing sie auch von der andern Oeffnung hinzukommendes Licht, dennoch erschien sie minder erhellt, als die übrigen gegen den Rand hinliegenden nur durch eine Oeffnung erhellten Theile der einen oder andern Kreisfläche. Grimaldi sucht die Ursache hiervon in einer in dem Lichte entstandenen Wellenbewegung oder Fluctuation, welche an den Rändern der Oeffnung hervorgebracht wird, und vermöge welcher die so erschütterten Lichtstrahlen dem Auge des Beobachters keinen so lebhaften Eindruck bringen, als andre Lichtstrahlen *).

Newton scheint nach Grimaldi der erste gewesen zu seyn, welcher diese Versuche wiederholte und in einigen Rücksichten vollkommener anstellte, doch aber nicht auf alles, was schon Grimaldi gesehen hatte, gehörig achtete. Newton liefs durch eine sehr enge Oeffnung einen Lichtstrahl in das dunkle Zimmer fallen und mafs den Schatten ab, den dünne Körper hervorbrachten, wenn sie diesem Lichtstrahle ausgesetzt wurden; er fand diesen Schatten breiter, als er seyn sollte, indem zum Beispiel ein Menschenhaar, ungefähr $\frac{1}{280}$ Zoll dick, 12 Fufs von der kleinen Oeffnung aufgestellt, in 4 Zoll Entfernung hinter dem Haare einen Schatten $= \frac{1}{60}$ Zoll breit, 2 F. hinter dem Haare einen Schatten $= \frac{1}{28}$ Zoll breit, 10 Fufs hinter dem Haare einen Schatten $\frac{1}{8}$ Zoll breit hervorbrachte. Er fand, dafs diese Schatten gleich breit blieben, auch wenn das Haar im Wasser zwischen Glasplatten angebracht war, und hieraus zog er den Schlufs, dafs es nicht eine Brechung des Lichtes in der Luft sey, welche diese Veränderung in der Richtung der Lichtstrahlen hervor bringe,

*) Vergl. Ann. de Ch. et Ph. X. 306.

Fig. 149. sondern durch eine Beugung werde das Licht in eine andre Richtung gebracht. Er schlofs aus dem Umstande, dafs nach c, e keine Strahlen zu gelangen schienen, dafs schon in einigem Abstande vom Haare a die Lichtstrahlen bc, de nicht nach c, e kommen, wohin sie den gewöhnlichen Gesetzen gemäfs gelangen sollten, sondern nach f, g zu gehend dem Schatten jene gröfsere Breite geben. Diese Beugung schien stärker zu seyn bei näher vorbei gehenden Strahlen, indem die Verbreiterung des Schattens in der Nähe stärker war. Sie betrug nämlich in 4 Zoll Entfernung $\frac{1}{60} - \frac{1}{280} = \frac{11}{840}$ Zoll, und hiernach hätte die vergröfserte Breite in der sechsfachen Entfernung $= \frac{11}{140}$ Zoll, also die ganze Breite $= \frac{11}{140} + \frac{1}{280} = \frac{23}{280}$ Zoll seyn müssen, sie war aber nur $\frac{1}{28}$ Zoll oder nur etwa halb so breit; sie hätte in 10 Fufs Entfernung $= 30 \cdot \frac{11}{840} + \frac{1}{280} = \frac{11}{28} + \frac{1}{280} = \frac{111}{280}$ Zoll seyn müssen, war aber nur $= \frac{1}{8} = \frac{35}{280}$ Zoll; dieses schien den Schlufs zu begründen, dafs die entferntern Strahlen hi, kl den Raum fg zum Theil erleuchteten, welchen die in mn den Schatten begrenzenden Strahlen dunkel lassen würden.

Die Schatten der so dem Lichte ausgesetzten Körper zeigten drei Farbenränder, unter welchen der dem Schatten am nächsten liegende am breitesten und lichtvollsten war. Um die Farben dieser Ränder deutlicher zu sehen, wurde der Schatten auf einem schief gegen die Richtung des Lichtstrahles aufgestellten Papiere aufgefangen, und dann liefs sich wahrnehmen, dafs der innere, dem Schatten nächste, Farbenrand an der inneren Seite Violett und Dunkelblau, dann lichteres Blau, Grün, Gelb, Roth zeigte; der zweite hatte Blau an der inneren Seite, worauf Gelb und Roth folgte, und eben so, nur noch schwächer, war der dritte Rand gefärbt. Die Bläschen und Ritzchen, die sich zufällig im Glase fanden, hatten eben solche Farbenränder um ihre Schatten, und Newton erklärt die farbigen Bogen, welche man sieht, wenn man die Sonne durch eine nahe vor das Auge gehaltene Feder ansieht, auf ähnliche Weise, indem die auf die Netzhaut geworfenen Schatten eben solche Farbenränder um sich haben.

Zu einer andern Reihe von Versuchen diente der schmale Spalt zwischen zwei gerade geschliffenen Messerschärfen, die entweder einander parallel, oder unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigt in dem durch eine enge Oeffnung in das dunkle Zimmer eingelassenen Lichtstrahle aufgestellt wurden.

Hier waren die Erscheinungen, die sich auf einer, das durch den Spalt durchgelassene Licht auffangenden, Ebene zeigten, theils nach der Entfernung dieser Ebene, theils nach der gröſsern oder geringern Weite des Spaltes verschieden. Fing man das Licht nicht allzuweit hinter dem Spalte auf, und war dieser durch die parallel gehaltenen Schärfen der Messer begrenzt, so zeigten sich drei Farbenränder an jeder der Messerschneiden an dem Rande des hellen Raumes, die deutlicher und breiter wurden, so wie man den Spalt verengerte; bei weiterem Verengern des Spaltes verschwand zuerst der äuſsere Farbenstreif, dann der zweite, dann der innerste; und wenn man die allmälige Verengerung fortsetzte, wobei der erleuchtete Raum sich breiter zeigte, so entstand in der Mitte dieses erleuchteten Raumes ein dunkler Schatten, welcher bei noch gröſserer Verengerung des Spaltes breiter wurde, und endlich den lichten Raum verdeckte.

Wenn die beiden Messerschneiden, statt parallel zu seyn, einen sehr kleinen Winkel von nicht völlig 2 Graden mit einander machten, so erhielt man auf einer nur etwa 1 Zoll von dem Spalte entfernten Tafel eben die Farbenstreifen an jeder der beiden Messerschneiden, mit den Grenzen ihrer Schatten parallel; diese Streifen bildeten eben so groſse Winkel mit einander als der, welchen die Schneiden selbst mit einander machten, und gingen nicht über den Scheitel des Winkels hinaus; war aber die Tafel zum Auffangen des Lichtes in hinreichender Entfernung aufgestellt, so erstreckten sich die Farbenstreifen hyperbolisch in den Schatten hinein. Um diesen schönen Versuch deutlich zu übersehen muſs man sich auf einer mit den einander gegenüberstehenden Schneiden parallelen Ebene, auf welcher das Bild mit seinen Farbenrändern aufgefangen werden soll, die beiden geraden Linien gezeichnet denken, die bei geradem Fortgange der Lichtstrahlen die Grenzen des Schattens darstellen würden. Da wo der Spalt noch ziemlich breit ist, sieht man diesen Raum erleuchtet und die drei Farbenränder liegen innerhalb desselben parallel mit der Grenze des Schattens; da hingegen, wo der Spalt zu eng wird, um diese Farbenränder noch zu fassen, durchschneiden sich die den entgegengesetzten Schärfen angehörigen Ränder und gehen in den entgegengesetzten Schatten hinein, so daſs jeder der Farbenstreifen eine hyperbolische Krümmung erhält, deren Asymptote eine gerade

Linie ist, die durch den Scheitel des dem geradlinigen Fortgange der Lichtstrahlen gemäſs gezeichneten Winkels senkrecht gegen die Halbirungslinie dieses Winkels gezogen ist. Man versteht den Ursprung dieser Hyperbeln am besten, wenn man in eben der Entfernung, wo man ihr Entstehen bei einer Neigung der Schneiden gegen einander beobachtet, die Beobachtung mit parallel gestellten Schneiden wiederholt und da sieht, wie, bei sehr starker Annäherung der Schneiden, die Farbenstreifen immer tiefer, aber nun parallel mit den Schneiden bleibend, in den Schatten hineinrücken und einen hellen Raum zwischen sich lassen. Das was hier nach und nach bei engerem Zusammenrücken geschieht, das stellt sich dort an den ungleich nahen Theilen der Schneiden zugleich dar, indem die gegen den Scheitel des Spaltes einander ungemein nahe liegenden Theile der Schneiden ihre Farbenränder sehr weit entfernt, in den Schatten hineingerückt, neben sich haben.

Ich theile hier die Messung Newton's nicht mit, da ähnliche Messungen aus neuern Versuchen noch belehrender seyn werden. Dagegen muſs ich noch den wichtigen Versuch erzählen, wo die Beugung des ungleich farbigen Lichtes untersucht ward. Der durch eine enge Oeffnung in das finstere Zimmer eingelassene Lichtstrahl fiel auf ein Prisma, und der Körper, dessen Schatten und Farbenränder am Schatten man beobachten wollte, wurde einem bestimmten Farbenstrahle ausgesetzt. Dann waren die Farbenränder nur einfarbig, aber breiter im rothen Lichtstrahle, schmäler im grünen und am schmalsten im violetten Lichte.

Newton's Erklärung der Phänomene ist unvollkommen und geht ungefähr dahin, daſs das Licht von seiner geraden Richtung abgelenkt wird, und deshalb in der Mitte des engen Spaltes, bei gewissen Stellungen der Tafel, gar kein Licht durchzugehen scheint, weil nämlich das hier durchgegangene Licht, abgelenkt nach beiden Seiten, nicht den mittlern Raum trifft, welchen es bei geradem Fortgange der Lichtstrahlen treffen sollte. Er stellt über die Entfernung, in welcher die in jedem der einzelnen Farbenstreifen kenntlich werdenden Lichtstrahlen am Rande des festen Körpers vorbei gehen, nähere Betrachtungen an, und bemerkt vorzüglich, daſs die weniger brechbaren Strahlen, die rothen nämlich, einer stärkern Beugung unterworfen sind, als die, welche brechbarer sind.

Nach Newton ist fast im ganzen achtzehnten Jahrhunderte sehr wenig für diese Lehre geschehen. De L'Isle und Maraldi stellten einige Versuche an, die hierher gehören. Der erste liefs den Schatten einer runden Scheibe, die dem ins dunkle Zimmer eintretenden Lichtstrahle ausgesetzt war, auf eine Ebene fallen und bemerkte den hellen Rand um den Schatten; diesen verglich er mit dem bei totalen Sonnenfinsternissen um den Mond gesehenen Ringe [1]. Maraldi hing eine Kugel oder einen Cylinder im freien Sonnenlichte auf, und bestimmte die Länge des Schattens, die er erheblich kürzer fand, als sie nach der Gröfse des Sonnendurchmessers, bei geradem Fortgange der Lichtstrahlen, seyn sollte. Er bemerkte den hellen Ring, womit der Schatten sich umgeben zeigt, und die verminderte Schwärze des Schattens durch gebeugte Strahlen selbst in dem Raume, wohin nach den gewöhnlichen Regeln der Optik kein Sonnenstrahl gelangen konnte. Andere Versuche, auch im dunkeln Zimmer angestellt, will ich nicht erzählen, um nicht einerlei Gegenstand öfter zu wiederholen [2].

s' Gravesande [3] eignet den Körpern in der Nähe eine anziehende Kraft zu, in gröfserer Ferne eine abstofsende, welche die Beugung der Lichtstrahlen in den Schatten hineinwärts und vom Schatten abwärts hervorbringe. Er bediente sich eines Instruments, welches auch Flaugergues und Biot bei ihren Versuchen anwendeten, welches nämlich so eingerichtet ist, dafs zwei Stahlplatten, entweder genau parallel, oder unter einem kleinen Winkel gegen einander geneigt, einander genähert werden können. Durch den so erhaltenen engen Spalt liefs er den in das dunkle Zimmer eingelassenen Lichtstrahl gehen und fand, dafs der helle Raum, welcher sich zwischen den Schatten der sehr genäherten Stahlplatten zeigte, zwar zuerst mit der Annäherung der Platten gegen einander abnahm, dafs aber, bei sehr eng werdender Spalte, drei Farbenränder sichtbar wurden, und bei noch mehr verminderter Weite des Spaltes der helle Raum sich verbreiterte, die Farbenstreifen aber, da sie, wie er sagt, aus dem nach beiden Seiten angezognen Lichte entstehen, sich seitwärts entfernen und einen dunkeln Raum zwischen sich lassen.

1 Mém. de Paris 1715. p. 147.
2 Mém. de Paris 1723. p. 111.
3 Physices elementa p. 725.

Dieser vergröfsert sich nach s'GRAVESANDE's Meinung bei gröfserer Annäherung der Platten darum, weil die von der einen Platte angezogenen Strahlen in den Abstofsungskreis der andern Platte gelangen. Er beobachtete ferner, dafs die an beiden Seiten des hellen Zwischenraumes erscheinenden hellen Linien oder Farbenstreifen durch jede einzelne der beiden Schärfen der Stahlplatten afficirt wurden; denn eine zitternde Bewegung *einer* Platte brachte die Farbenränder an beiden Seiten in zitternde Bewegung. Auch er bemerkte, dafs nach Entstehung des dunklen Zwischenraumes in der Mitte bei noch gröfserer Verengerung des Spalts die innern Streifen zuerst verschwanden. s'GRAVESANDE stellte den Versuch auch so an, dafs die beiden Stahlplatten nicht in einerlei, auf den Lichtstrahl senkrechten, Ebne einander genähert wurden, sondern dafs die eine das Licht empfing und in einiger Entfernung hinter jener die zweite so aufgestellt war, dafs das, beim Vorbeigehen an der ersten Schärfe, gebeugte Licht sie traf und an ihr vorbeiging. Hier wurden, nach s' GRAVESANDE's Ansicht, beim Vorbeigehen an der ersten Schärfe einige Strahlen angezogen, andere abgestofsen, die ersteren, als in den Schatten hinein gebeugt, wurden deutlicher sichtbar, die andern vermischten sich, so lange keine zweite Platte sie auffing, mit dem direct oder ungebeugt einfallenden Lichte. An der zweiten Schärfe verhält es sich eben so, so lange noch ein hinreichend breiter Raum für die zwischen beiden durchgehenden Lichtstrahlen offen bleibt. Wird aber die zweite Platte so nahe herangerückt, dafs blofs den Lichtstrahlen Raum bleibt, welche der Wirkung der ersten Platte unterworfen gewesen waren, so bemerkt man bei sehr verengertem Zwischenraume, dafs die Farbenstreifen an der Seite der zweiten Schärfe (die das Licht später auffängt) verschwinden, während die an der andern Seite noch bestehen.

Auch MARAT[1] hat die hierher gehörigen Versuche mit einigen auf neue Weise angeordneten bereichert. Er bemerkt, dafs das Licht, welches durch eine runde, kleine Oeffnung fällt, am Rande heller, in der Mitte weniger hell erscheine, dafs man aber auch, bei richtig gewählter Entfernung der Ebene, welche das Licht auffängt, nachdem es durch eine enge runde Oeffnung

1 MARAT's Entdeckungen über das Licht; übers. von Weigel. Leipzig 1783. S. 2. 4. u. s. w.

gegangen ist, in dem erleuchteten runden Raume mitten einen Lichtpunct wahrnehme. Diese Verschiedenheit, ob ein stärkeres oder schwächeres Licht im Mittelpuncte erscheint, hängt von der Entfernung der erleuchteten Ebne ab.

Brougham gab sich viele Mühe, bestimmte Gesetze für einige hierher gehörige Phänomene aufzufinden[1], indeſs sind doch unter seinen Versuchen, die zum Theil Wiederholungen der Newton'schen waren, nur die von hinreichender Wichtigkeit, um hier erwähnt zu werden, welche die durch Reflexion entstehenden Farbenbilder betreffen. Er lieſs im dunkeln Zimmer das Licht auf eine polirte Nadel fallen, und fing die bunten Sonnenbilder, die wir an solchen Körpern oft, als durch zurückgeworfene Strahlen entstehend, bemerken, auf einer Ebne auf. Wurde die Nadel im prismatischen Farbenbilde so gehalten, daſs die einzelnen Farbenstrahlen sie in verschiedenen Puncten, nach der Länge der Nadel, trafen, so waren die Bilder, die jeder einzelne Farbenstrahl machte, kenntlich und getrennt, und es fand sich das rothe Bild am breitesten, das violette am schmalsten. Bei einem andern Versuche wurden die eingelassenen Strahlen durch ein Prisma in Farbenstrahlen zerstreut; diese wurden durch eine Glaslinse aufgefangen, wo sie dann jenseits des Brennpunctes wieder divergirten; hier fielen sie auf ein zweites Prisma, das die divergirenden Farbenstrahlen in einen weiſsen Strahl vereinigte, und dieser weiſse Strahl fiel endlich auf die Nadel, um die farbigen Bilder durch Reflexion hervorzubringen. Ward dann hinter dem ersten Prisma irgend ein Farbenstrahl durch einen Schirm aufgehalten und gehindert, die Linse zu erreichen, so fehlte dieser in dem reflectirten Farbenbilde.

Brougham schlieſst aus diesen Experimenten, daſs hier die mittlern Strahlen unter einem dem Einfallswinkel gleichen Winkel, die rothen unter einem kleinern, die violetten unter einem gröſsern Winkel reflectirt werden. Er überzeugte sich, daſs die von jeder Farbe erleuchteten Räume eben die verhältniſsmäſsige Ausdehnung, wie im prismatischen Farbenbilde, haben. Ebenderselbe bemerkt, daſs nur die spiegelnden Körper, welche auf ihrer Oberfläche streifig sind, solche Bilder geben; bei ebnen Flächen aber zeigen sie sich nicht so leicht, als bei Flächen von sehr kleinem Krümmungshalbmesser, weil meistens die zwei

1 Phil. Tr. for 1796. p. 227.

benachbarten in einander fallen und eine weiſse Farbenmischung geben. Aus diesen bei der Zurückwerfung entstehenden Farbenbildern erklärt er die zarten Farbenbilder, die wir so oft an Gegenständen mit feinen Haaren sehen, wenn diese gehörig der Sonne ausgesetzt werden, u. s. w.

Einige hierher gehörige Bemerkungen von de Chaulnes und Herschel [1], die gewisse Versuche Newton's betreffen, darf ich wohl übergehen, und eben so Jordan's Versuche [2], da sie zwar in jener Zeit (1799) einigen Werth hatten, aber doch zu dem Bekannten wenig hinzufügen, und manche seiner Einwürfe gegen Newton nicht ganz richtig sind. Er legt zu viel Werth auf die Bemerkung, daſs das durch die enge Oeffnung in das dunkle Zimmer eindringende Licht dort durch Beugung eine Divergenz erhalte. Seine Beobachtungen über die Schatten schmaler Körper sind den von Flaugergues angestellten ähnlich.

Der Zeitfolge nach würden hier Thomas Young's Untersuchungen folgen müssen, da sie aber eine ganz neue Idee zur Sprache brachten, die Flaugergues, Biot und andern Physikern unbekannt blieb, so lasse ich zuerst die Untersuchungen folgen, die sich am nächsten an das Vorige anschlieſsen [3]. Die Akademie zu Nismes hatte im Jahre 1811 einen Preis auf die beste Abhandlung über diesen Gegenstand gesetzt, den Flaugergues erhielt, und den Inhalt seiner Abhandlung muſs ich hier zunächst mittheilen [4].

Man hänge im vollen Sonnenlichte, nicht im finstern Zimmer, eine mit Ruſs geschwärzte Kugel auf und lasse ihren Schatten auf eine weiſse Tafel fallen, so zeigt sich der Schatten ungleich, je nachdem man die weiſse Tafel mehr oder minder entfernt. Steht die Tafel sehr nahe, so ist der gleichförmig dunkle Schatten mit einem schmalen Halbschatten und dieser mit einem sehr schmalen hellern Kreise umgeben; entfernt man sie, so wird der Schatten kleiner, der Halbschatten wird breiter, und der

1 Mém. de l'acad. de Paris pour 1755. 136. Phil. Transact. for 1807. §. 33.

2 G. XVIII. 1.

3 Unter den ältern Untersuchungen scheinen mir die von Mairan (Mém. de Paris 1738. p. 5.), als bloſse hypothetische Erklärungen enthaltend, wenig Werth zu haben.

4 Journal de Physique LXXV. 16. LXXVI. 142. 278.

helle Kreis wird breiter und matter; bei einer Entfernung von 12 Kugeldurchmessern wird die Mitte des Schattens der Kugel, gleich einem Halbschatten, matt erleuchtet, der Rand des Schattens aber behält seine Schwärze; entfernt man die Kugel bis auf 104 oder 105 Kugeldurchmesser, so ist in der Mitte des Schattens die Erleuchtung so concentrirt, daſs sie fast wie ein weiſser Punct mitten in dem schwarzen Schatten erscheint; bei noch gröſserer Entfernung verschwindet der helle Punct und ein dunkler Punct wird kenntlich, der etwa in der Entfernung von 107 Kugeldurchmessern auch verschwindet. Diese Entfernung, die sich mit der scheinbaren Gröſse der Sonne etwas ändert, ist diejenige, bei welcher der Rand der Sonne vom Rand der Kugel verdeckt wird. Diese Phänomene bleiben dieselben, es mag der schattenwerfende Körper eine Kugel seyn, oder eine bloſse Kreisscheibe. Wenn man statt einer dichten Scheibe eine in der Mitte durchbohrte anwendet, so tritt eine doppelte Erscheinung ein; an der Seite der Oeffnung findet eine Beugung der Strahlen vom Rande abwärts nach der Mitte zu und vom Rande einwärts gegen den Schattenring zu statt, und ebenso werden am äuſsern Rande der Scheibe Strahlen nach dem Innern des Schattens und Strahlen vom Schatten hinauswärts abgelenkt; die in den hellen Raum in der Mitte hinein gebeugten machen einen hellen Punct auf der in der Mitte erhellten Fläche, und auf dem ringförmigen Schatten bemerkt man in der Mitte mehr Erhellung, umschlossen von schwärzern Kreisen. Flaugergues macht hierbei die Bemerkung, daſs der Schatten, indem man als seine Begrenzung den schwarzen Kreis ins Auge faſst, immer genau so groſs ist, als es ohne Beugung der Fall seyn würde, und daſs der Schatten sich da endigt, wo der Halbmesser der Scheibe mit dem Abstande der Tafel dividirt gleich wird der Tangente des halben Sonnendurchmessers, ganz so, wie es dem geraden Fortgange der Lichtstrahlen gemäſs ist; aber obgleich diese richtige Grenze des Schattens kenntlich bleibt, so ist doch das Innere des Schattens durch gebeugte Strahlen erhellet. Eine andere Reihe von Versuchen zeigt, daſs die Oberfläche und die innere Beschaffenheit der Körper keinen Unterschied machen, indem polirte und matt geschliffene Metalle, Kugeln von Holz, Metall oder Harzen, Scheiben von verschiedenen Metallen und Tropfen Quecksilber oder Dinte, zwischen Gläsern platt gedrückt, gleiche Erscheinungen geben. Eben so gleich blieben die Erscheinungen, wenn man Metall-

scheiben zwischen ebne Glasplatten legte und sie bald mit Luft, bald mit Wasser, bald mit Weingeist umgeben beobachtete. Auch ungleiche Temperatur hatte keinen Einfluſs, sondern kalte Eisenkugeln und Eisenkugeln bis zum Glühen erhitzt zeigten gleiche Erscheinungen des Schattens, wenn man nur bei den letzteren den Luftzug, welchen heiſse Körper bekanntlich neben sich veranlassen, durch Verschlieſsen in Glasgefäſse hinderte.

Den Einfluſs, welchen das Annähern eines zweiten schattenwerfenden Körpers hat, zeigt Flaugergues auf folgende Weise. Wenn die hinter der Kugel aufgestellte weiſse Fläche so entfernt ist, daſs der Schatten in der Mitte erhellet und nur von einem dunkeln Rande umgeben erscheint, so bringe man einen andern dunkeln Körper näher bei der den Schatten auffangenden Ebne in den Schattenkegel, und dieser wirft einen sehr kenntlichen Schatten auf jenen Schatten; ist aber dieser zweite dunkle Körper mehr als einige Zolle von der Ebene entfernt, so ist der Schatten nicht mehr kenntlich. Wenn man das Auge selbst (am besten gedeckt durch ein Verdunkelungsglas, um den Glanz zu ertragen) in den Schattenkegel hinter der Kugel bringt, so sieht man diese von einem leuchtenden Ringe umgeben, der immer glänzender wird, je mehr das Auge sich der Spitze des Schattenkegels nähert. Dieses vom Rande der Kugel in den Schatten hereingebeugte Licht ist auch die Ursache des Schattens, den man von einem zweiten Körper geworfen sieht, obgleich er im Schatten des ersten ist *). Wenn man im Schattenkegel das Auge so bewegt, daſs es der Grenze des Schattenkegels nahe kommt, so sieht man den Rand der Kugel da, wo der Sonnenrand zu erscheinen im Begriff ist, abgeplattet, welches daher kommt, weil die gebeugten Strahlen in einer Richtung, wie AB, zum Auge kommen und daher dem Auge in B, wenn es sich in der Spitze des Kegels der gebeugten Strahlen befindet, den Sonnenrand nach der Richtung BA zu suchen Veranlassung geben; rückt das Auge nach C oder c, so sieht es den wahren Sonnenrand nach CA und es ist so, als ob der Rand der Kugel ungefähr nach D zurückgerückt wäre,

Fig. 150.

*) Hiergegen findet indeſs von Göthe's Einwurf statt, daſs man nicht immer auf das von den Seiten her einfallende, vom hellen Himmel herkommende Licht genug Rücksicht genommen habe; und in der That macht dieses alle im freien Sonnenlichte angestellte Versuche weniger brauchbar.

oder als ob an der Stelle, wo der wahre Sonnenrand hervortritt, der Halbmesser der Kugel vermindert wäre. Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich auch, wenn man nach einem Kerzenlichte oder andern hellen Gegenstande am Rande eines dunkeln Körpers hin blickt.

Im dunkeln Zimmer wiederholte Flaugergues die von Newton und andern angestellten Versuche, zeigt aber genauer als die frühern Beobachter, wie die Erscheinungen sich ändern, wenn der schattenwerfende Körper sehr schmal ist. Eine mit Rufs geschwärzte Messingplatte ward dem Sonnenstrahle im dunkeln Zimmer ausgesetzt und hier fand sich nun der eigentliche Schatten so breit, als er nach den Gesetzen des geradlinigen Fortganges der Lichtstrahlen seyn mufste, aber an jeder Seite begleitet von drei oder vier Farbenstreifen, die dem Rande des Schattens parallel sind. Diese helleren Streifen haben Farbensäume, und zwar alle das Blau gegen den Schatten hin, das Gelb und Roth am andern Rande, aber diese Farben mit abnehmender Lebhaftigkeit beim zweiten, dritten und vierten Streifen, welche nämlich weiter von der Grenze des Schattens entfernt sind. Die hellen mit Farbensäumen versehenen Streifen sind in der Mitte weifs und lichtvoller, als das übrige directe Sonnenlicht; fängt man das Licht auf einer hinreichend schief geneigten Tafel auf, so erkennt man in dem Weifs die ganze Farbenfolge. Wenn die den Schatten auffangende Tafel nahe hinter der Platte stand, so war der Schatten scharf abgeschnitten, aber bei gröfserer Entfernung erhellten sich die Ränder des Schattens und wurden einem Halbschatten ähnlich; bei erheblich grofser Breite der Platte erreichte diese Erhellung der Ränder noch nicht die Mitte.

Wurde der einfallende Strahl durch ein Prisma in Farbenstrahlen zerlegt, und ein 3 Linien breites Kupferblech in diese Farbenstrahlen gehalten, so zeigten sich ebenfalls drei dem Rande des Schattens parallele Streifen, ebenso gefärbt, wie das auffallende Licht es forderte, aber mit lebhafterer Färbung, als der Raum, wo die durch das Prisma gehenden Strahlen ungehindert auffielen. Wenn der Rand des Schattens die ungleichen Farbenstrahlen, die vom Prisma ausgingen, durchschnitt, so entfernten sich die im rothen Theile des prismatischen Farbenbildes erscheinenden Streifen etwas mehr, als die violetten, vom Rande des Schattens. Die Beugung wirkt also, wie schon

Newton es bemerkt hatte, stärker auf die rothen Strahlen, als auf die violetten; aber die Wiederholung derselben Farben, in den dreifachen und selbst mehrfachen Rändern, zeigt, daſs hier nicht eine stetige Wirkung statt findet, sondern daſs diese in gewissen Abständen sich ändert und in gröſseren Abständen wieder eintritt, und sich also in Hinsicht auf diese Wiederhoholungen (wie Flaugergues bemerkt) den *Newtonschen Anwandelungen* ähnlich zeigt.

Bei einem schmalen schattenwerfenden Körper waren nicht bloſs jene Streifen an dem äuſsern Rande des Schattens, sondern der Schatten selbst war seiner ganzen Länge nach in parallele farbige Streifen getheilt. Hatte ein solcher schmaler Körper, etwa $\frac{1}{2}$ Linie breit, die Form eines rechten Winkels oder eines groſsen Griechischen Gamma (Γ), so durchschnitten sich die äuſsern Farbenstreifen an der Seite, wo der Winkel von 90 Graden lag, an der andern Seite umgaben sie gekrümmt die Ecke des Schattens, der selbst ebenso wie ein schmaler, gerader Körper in farbige Streifen getheilt war; dabei zeigten sich an dieser Ecke dunkle Querstreifen, welche die hellen Ränder durchschnitten.

Um die Verschiedenheit der Erscheinungen bei einem breiteren und einem schmaleren Körper zu zeigen, wandte Flaugergues eine Platte an, welche die Gestalt eines gleichschenkligen Dreieckes hatte; die Grundlinie war $= 1'''$, 26, die Höhe $= 8'''$, 50; das Dreieck ward vertical mit der Spitze nach oben aufgestellt, 4 Fuſs von der Oeffnung im Laden, die weiſse Ebene stand 4 bis 5 Fuſs hinter jener. Hier zeigte sich an dem breiteren Theile, gegen die Basis zu, bloſs einige Erhellung innerhalb der Ränder des Schattens und colorirte Streifen auſserhalb. Da wo der Schatten schmäler wird, zeigen sich im Innern des Schattens an jeder Seite drei dunkle Streifen, die gegen die Spitze hin divergirend und immer lebhafter werden; weiter gegen die Spitze laufen die hellen Streifen in einander, so daſs der Schatten hier ganz verschwindet, ganz mit dem Lichte der gebeugten Strahlen bedeckt ist. Flaugergues zieht aus seiner Abmessung den Schluſs, daſs ein 0,7 Linien breiter Körper in jener Entfernung gar keinen eigentlichen Schatten mehr wirft, und führt einen eigenen Namen: Poikilogramm (poicilogramme, farbiger Fleck) ein, um diesen Raum eigenthümlich zu bezeichnen. Dieses Poikilogramm nannten Grimaldi und

Newton Schatten, und so fern hatten sie Recht, von einem Breiterwerden des Schattens zu reden. Eine Nadel giebt statt des Schattens einen gelben Streifen, begrenzt von zwei dunklern Linien. Damit diese Erscheinung entstehe, mufs der Körper sehr schmal seyn und beide Ränder zugleich einwirken können. Bringt man an einer Stelle eines so schmalen Körpers an der einen Seite ein angeklebtes Stück Papier oder eine andere schattenwerfende Materie an, so erhält man sogleich einen ordentlichen Schatten, und statt dafs der Rand des Poikilogramm's gerade war, ist nun der Rand des Schattens an der Stelle, welche dem angeklebten Stücke an der andern Seite entspricht, eingebogen, nicht mehr geradlinig zusammentreffend mit der Grenze der unvollkommenen Beschattung des schmalen Theils. Die Streifen, die im Innern des bunten Halbschattens (Poikilogramm's) entstehen, scheinen in der Nähe des breiteren Stückes sich einwärts zu beugen. Hieraus folgt also, dafs die Einwirkung eines nahe liegenden zweiten Randes oder der an einem zweiten Rande vorbeigehenden Strahlen nöthig ist, um die Farbenzerstreuung bei der Beugung hervorzubringen, statt dafs eine blofse Hineinbeugung aller Strahlen, eine matte Erhellung des Schattens an seinem Rande, statt findet, wenn bei einer breiten Platte nur *ein* Rand einwirkt. Diese zur Hervorbringung der Farbenstreifen nothwendige Einwirkung eines zweiten Randes, an welchem die Strahlen hinstreifen, zeigt sich noch auf eine andere Art. Hat man nämlich eine nicht sehr schmale Platte aufgestellt, bringt aber hinter dieser den Rand einer zweiten Platte, parallel dem Rande der erstern, so gegen die Grenze des Schattens heran, dafs die zweite innerhalb des von der erstern geworfenen Schattens in die gebeugten Strahlen eintritt, so bemerkt man, dafs aus den, bis dahin blofs den Schatten etwas erhellenden, Strahlen alsdann farbige Streifen hervorgehen, die also aus einer neuen Beugung und Zerlegung in Farbenstrahlen an der zweiten Platte entstehen. Flaugergues glaubt hieraus schliefsen zu dürfen, dafs man zwei Kräfte annehmen müsse, eine anziehende, wodurch die Strahlen in den Schatten hinein gebeugt werden und welche auf alle Farbenstrahlen gleichmäfsig wirke, also blofs matte Erleuchtung ohne Farben hervorbringe; eine zweite repulsive, durch welche die Strahlen sich von dem eigentlichen Schatten entfernen, und welche, stärker wirkend auf die am wenigsten brechbaren Strah-

len, die Farbenränder hervorbringe, zugleich aber, als nicht stetig wirkend, sondern in gewissen Entfernungen zu und wieder abnehmend, die Wiederholungen der Farben hervorbringe; eine Erklärung, die schwerlich als genügend angesehen werden kann.

So wie der letzte Versuch dienen sollte zu zeigen, wie die Erscheinungen sich ändern, wenn der schattenwerfende Körper sehr schmal ist, so sollten die folgenden Versuche den Einfluſs einer zweiten dunkeln Platte zeigen, wenn der Spalt zwischen beiden sehr eng ist. Es ward hierzu eine Vorrichtung mit zwei Stahlplatten, die in gerade geschliffene Schärfen sich endigten, angewandt. Diese Stahlplatten lassen sich vermittelst einer feinen Schraube einander so nähern, daſs der Spalt zwischen beiden sehr eng wird, und dabei kann man ihnen entweder die parallele Stellung lassen, oder auch der einen Platte mit Hülfe einer andern Schraube eine kleine Drehung geben, damit die Schärfe dieser Platte mit der Schärfe der andern einen kleinen Winkel mache. Diese beiden feinen Schärfen geben, wenn man sie parallel an einander bringt, Schatten, zwischen denen der durch die Sonnenstrahlen noch erleuchtete parallelogrammische Raum übrig bleibt, und die Grenzen der beiden Schatten sind nach auſsen, das heiſst, in das Innere des hellen Raumes hinein, mit Farbenstreifen umgeben. Rücken die Platten allmälig immer näher, so nähern sich jene Streifen einander und gehen bei noch gröſserer Nähe über einander hin, ohne sich zu vermischen, ja selbst in den entgegengesetzten Schatten gehen diese Farbenstreifen hinein und man sieht sie, mit dem Blau zunächst am Schatten, mit dem Roth am meisten davon entfernt, deutlich in beide Schatten eingerückt. Wenn die Schärfen bis auf etwa $\frac{1}{10}$ Zoll einander nahe gekommen sind, so sieht man allmälig in beide Schatten ein weiſses Licht sich verbreiten. Bei noch gröſserer Annäherung fährt zwar zuerst noch die Breite des erleuchteten Parallelogrammes fort abzunehmen; aber bei der
Fig. 151. Entfernung $= \frac{1}{4}$ Lin. hat es seine geringste Breite erreicht, und der erhellete Raum wird breiter, wenn die Schärfen noch mehr gegen einander zu rücken; bei $\frac{1}{30}$ Lin. Abstand fängt in der Mitte eine dunkle Linie an sichtbar zu werden. Sind die Schärfen gegen einander geneigt, so sieht man zuerst eine dreieckige, erhellte Fläche mit den oft erwähnten Rändern an der Auſsenseite jedes Schattens, die sich da, wo die Platten schon einander nahe kommen, durchkreuzen. Da sie unter sehr spitzem

Winkel einander begegnen, so entsteht an der Spitze ein dunkler Zwischenraum in der Mitte. Die hyperbolische Form der Streifen, die auch Flaugergues ausgemessen hat, will ich hier nicht noch einmal beschreiben, da sie mit Newton's Angaben übereinstimmen.

Nach ähnlichen Gesetzen, wie hier die Streifen sich erweitern, ändern sich auch die Erscheinungen, welche durch die Sonnenstrahlen hervorgebracht werden, die durch enge Löcher gehen. Läſst man dem Loche eine Weite von 3 bis 4 Lin., so ist der helle Kreis mit Farbenringen umgeben; wählt man Löcher von kleinerem Halbmesser, so gehen diese Farbenringe immer mehr nach der Mitte zu; bei noch engern Löchern vereinigen sie sich in der Mitte, und so wie man allmälig immer engere Löcher wählt, treten sie wieder aus der Mitte hervor, und gehen endlich in den Schatten über, statt daſs sie bei nicht so engen Löchern im Hellen erscheinen. Hierbei wird ein immer gleicher Abstand der das Bild auffangenden Tafel vorausgesetzt.

Dieses ist der Inhalt der Abhandlung von Flaugergues, den ich, weil seine Versuche sich so leicht nachmachen lassen und so viel belehrende Mannigfaltigkeit darbieten, etwas genauer angegeben habe.

Was von Göthe über die Beugung sagt [1], fügt zu dem Bisherigen nur wenig Neues hinzu. Seine Versuche sind meistens nur Wiederholungen der schon bekannten, und obgleich die Bemerkung, daſs man auf das Ausgehen von Lichtstrahlen von dem die Sonne umgebenden hellen Himmel Rücksicht nehmen muſs, wahr ist, so erklärt doch weder diese Bemerkung, noch das Hervorbringen der Doppelschatten durch zwei Lichter die mehrfachen Farbenringe, und im finstern Zimmer verliert jene Bemerkung ganz ihren Werth. Daſs die farbigen Sonnenbilder an Metallsaiten, an Spinnenfäden u. s. w. hierher gehören, hat von Göthe richtig bemerkt. Ich werde auf diese Erscheinungen später zurückkommen.

Zu den wichtigern Beobachtungen, die zu einer wahren Erweiterung des Vorigen dienen, gehören dagegen Biot's Versuche, die er mit Pouillet vereinigt anstellte [2]. Biot fängt seine Betrachtungen mit einer Bemerkung an, die hier einen Platz fin-

1 Farbenlehre I. 164.

2 Biot Traité de phys. IV. p. 743.

den mag, weil sie zugleich angiebt, wie wenig im finstern Zimmer der Halbschatten das Entstehen der Beugungsphänomene erklärt. Wenn man in das dunkle Zimmer das Licht durch eine Oeffnung von 1 Lin. Durchmesser einläſst, und in 10 oder 12 Fuſs Entfernung eine Platte mit einer sehr kleinen Oeffnung, etwa einem bloſsen Nadelstiche, aufstellt, so ist der ganze auf diese letztere Oeffnung fallende Strahlenkegel so schmal und zugleich so bestimmt, daſs man seine dem geradlinigen Fortgange des Lichtes entsprechenden Grenzen ganz genau angeben kann; der erleuchtete Kreis aber, den das durch diese Oeffnung gehende Licht auf einer dahinter gehaltenen Tafel darstellt, ist gröſser, als es diese Bestimmung erlaubt. Daſs aber diese Aenderung in der Richtung der Lichtstrahlen bei dem Durchgange durch die kleine Oeffnung selbst statt findet, erkennt man theils daran, daſs die Farbenränder, die sich in bedeutendem Abstande hinter der Oeffnung vergröſsert zeigen, schon gleich hinter der Oeffnung und zwar so verkleinert, wie es dem Ausgehen der Lichtstrahlen von der Oeffnung gemäſs ist, sich zeigen, theils erkennt man es an den Farbenringen, mit welchen man, beim Hindurchsehen durch diese kleine Oeffnung, die gröſsere Oeffnung umgeben sieht.

Einen Hauptgegenstand von Biot's und Pouillet's Untersuchungen machten die Abmessungen der Farbenränder, so wie sie bei verschiedenfarbigem Lichte erscheinen, aus. Nachdem sie die Versuche, die ich als von Flaugergues schon angestellt erzählt habe, gleichfalls angestellt hatten, wo zwei feine geschärfte Stahlplatten nahe an einander gerückt wurden, und wobei sich dann die verschiedenen Erscheinungen den ungleichen Abständen gemäſs darstellten, gingen sie zu folgenden Versuchen über, die ich umständlich mittheilen muſs.

Der Sonnenstrahl wurde in das finstre Zimmer durch eine Oeffnung von nur 1 Millimeter Durchmesser eingelassen, durch ein in diesen Lichtstrahl gestelltes Prisma wurde das Licht in Farbenstrahlen zerlegt und ein Farbenstrahl nach dem andern auf jenen engen Spalt des Instruments geworfen, an dessen feinen Schärfen die Beugung statt finden sollte; die durch diesen Spalt gegangenen Lichtstrahlen wurden auf einer an der Hinterseite matt geschliffenen Glasscheibe in groſser Entfernung aufgefangen. Die Farbenstreifen, welche so entstanden, und die hier einfarbig, der Farbe des auffallenden Lichtes gemäſs, erschie-

Fig. 152.

nen, waren durch vollkommen schwarze Zwischenräume getrennt, und man sah eine große Zahl solcher Streifen an beiden Seiten des Mittelstreifes, indem das matt geschliffene Glas sie ungemein gut wahrzunehmen erlaubte. Ihr Licht nahm mit der Entfernung von der Mitte ab, so dafs die letzten immer minder deutlich wurden. Jeder einzelne dieser hellen Farbenstreifen erschien gleich breit und ebenso auch jeder der dunkeln Streifen, nur wenn die zum Einlassen des Lichtes bestimmte Oeffnung erheblich erweitert wurde, nahmen die schwarzen Streifen, wegen eines dann mehr ausgebreiteten Lichtkegels und Halbschattens, ab, aber die Mitte jedes Streifens blieb, bei Anwendung desselben Farbenstrahles, genau an derselben Stelle. Die Abstände der einzelnen Streifen von der Mitte wurden abgemessen und zwar bei jeder Farbe anders, aber doch immer so gefunden, dafs der Abstand des zweiten dunkeln Streifes von der Mitte gleich dem Doppelten, der Abstand des dritten dunkeln Streifes gleich dem Dreifachen u. s. w. des beim ersten stattfindenden Abstandes war, die hellen Streifen aber dazwischen genau in der Mitte lagen. Nennt man nämlich die Entfernung von der Mitte der ganzen Erscheinung bis zur Mitte des ersten dunkeln Streifes = 4 e, so war die Entfernung von jener Mitte bis zur Mitte des zweiten dunkeln Streifes = 8 e, bis zur Mitte des dritten = 12 e, bis zur Mitte des vierten = 16 e; dagegen bis zur Mitte des ersten hellen Streifes = 6 e, bis zur Mitte des zweiten hellen Streifes = 10 e, bis zur Mitte des dritten = 14 e, und so ferner. In dieser Ordnung zeigen sich die Streifen und ebenso auch die das Bild einer runden Oeffnung umgebenden Ringe bei jedem auf die Oeffnung fallenden einfachen Farbenstrahle; aber der Werth von e ist nicht für alle Farbenstrahlen einerlei, das heifst, die Gröfse aller Ringe oder die Gröfse der Abstände jener parallelen Streifen ist bei verschiedenen Farben anders. Hat man für den äufsersten rothen Strahl den Halbmesser irgend eines Ringes = 1 gefunden, so findet man = 0,9243 für die Grenze des Roth und Orange, = 0,8855 für die Grenze des Orange und Gelb; endlich = 0,6300 für die äufsersten violetten Strahlen. Diese Zahlen stimmen aber mit den Anwandlungen ganz genau überein, und es ergiebt sich daher das Gesetz: dafs die Entfernung der farbigen Streifen oder Ringe von der Grenze, die der gerade fortgehende Lichtstrahl angeben würde, genau proportional ist der Länge der Anwandlungen der einzelnen Farben. Diese Länge der Anwandelungen wird näm-

Fig. 153.

lich durch die Dicke der Luftschichten an den Stellen, wo sich in den Newtonschen Farbenringen der Ring irgend einer Ordnung im Roth, Orange, Gelb u. s. w. zeigt, bestimmt, und diese Dicken sind für die äufserste Grenze des Roth, für die Grenze des Roth und Orange, für die Grenze des Orange und Gelb, für das äufserste Violett

6,35 ; 5,85 ; 5,60 ; 4,00,

und diese Zahlen verhalten sich wie

1,000 ; 0,921 ; 0,882 ; 0,630[1].

Die Beugungen hängen, wie schon s'Gravesande und nachher mit noch mehr Sorgfalt Flaugergues gezeigt haben, nicht von der Natur der Körper ab, an welchen das Licht hinstreicht, sondern bei gleichen Abständen der Ränder von einander bleiben die Erscheinungen der Beugung ungeändert; dieses stimmt ebenfalls mit der Natur der Accesse überein, welche bei senkrechtem Durchgange des Strahles durch ein Medium blofs von der Beschaffenheit dieses Medii abhängen. An diese Betrachtung knüpft sich aber die zweite, dafs, so wie die Länge der Accesse eine andere ist, in einem anderen Mittel, so auch die Beugung eine andere seyn müsse, wenn sich jene scharfen Kanten nicht in der Luft, sondern in einem andern Medio befinden. Schon Newton hatte, um den Einflufs verschiedener Mittel zu bestimmen, ein Haar zwischen Gläsern mit Wasser umgeben und die Farbenringe ebenso gefunden, wie sie sich zeigten, als das Haar sich in der Luft befand. Biot und Pouillet stellten diesen Versuch so an, dafs sie den Apparat mit dem schmalen Spalt in ein kleines Wassergefäfs setzten, dessen Wände aus parallelen Glasplatten, 2 Centimeter von einander entfernt, bestanden; auch hier zeigten sich die Farbenstreifen, wenn man sie entfernt von jenem Gefäfse auf einer Tafel auffing, genau gleich, es mochte sich der enge Spalt im Wasser oder in der Luft befinden. Dieser Erfolg zeigt also, dafs die Ablenkung bei der Beugung in den verschiedenen durchsichtigen Mitteln so geändert wird, dafs die nachherige Brechung beim Hervordringen in die Luft diese Aenderung genau compensirt. Nach den Regeln, die sich für die Gröfse der Anwandlungen in verschiedenen Mitteln ergeben, ist die Länge der Anwandlungen dem Brechungs-Exponenten proportional[2]; ebenso sollte also auch hier

1 Vergl. Art. *Anwandlungen*. Th. I. S. 312. 2 Th. I. S. 316.

die Ablenkung beim Wasser = 0,77 e seyn, wenn sie = e in der Luft ist; aber der unter diesem Winkel vom Einfallslothe auf die Fläche, wo der Strahl in die Luft eintritt, abweichende Strahl geht unter dem Winkel = e geneigt in der Luft fort, und die Erscheinungen nach dem Hervordringen in die Luft bleiben also ganz ungeändert. Um indeſs die in dem andern Mittel eintretenden Aenderungen wahrzunehmen, ehe der Strahl in die Luft übergeht, und jenes wichtige Gesetz, daſs sich die Beugung wirklich dem Brechungsverhältnisse gemäſs ändere, deutlich zu bestätigen, wurde ein 2 Meter langes Gefäſs genommen, um darin jene beiden den engen Spalt bildenden Schärfen einzutauchen, und dieses ward am Ende mit einem matt geschliffenen Glase geschlossen. Das Gefäſs muſste eine bedeutende Länge haben, damit das matt geschliffene Glas, auf welchem die Farben sich zeigen sollten, denjenigen Abstand habe, in welchem sich schon alle Farbenstreifen gehörig darstellen. Der Versuch wurde zuerst angestellt, wenn das Gefäſs bloſs mit Luft gefüllt war, die Farbenstreifen wurden genau abgemessen und dann das Gefäſs mit Wasser gefüllt. In der That nahmen die Abstände der Streifen ab und wurden $\frac{3}{4}$ dessen, was sie vorhin waren, ganz so, wie es das Verhältniſs der Brechung fordert. Eben der Versuch ward so wiederholt, daſs die den Spalt bildenden Flächen von Crownglas waren, eingetaucht in Terpentinöl, welches fast eben so stark als Glas bricht; aber auch da bestätigte sich dasselbe Gesetz, daſs die Ablenkungen den Accessen, so wie sie in diesem Medio seyn müssen, gemäſs sind.

Ich habe wohl nicht nöthig, bei den Schlüssen zu verweilen, welche Biot hieran knüpft; denn wenn die Abweichung der Strahlen bei der Beugung so bestimmten Regeln folgt, so ist es klar, daſs man da, wo gemischte Farbenstrahlen auffallen, den Ort bestimmen kann, wo der Farbenstreif der einen Farbe, und den Ort, wo der Farbenstreif der andern Farbe hinfällt, daſs man also auch die Mischungen von Farben angeben kann, die da entstehen, wo eine Erleuchtung von beiden Farben zugleich statt findet. Ist das auffallende Licht ein weiſses Licht, so zeigt sich in der Mitte Weiſs, weil alle Farbenstrahlen dort Licht hin gelangen lassen; dieses Weiſs ist mit Roth umgrenzt, weil das Roth sich weiter erstreckt, als alle andern einzeln auffallenden Farben, oder weil der Abstand des ersten dunkeln Streifs für das Roth gröſser ist, als für die übrigen. Aber da

wo das Dunkel zwischen den rothen Farbenstreifen erscheinen würde, wenn das rothe Licht allein auffiele, da fallen schon die Grenzen des zweiten violetten und dann des blauen Streifes hin, die sich daher sogleich an dem ersten Roth zeigen; und so kann man die Entstehung aller sich dicht an einander wiederholenden Farbenstreifen bestimmen, die eine genau den Newton'schen Farbenringen entsprechende Erscheinung darbieten. Die Uebereinstimmung würde, wie Biot bemerkt, ganz vollkommen seyn, wenn die Intensität der einzelnen Farbenstreifen eben die wäre, wie bei den Newton'schen Farbenringen; da aber hier die von der Mitte entferntern Streifen weniger Intensität haben, so ist ihr Einfluſs bei dem Aufeinanderfallen der Farben verschiedener Ordnungen schwächer.

Zu den bisher angeführten Versuchen, die alle die Streifen auf einer in beträchtlicher Entfernung aufgestellten Tafel betreffen, fügten Biot und Pouillet noch eine zweite Reihe hinzu. Wenn man die Tafel, auf welcher die Farbenstreifen sich darstellen sollen, weit genug von der Oeffnung entfernt, so daſs die sämmtlichen Farbenstreifen sich schon alle deutlich entwikkelt haben, so verändert ein noch weiteres Entfernen der Tafel nur die Dimensionen der Ringe oder Streifen, aber ihre Anordnung bleibt dieselbe; nähert man dagegen die Tafel der Oeffnung, so lernt man genauer die Bildung der Farbenstreifen kennen, und nähert sich der Bestimmung des Weges der sie bildenden Strahlen.

Bei den folgenden Versuchen wurde der Lichtstrahl durch eine Oeffnung von 1 Millimeter in das dunkle Zimmer gelassen, dann wurde er durch ein vertical stehendes Prisma gebrochen und die gebrochenen Farbenstrahlen auf den Spalt jenes sehr entfernt stehenden Instruments mit zwei scharfen Kanten geworfen, wobei man durch Drehung des Prisma's jede einzelne Farbe auf den Spalt bringen konnte. Die mattgeschliffene Glastafel war an einem langen Lineale so befestigt, daſs man sie auf alle bestimmten Entfernungen stellen konnte. Hier ergab sich nun Folgendes. Dem Spalte wurde eine Oeffnung von 1 Millimeter gegeben und fast die äuſsersten rothen Strahlen auf denselben gelenkt. Stand nun die matt geschliffene Glasplatte in 2 Millimeter Entfernung, so sah man, selbst mit einer starken Loupe, nur einen gleichförmig erhellten Streifen, 1 Millimeter breit, mit scharf abgeschnittenem Schatten; entfernte man aber allmä-

lig das matt geschliffene Glas, so sah man das Licht an den Seiten lebhafter werden, während der innerhalb an diesen Rändern anliegende Theil etwas von seinem Glanze verlor; bei 32,6 Millimeter Entfernung sieht man an jeder Grenze des erleuchteten Rechtecks (nämlich an den Grenzen, die durch die Schatten beider Schärfen hervorgebracht werden) eine helle Linie, an welcher sich innerhalb eine dunkle Linie zeigt; beide sind der Grenze des Schattens parallel; der zwischenliegende erleuchtete Raum erscheint noch gleichförmig hell. Entfernt man die Glasplatte noch etwas mehr, so sieht man unter dem einfachen Vergröſserungsglase diesen Raum gestreift, mit einer Menge höchst feiner dunkler Linien gefüllt, die durch sehr zarte glänzende Linien von einander getrennt sind, und deren Helligkeit, beträchtlich geringer, als die der ersten hellen Linien am Rande, sich gegen die Mitte zu vermindern scheint. Läſst man die Entfernung abermals zunehmen, so sieht man die hellen und glänzenden Linien an Zahl abnehmen, wobei aber die Breite der noch übrig bleibenden gröſser und kenntlicher wird. Ist man so fortgerückt, so kommt man zu einer Stelle, wo man diese Streifen zählen kann, z. B. bei dem hier erzählten Versuche waren es 5 helle und 4 dunkle in dem Raume eines Millimeters, indem die Mitte hell war; entfernt man die mattgeschliffene auffangende Glastafel aber etwas weiter, so gehen die beiden dunkeln, die der Mitte am nächsten waren, zusammen, und der helle Streif ist aus der Mitte verschwunden, so daſs man nur noch 4 helle und 3 dunkle Streifen hat; dieses war deutlich eingetreten bei 91,8 Millimeter Entfernung, wo der ganze erleuchtete Raum noch immer 1 Millimeter breit und in sieben ziemlich gleiche Streifen zerlegt schien. Bei einer noch gröſsern Entfernung werden die dunkeln und hellen Linien wieder unbestimmter; aber wenn man in dieser anscheinenden Verwirrung die Veränderungen des mittlern Streifens genau beobachtet, so sieht man ihn allmälig schmaler werden, die hellen Streifen, die ihn begrenzten, nähern sich einander, decken dann einander, so daſs nur zwei schwarze und drei helle Streifen übrig bleiben, wenn die Glasplatte bis zu 134 Millimeter weggerückt ist. Ebenso vermindert wieder, bei noch gröſserer Entfernung der Glasplatte, der helle Mittelstreif seine Breite, die ihn begrenzenden schwarzen Streifen gehen zusammen und decken sich, wenn der Abstand 197 Millimeter beträgt, so daſs dann nur ein dunkler

Mittelstreif mit zwei hellen Streifen in dem noch immer 1 Millimeter breiten Raume übrig bleiben. Endlich bei noch gröfserer Entfernung vereinigen sich die zwei hellen Streifen und der ganze 1 Millimeter breite Raum ist ganz erleuchtet. Aber wenn man die Tafel abermals weiter entfernt, so fangen die Streifen, durch einander hindurch gehend, an, sich in den entgegengesetzten Schatten hinein auszubreiten, und je weiter man die Glastafel entfernt, desto breiter wird der nicht mehr von dunkeln Linien unterbrochene helle Raum in der Mitte, welcher also durch zwei von jeder der beiden Schärfen sich ausbreitende und durch einander hindurch gehende Lichtstrahlen gebildet zu werden scheint.
Fig. 154. Die Figur stellt dar, wie Biot sich hiernach den Gang der Strahlen glaubte vorstellen zu müssen, und sie zeigt allerdings leicht den Ort, wo 6 dunkle, wo 5 dunkle, 4 dunkle, 3 dunkle Zwischenräume u. s. w. sichtbar sind. Man erkennt auch in dieser Figur, wie aufserhalb des mittlern Raumes Farbenstreifen mit dunkeln Streifen abwechselnd entstehn. Sobald nämlich der von der rechts liegenden Schärfe am entferntesten ausgehende dunkle Streif über die Grenze jenes Raumes hinaus fällt, sobald der erste helle Streif, der zweite dunkle und so ferner diesen Platz erreichen, so zeigen sich diese als Farbenstreifen aufserhalb jenes mittlern Raumes. Hiernach schien es, als ob man sich den ganzen Weg der Lichtstrahlen, die senkrecht in den engen Spalt eintreten, so denken könne, als ob diese Lichtstrahlen sich in eine Menge kleiner Strahlen theilten, so als ob sich das Licht in diesen kleinen, getrennten Strahlen verdichtet, in den zwischenliegenden Räumen dagegen verdünnt hätte; diese Verdichtung müfste in der gröfsten Nähe an der Schärfe, an welcher der Lichtstrahl vorbeigeht, am stärksten und die Ablenkung geringer seyn, als weiter nach der Mitte des Spaltes. In Rücksicht dieser Ablenkung glaubt Biot folgende Gesetze feststellen zu können *). Der unmittelbar an dem festen Körper selbst vorbeigehende Lichtstrahl ist gar nicht abgelenkt, und deshalb ist der Schatten so strenge auf gleicher Breite mit dem Spalt begrenzt, so lange die Strahlen, welche Abwechselungen von Hell und Dunkel bilden, noch nicht alle aus diesem Raume

*) Und diese Gesetze, wenn sie auch den Gang der gebeugten Strahlen selbst nicht angeben, zeigen doch den Ort der dunkeln und hellen Linien an.

hervorgegangen sind. Neben diesem ersten Lichtstrahle, dessen entferntere Theile ein wenig abgelenkt sind, liegt der erste Raum verdünnten Lichtes, der zweite mehr abgelenkte, aber mattere Strahl verdichteten Lichtes grenzt hieran, u. s. w. Das Uebrige erläutert die Zeichnung zureichend, und was hier für *eine* Art von Farbenstrahlen gezeichnet ist, das fände für jede einzelne Art Farbenstrahlen statt, nur mit einer mindern Abweichung für die, welche brechbarer sind.

Noch eine geometrische Bestimmung war bei diesen Versuchen zu erhalten, nämlich wie die Ablenkung des ersten, fast ohne merklichen Abstand von der Schärfe des Seitenrandes ausgehenden, dunkeln Raumes, des ersten Strahles verdünnten Lichtes, wie Biot es nennt, sich ändert mit der Weite des Spaltes; dazu diente nämlich die Abmessung des Abstandes, bei welchem der erste dunkle Streif die Mitte des erhellten Raumes erreichte. Hieraus ergiebt sich

bei einer Weite des Spaltes =	0,25 Millim. Ablenk. =	35′. 49″.
	0,50	18. 41.
	0,75	10. 44.
	1,00	6. 3.
	1,25	5. 19.
	1,50	4. 28.
	1,75	3. 16.
	2,00	3. 13.

Jene Abweichung des ersten, die dunkeln Zwischenräume hervorbringenden, Strahles hängt also, obgleich dieser Strahl in einer ungemeinen Nähe an der einen Schärfe vorbei, gleichsam von der Oberfläche dieser Schärfe selbst ausgeht, dennoch von dem Abstande der zweiten Schärfe ab; und eben diese Abhängigkeit mufs daher bei allen statt finden, da, wie wir gesehen haben, die Lage aller dunkeln Zwischenräume in regelmäfsiger Anordnung sich gleichmäfsig bei allen erweitert oder verengert. Wenn man den beiden letzten Angaben für $1\frac{3}{4}$ und 2 Millimeter trauen kann, wo die so wenig gegen einander geneigte Richtung beider Strahlen keine strenge Bestimmung erlaubt, so scheint die Ablenkung sich einer Grenze zu nähern, welche als diejenige anzusehen wäre, die selbst bei völliger Abwesenheit einer zweiten Schärfe blofs als dem Rande des einen Körpers angehörend müfste angesehen werden.

Auf dieser bei gröfserer Weite des Spaltes geringer wer-

denden Ablenkung beruht es, dafs man auf einer sehr entfernt vom Spalte aufgestellten Tafel, wenn der Spalt sehr eng ist, die Farbenstreifen so weit aus einander treten sieht, dafs sie bei gröfserer Erweiterung des Spaltes sich gegen die Mitte zusammendrängen und endlich einer nach dem andern in den mittlern erhellten Raum hineingehen. Dafs darin zugleich auch die Erscheinung hyperbolisch gekrümmter Streifen bei einem gegen das eine Ende hin verengerten Spalte mit begriffen ist, leuchtet von selbst ein.

Dafs auch die eine Seite des Spalts schon hinreiche, um für sich allein Lichtstreifen oder Farbenstreifen vermöge der Beugung hervorzubringen, und dafs diese sich daher an jeder Kante eines festen Körpers zeigen müsse, zeigt auch der Versuch im dunkeln Zimmer dadurch, dafs man die Ränder des Schattens aller dem Lichtstrahle ausgesetzten Körper mit Lichträndern umgeben sieht. Die abgelenkten oder gebeugten Lichtstrahlen gehen von der Kante abwärts und zeigen daher um den Schatten aufserhalb Lichtstreifen; aber da die Ablenkung in diesem Falle sehr geringe ist, so mufs man sich weit entfernen, um eine Folge von hellen Streifen deutlich zu sehen.

Die merkwürdigen Erscheinungen, die sich da zeigen, wo ein schmaler dunkler Körper das Licht auffängt, und wo die grofse Nähe einer zweiten Grenze des schattenwerfenden Körpers auf die Farbenstreifen an der ersten Kante einen grofsen Einflufs zeigt, hat Flaugergues vollständiger als Biot beobachtet und Letzterer versucht es nicht, diese Erscheinungen zu erklären. Fresnel und Young haben auf sie ganz vorzüglich ihre Aufmerksamkeit gerichtet.

Auch bei der Reflexion finden Farbenränder durch Diffraction statt. Ist eine schön polirte Fläche sehr schmal, oder giebt man ihr eine so schiefe Richtung, dafs sie nur in einem sehr schmalen Raume die Lichtstrahlen auffängt, so erleidet das zurückgeworfene Licht eben die Einwirkung, als ob es durch einen so schmalen Raum, wie die Zurückwerfungs-Ebne ihn angiebt, durchgelassen würde. Wäre ein so enger Spalt statt der zurückwerfenden Fläche da gewesen, so würde sich das durchgelassene Licht in einzelne Strahlen zerlegt haben, und desto mehr gegen die Mitte abgelenkt worden seyn, je mehr entfernt von den Rändern es vorbeiging. Ganz diesem entsprechend zeigt sich auch der reflectirte Strahl gebeugt. Auch

hier wird das einfarbige Licht, wenn die zurückwerfende Ebene mit parallelen Seiten begrenzt ist, Lichtlinien, den Rändern parallel, zeigen, und auch hier gehen die einzelnen Strahlen von der einen Seite durch die von der andern Seite kommenden, so daſs das Verschwinden eines Streifens nach dem andern bei zunehmender Entfernung wahrgenommen wird. Auch die Verschiedenheit bei ungleichen Farben tritt ganz ebenso ein, wie bei den durch einen engen Spalt durchgelassenen Strahlen; die Verhältnisse der Ablenkungen bei verschiedenfarbigen Strahlen scheinen ein wenig von dem Verhältnisse der Accesse abzuweichen, aber da diese selbst vom Einfallswinkel abhängen und dieser bei den Versuchen 85° betrug, so läſst sich dieses vermuthlich aus dieser Aenderung erklären. Da der aufgefangene Lichtbüschel sehr schmal seyn muſs, wenn die Erscheinungen sich zeigen sollen, so muſs man bei einer breiteren Spiegelfläche sie um so mehr gegen den Lichtstrahl neigen oder den vom Perpendikel an gerechneten Winkel um so mehr vergröſsern; und wenn die Zurückwerfung unter sehr schiefen Winkeln geschieht, so bringt jede kleine Aenderung des Winkels eine groſse Aenderung in den Erscheinungen der Farbenstrahlen hervor. Die bei einer solchen Reflexion hervorgebrachten Farbenränder scheinen aber darin von denen, die ein enger Spalt hervorbringt, abzuweichen, daſs auch bei einfarbigem Lichte die Abnahme der Intensität des Lichtes der auf einander folgenden Ränder bedeutender ist.

Joh. Tob. Mayer hat die Lehre von der Beugung des Lichtes ebenfalls durch einige neue Versuche bereichert. Ich werde den Inhalt seiner Abhandlung kürzer darstellen können, da sich Manches, als mit dem schon Erzählten übereinstimmend, leicht übersehen läſst [1].

Mayer beschreibt zuerst Versuche, wo ein dünner cylindrischer Körper den freien Sonnenstrahlen ausgesetzt und der Schatten in mehr oder minder groſser Entfernung aufgefangen wird, deren Resultat ganz mit den von Flaugergues beschriebenen Versuchen übereinstimmt. Bei der Beschreibung der Erscheinungen, die der Schatten eines etwa $\frac{1}{4}$ Linie dicken Cylinders, dem Sonnenstrahle im dunkeln Zimmer ausgesetzt, dar-

1 Comment. recent. societ. reg. Gotting. Vol. IV. Class. math. p. 49.

bietet, bemerkt Mayer, daſs, wenn die matt geschliffene Glastafel 12 Zolle weit entfernt war, der Schatten jenes Cylinders anfing weniger dunkel zu erscheinen, und das Mikroskop zeigte, daſs dieses durch eine Menge weiſser Lichtlinien, die der Axe des Schattens parallel mit dunklern Linien abwechselten, hervorgebracht wurde; bei 2 Fuſs Entfernung der Glasplatte zeigten sich die schwarzen und hellen Streifen schon dem bloſsen Auge, und man erkannte zwei schwarze den Schatten begrenzende Linien, daran zwei helle Linien im Innern des Schattens, an diese grenzten noch zwei dunkle Linien und dann ein heller Raum in der Mitte. Bei etwas vermehrtem Abstande zeigen sich die weiſsen Streifen als farbige, die schwarzen Grenzlinien des Schattens werden matter und flieſsen mit dem Weiſs zusammen, auſserhalb der Schattengrenze aber zeigen sich die oft erwähnten den Schatten umgebenden Farbenstreifen. Da bei dickeren Cylindern mehrere helle und dunkle Linien in dem Schatten vorhanden zu seyn schienen, die sich aber undeutlicher zeigten, so fand Mayer es besser, die Strahlen nicht auf ein matt geschliffenes Glas, sondern geradezu auf eine Linse von 2 bis 3 Zoll Brennweite fallen zu lassen; damit das Auge nicht geblendet werde, wurde es mit einem dunkeln Glase beschützt und dann zeigten sich bei richtiger Stellung der Linse sechs und mehr Streifen.

Die Versuche mit dem durch einen schmalen Spalt durchgelassenen Lichte bieten nichts Neues dar. Was die Ursachen der Erscheinungen betrifft, so glaubt Mayer, man könne zwar eine anziehende und eine abstoſsende Kraft als zugleich wirkend annehmen, aber es sey natürlicher anzunehmen, daſs einige Lichttheilchen aus einem mechanischen Grunde ohne eine eigentlich abstoſsende Kraft von ihrem Wege abgelenkt werden. So nämlich, wie bei dem Anstoſsen eines flüssigen Körpers an einen festen einige Theilchen ihre Richtung behalten, andere dagegen abgelenkt werden, so könnte es auch hier statt finden.

An diese Versuche und Erklärungen Mayer's schlieſse ich Parrot's Erklärung der Erscheinungen an [1]. Nach Parrot haben sie bloſs ihren Ursprung in der ungleichen Erwärmung des die Körper umgebenden Medii. Allerdings läſst sich wohl glauben, daſs allemal, und vorzüglich einem starken Lichte

1 Theoretische Physik. II. 224. G. LI. 247.

ausgesetzt, die Oberflächen der Körper wärmer, als die Luft, sind, und daſs sie daher eine verdünnte Atmosphäre um sich haben, die erst in etwas gröſsern Abständen zur gewöhnlichen Dichtigkeit der Luft übergeht; aber wenn wir auch davon absehen wollen, daſs diese Erwärmung doch wohl gewiſs an der Oberfläche einiger Körper gröſser, an der Oberfläche anderer kleiner, damit also die Stärke der Beugung von der Natur der Körper abhängig wäre, so scheinen auch die Phänomene nicht so einfach zu seyn, als sie nach dieser Hypothese seyn müſsten. Erstlich nämlich erhellet nicht, wie zu gleicher Zeit eine Ablenkung der Lichtstrahlen von der Grenze des Schattens und zugleich ein Hereinbeugen gegen den Schatten zu statt finden sollte, und zweitens erhellet noch weniger, wie man das Periodische, die Wiederholung mehrerer Farbenringe erklären soll [1].

Um die bisher beschriebenen Erscheinungen auch ohne verdunkeltes Zimmer selbst zu sehen, thut man am besten, am einen Ende einer Röhre von Pappe oder einem andern undurchsichtigen Körper eine Glaslinse von kleiner Brennweite so einsetzen zu lassen, daſs hier kein andres Licht eindringen kann. Die Röhre muſs aus mehreren Auszugröhren, nach Art eines Fernrohres, bestehen, und am andern Ende ein Ocular, eine Glaslinse von etwa 1 Zoll Brennweite, haben, um hier das Auge anzubringen. Will man sich begnügen, bloſs die Erscheinungen der Ränder um einen dunkeln Körper zu sehen, so hat man nichts weiter nöthig, als irgendwo in der Mitte der Röhre eine Nadel oder auch einen etwas breitern Körper anzubringen, das Rohr gegen die Sonne zu richten, damit das Licht durch die kleine Linse einfalle, und das Ocular zuerst bis so weit, daſs der Körper sich im Brennpuncte desselben befindet, zu nähern, dann aber allmälig die Ocularauszüge zu verlängern, um die Erscheinungen in verschiedenen Entfernungen von dem schattenwerfenden Körper wahrzunehmen. Man sieht dann die den dunkeln Körper auſserhalb umgebenden farbigen Lichtränder, die den Schatten umgeben, wenn man den Schatten auf einer Tafel

1 Länger bei dieser Theorie zu verweilen scheint jetzt unnöthig, da seit 1815, als PARROT schrieb, Umstände bei den Erscheinungen bekannt geworden sind, die sich nach dieser Theorie so wenig als nach den übrigen bisher angeführten erklären lassen.

auffängt; man sieht die im Innern eines schmalen Schattens sich darstellenden Farbenlinien, die hier als auf der Nadel selbst ihrer ganzen Länge nach erscheinen, und deren Zahl gröfser ist, wenn man das Auge der Nadel nahe bringt. Ist der Körper schmal genug, oder die Nadel zugespitzt, so sieht man den hellen Streif in der Mitte, so dafs die Nadel an der Spitze gespalten erscheint. Wenn man andere Erscheinungen beobachten will, so mufs man die Röhren so einrichten, dafs man in ihrer Mitte irgendwo die nöthigen Vorrichtungen, ohne fremdes Licht zuzulassen, anbringen, dabei aber die Ocularlinse nähern oder entfernen kann. Bringt man einen schmalen Spalt so an, dafs das einfallende Licht nur durch ihn zum Auge gelangt, so kann man bei allmäliger Entfernung des Oculars alle die von Biot beschriebenen Erscheinungen sehen, und thut am besten da anzufangen, wo der Spalt sich in dem Brennpuncte des Oculars befindet. Das Mayer'sch Inflexioskop ist von dieser Einrichtung nur darin verschieden, dafs es am einen Ende eine kleine Oeffnung zum Einlassen des Lichtes hat; eine Linse ist aber, wie Fresnel gezeigt hat, besser, um Lichtstrahlen fast genau von einem Puncte ausgehend zu erhalten.

Versuche, welche diese Erscheinungen auf die Theorie der Interferenzen zurückführen.

Dieses waren ungefähr die Kenntnisse, an welche Thom. Young, Fresnel, Arago und Fraunhofer diejenigen Beobachtungen und Schlüsse anknüpften, welche der ganzen Lehre von der Beugung des Lichtes ein andres Ansehn geben, und ich stelle diese Beobachtungen deshalb hier erst zusammen, obgleich Young weit früher als Biot seine Untersuchungen anstellte. Seine Abhandlungen sind aus den Jahren 1801, 1802, 1803 und enthalten Folgendes [1].

Young war durch mehrere Betrachtungen, die, so weit es nöthig ist, im Art. *Interferenz* angeführt werden, darauf geleitet, dafs zwei Lichtstrahlen, die sehr nahe nach einerlei Richtung fortgehen, bei ihrem Zusammentreffen nicht immer zur Verstärkung der Erleuchtung beitragen, sondern dafs unter ge-

1 Aus d. Phil. Transact. in Youngs lectures on natural philosophy. II. 613. abgedruckt.

wissen Umständen der eine den andern verstärkt, statt daſs in einem sehr nahen andern Puncte der eine Lichtstrahl die durch den andern bewirkte Erleuchtung zerstört, und daſs (welches die allerwichtigste Bemerkung ist) diese ungleiche Einwirkung nach der Ungleichheit der Wege beider Lichtstrahlen regelmäſsig abwechselnd eintritt. Er sieht dieses als die Folge einer Undulationsbewegung des Aethers an, welche sich wie der Schall fortpflanzt; diese bringt einen verstärkten Licht-Eindruck hervor, wenn der verdichtende Theil der einen Welle mit dem verdichtenden Theile der andern zusammenfällt und dann auch fortwährend eben dieses Zusammentreffen gleichartiger Wellentheile fortdauert; sie bringt dagegen keinen Licht-Eindruck hervor, wenn sie mit einer um eine halbe Wellenbreite später ankommenden Welle zusammentrifft, wo der verdichtende Theil der einen Welle mit dem verdünnenden Theile der andern, und umgekehrt, in demselben Puncte zusammentrifft. Gehen also an dem Rande einer Oeffnung oder überhaupt an der Kante eines festen Körpers Lichtstrahlen vorbei, die bei dem Antreffen eine von dieser Kante ausgehende Undulation hervorbringen, so treffen diese Wellen mit den gerade eintretenden Wellen zusammen, der Weg jener ist länger als der Weg dieser, und wenn AB genau um eine halbe Wellenbreite länger Fig. 155. als CB ist, so tritt in B eine Interferenz ein, und B ist dunkel; ist dagegen AD um eine ganze Wellenbreite länger als ED, so ist in D verstärktes Licht, und so muſs abwechselnd eine dunkle und eine helle, den Rand des Schattens umgebende, Linie sich zeigen. Etwas Aehnliches wird da statt finden, wo von zwei Seiten her Strahlen in den Schatten hineingebeugt mit einander zusammentreffen [1].

Die Versuche, welche Young anstellte [2], betrafen zunächst die Farbenstreifen, die sich in dem Schatten eines sehr schmalen dunkeln Körpers zeigen, daſs nämlich, auſser den den Schatten umgebenden Rändern, sich auch der ganze Schatten selbst in Farbenstreifen zerlegt zeigte, die an Zahl verschieden waren nach der Entfernung der den Schatten auffangenden Ebene. Aber hier faſste er den von Flaugergues zwar sorgfältig beobachteten, aber doch nicht gut erklärten Umstand auf,

1 p. 629. 635.

2 p. 639.

dafs die Farbenstreifen im Innern des Schattens sogleich verschwinden, wenn die am einen Rande des Körpers vorbeigegangenen Strahlen nicht mehr sich mit denen vereinigen, die am andern Rande vorbeigegangen sind. Flaugergues hatte schon bemerkt, dafs die streifige Erscheinung im Innern des Schattens sogleich in eine gleichförmige matte Erleuchtung durch hineinwärts gebeugte Strahlen überging, wenn man an die andere Seite des schmalen Körpers ein breiteres Stück Papier oder dergleichen anklebte. Young stellte einen Schirm bald vor bald hinter den einen Rand jenes schmalen Körpers, um die an ihm vorbeigehenden Strahlen nicht zu dem Orte des aufgefangenen Schattens gelangen zu lassen, und dieses hatte den sichern Erfolg, auch die dem andern Rande angehörenden, im Innern des Schattens liegenden Streifen zu zerstören. Wurde der kleine Schirm zwischen dem schattenwerfenden Körper und der den Schatten auffangenden Ebne aufgestellt, so mufste er hinreichend tief in den Schatten einrücken, um die schon so weit von diesem Rande nach Innen abgelenkten Strahlen wirklich aufzufangen.

Um die Meinung, dafs diese Wechsel dunkler und heller Linien wirklich aus dem angeführten Umstande zu erklären sind, zu bestätigen, stellte er Berechnungen an, um die Länge des von jedem Lichtstrahle durchlaufenen Weges zu bestimmen. Hier wurde aus der Voraussetzung, dafs der eine Lichtstrahl gerade fortginge, der andere von den Kanten des festen Körpers aus seinen Weg fortsetzte, berechnet, wie viel in dem Puncte, wo sie vereinigt auf der den Schatten auffangenden Tafel ankamen, die Differenz der Wege betrug. Aus Newton's Versuchen mit den zwei Messerschneiden findet sich diese Differenz für das Verschwinden zwischen 0,0000122 und 0,0000182 schwankend, woran offenbar die Schwierigkeit ganz genauer Messungen Schuld ist. Aus desselben Beobachtungen des Schattens eines Haares geht hervor, da das Haar $\frac{1}{280}$ Zoll breit war, 144 Zoll von der Oeffnung und 252 Zoll von der Tafel abstand, der Zwischenraum zwischen dem zweiten Paare heller Linien aber $\frac{4}{17}$ Zoll gefunden wurde, dafs das Viertel des Unterschiedes der Wege beider Lichtstrahlen = 0,0000143 Zoll betrug; das Viertel aber mufste hier genommen werden, wenn man die dem ersten Verschwinden entsprechende Differenz der Wege ausmitteln wollte, denn die erste helle Linie entspricht der dop-

pelten, die zweite helle Linie der vierfachen Differenz oder jene einer ganzen, diese zwei ganzen Wellenbreiten.

Bei YOUNG's eigenen Versuchen, die ich sogleich beide neben einander hersetze, war es der Schatten eines schmalen Gegenstandes, an welchem der Abstand vorzüglich des zweiten Paares der dunkeln äufsern Linien gemessen und $\frac{1}{2}$ der Differenz der bis dahin gehenden Wege berechnet wurde. Hier war: Breite des Gegenstandes = 0,434; = 0,083; Abstand des Gegenstandes von der Oeffnung = 125; = 32; Abstand der den Schatten auffangenden Ebne von der Oeffnung = 250; = 250; Abstand zwischen jenen beiden dunkeln Linien = 1,167; = 1,399; $\frac{1}{2}$ Differenz oder Unterschied der Wege bei dem ersten Verschwinden der Erleuchtung = 0,0000149; = 0,0000137. YOUNG glaubt, dafs diese Länge des Raumes, den man nach dem Vorigen gleich einer halben Lichtwelle angeben müfste, etwas zu grofs ist, wofür er den Grund aber nicht überzeugend angiebt.

Diese Erklärungen von YOUNG scheinen eine Zeit lang wenig beachtet worden zu seyn, wenigstens kannte FRESNEL sie nicht, als er die Versuche anstellte, die ich jetzt beschreiben will, und ARAGO, der ihn auf YOUNG's Bemerkungen aufmerksam machte, scheint doch auch erst um diese Zeit (1815) ernstlich auf sie Rücksicht genommen zu haben.

FRESNEL[1] bediente sich, auf ARAGO's Rath, um ein starkes, von einem einzigen Puncte ausgehendes Licht zu erhalten, eines in den Fensterladen des dunkeln Zimmers eingesetzten Convexglases von kurzer Brennweite, dessen Brennpunct die zur Bewirkung der Phänomene erforderlichen Lichtstrahlen aussendete; je kleiner dessen Brennweite ist, desto kleiner ist der Punct, in welchem sich das Bild der Sonne vereinigt, und desto besser kann man alle Versuche damit anstellen. Um die von dem Rande eines Gegenstandes ausgehenden Strahlen sogleich bei ihrem Ursprunge, recht nahe hinter dem schattenwerfenden Körper, zu beobachten, wandte auch FRESNEL zuerst eine matt geschliffene Glasscheibe an, auf welcher er durch eine einfache Linse die Farbenstreifen beobachtete; er fand aber bald, dafs diese Linse ihm nicht blofs die auf dem Glase aufgefangenen Streifen zeigte, sondern dafs er die Streifen ebenso

1 Ann. de Chim. et Phys. I. 239.

in der freien Luft fortgehend sah, und er überzeugte sich sodann vollständig, dafs die Loupe die Farbenstreifen genau so zeigt, wie sie in ihrem Brennpuncte wirklich vorhanden sind, oder wie sie sich dort, aufgefangen auf einer Ebne, darstellen würden *). So liefs sich also mit Hülfe der Loupe die Entstehung der Farbenstreifen noch genauer verfolgen, und es zeigte sich ganz deutlich, dafs die sie bildenden Strahlen vom Rande des Körpers, ohne einen irgend merklichen Abstand von demselben, ausgingen, indem man den Rand des Körpers, an welchem die Lichtstrahlen vorbeigehen, ganz rein sieht, wenn er sich im Brennpuncte der vor das Auge gehaltnen Linse befindet. Um dieses und um zugleich die Erscheinungen zu sehen, die sich nahe bei dem Körper darstellen, befestigte Fresnel die Linse selbst auf einer festen Unterlage und verband mit ihr ein schief durch ihren Brennpunct gehendes Haar, von dem also einige Theile näher bei der Linse als der Brennpunct, einige entfernter lagen, und da war nur der Theil, welcher im Brennpuncte lag, von Streifen frei, statt dafs beide diesseit oder jenseit der Brennweite liegenden Theile mit äufsern Streifen umgeben waren.

Um die Winkel zu finden, unter welchen die Strahlen, welche die Farbenstreifen bilden, von der geraden Linie der eigentlichen Schattenbegrenzung abweichen, wurde der Schat-

*) Da man sich durch eigne Erfahrung leicht von dem ganz genauen Uebereinstimmen der Erscheinungen auf einer Tafel und der durch die Linse gesehenen, wenn nämlich der Brennpunct der Linse da liegt, wo eben die Tafel lag, überzeugen kann, so will ich den theoretischen Grund nur kurz erwähnen. Die convexe Linse giebt auf dem Boden des Auges ein genaues Bild dessen, was sich im Brennpuncte der Linse befindet. Da nun die Streifen, welche auf dem Glase im Brennpuncte der Linse sich zeigen, durch zwei sich durchkreuzende Lichtstrahlen hervorgebracht werden, so stellt sich mit Hülfe der Linse auf der Netzhaut das deutliche Bild eben dieses dunkeln oder hellen Punctes dar. Man kann daher mit der Linse von der Kante an, wo das Phänomen seinen Ursprung hat, in allen Entfernungen die Erscheinung der Streifen im Schatten und am Schatten wahrnehmen; die Erscheinungen zeigen sich aber sehr viel glänzender, als auf einer Tafel, weil man durch die Linse das volle Licht der Farbenstreifen empfängt. Wenn man die Linse so nahe an die Kante des die Beugung bewirkenden Gegenstandes bringt, dafs der Brennpunct jenseits fällt, so treten eben die Erscheinungen ein, als wenn der Brennpunct eben so weit diesseits läge.

ten eines 1 Millimeter dicken Eisendrahtes auf einer 1 Meter entfernten Tafel aufgefangen, und bei einer Erleuchtung mit homogenem rothen Lichte der Zwischenraum zwischen den dunkeln Linien gemessen. Hier fand sich bei verschiedenen Abständen des Körpers von dem Licht aussendenden Puncte Folgendes:

Abstand Meter	Ablenkungswinkel für den ersten dunkeln Streifen	Ablenkungswinkel für den zweiten dunkeln Streifen
3,971	4′. 5″.	5′.58″.
1,991	4.48.	6. 35.
0,997	5. 9.	7. 31.
0,201	9.11.	13. 13.

Bei dem letzten Versuche war der dunkle Streif der ersten Ordnung 2′ 17″ breit. Uebrigens bemerkt Fresnel, dafs, wenn man, nach Newton's Meinung, die gebeugten Strahlen als schon in einiger Entfernung vom festen Körper vorbeigehend ansehen wollte, die Beobachtungen fordern würden, diese Entfernung 0,45 Millimeter (etwa $\frac{1}{5}$ Lin.) anzunehmen, welches gewifs zu grofs ist.

Ungleich wichtiger aber, als diese Abmessungen, erschien dem Beobachter die Bemerkung, dafs ein angesetztes Papierstückchen an der einen Seite des Metalldrahtes alle im Innern des Schattens entstehenden Streifen ganz aufhob, und er schlofs, ohne Young's Untersuchungen zu kennen, eben so wie dieser, dafs also diese im Innern des Schattens sichtbar werdenden Streifen von der Durchkreuzung der von beiden Rändern ausgehenden Strahlen abhängen müfsten, und so wie Young glaubte er nur nach dem Undulationssysteme diese Erscheinung erklären zu können. Wenn man den Körper von einem leuchtenden Puncte her sein Licht empfangen läfst, so gehen alle Undulationen von einer einzigen Quelle aus, und man kann die Puncte des zur Verstärkung und zur Schwächung geeigneten Zusammentreffens angeben. Zuerst nämlich mufs man die Undulationen als von dem Mittelpuncte S ausgehend, kreisförmig um diesen Punct Fig. 156. sich verbreitend und in gleichen Abständen, die man die Breite einer Welle nennen müfste, einander folgend zeichnen. Diese Wellen gelangen dahin nicht, wohin der Körper AB, dessen Mitte C ist, nach den gewöhnlichen Gesetzen der Optik seinen Schatten werfen würde. In der Figur sind die halben Wel-

lenbreiten gezeichnet, und die punctirten Linien können, nach der Analogie des Schalls zu reden, die kleinste Dichtigkeit, die ausgezogenen Linien die gröſste Dichtigkeit in jeder Welle angeben. Nimmt man nun an, daſs von den Grenzen des Körpers A, B neue Undulationen ausgehen, welche durch die um diese Mittelpuncte gezeichneten Kreise angegeben werden, so haben die Wellen dieser Undulationen, weil es dieselbe Art von Licht ist, dieselbe Wellenbreite, und es lassen sich nun sowohl die Durchschnittspuncte, wo entweder Verdichtung mit Verdichtung oder Verdünnung mit Verdünnung zusammentrifft, also wo eine Verstärkung des Lichtes eintritt, angeben, als diejenigen, wo Verdichtung mit Verdünnung, eben deswegen aber ein Verschwinden der Erleuchtung beobachtet werden muſs. In der, ganz nach Fresnel's Angabe gezeichneten, Figur stellen F′ F′, F² F² und F³ F³ die Hyperbeln vor, in welchen sich auſserhalb des Schattens die dunkeln Puncte befinden müssen; f′ f′, f² f² zeigen eben diese Orte der Interferenz innerhalb des Schattens an.

Hier sieht man nun sogleich, warum nahe bei dem Körper die Zahl der dunkeln Linien in dem Innern des Schattens gröſser ist, als wenn man sich weiter von dem schattenwerfenden Körper entfernt. Auf der Mitte des Schattens treffen die gleichartigen Undulationen zusammen, oder, um ohne alle Hypothese zu reden, hier sind die durchlaufenen Wege beider Lichtstrahlen gleich, und es ist daher in der Mitte des Schattens hell. In der ersten dunkeln Linie, rechts und links von der Mitte, ist die Differenz der Länge der Wege derjenigen bestimmten Gröſse gleich, welche allemal das gegenseitige Aufheben der Erleuchtung zur Folge hat, oder es fallen nach der Undulationstheorie die ungleichen Hälften der Wellen in diesen Puncten unaufhörlich auf einander. Wollte man die Orte der nächsten hellen Linie zeichnen, so müſste man die Puncte verbinden, wo die Differenz der Wege das Doppelte des Vorigen, nach der Undulationstheorie eine volle Wellenbreite ist, u. s. w.

Hat man einmal diesen Gedanken als wohl bewiesen aufgefaſst, daſs bei der Differenz $= e$; $= 3e$; $= 5e$ der Wege zweier zusammentreffender Lichtstrahlen eine Interferenz, ein Zerstören ihrer Wirkungen, bei der Differenz $= 2e$; $= 4e$; $= 6e$ dagegen eine Verstärkung der Wirkungen statt findet, so ist die Entstehung der Farben in diesen Lichtlinien und Schat-

tenlinien leicht zu erklären. Der Werth von e ist ungleich bei den ungleichfarbigen Strahlen, oder, mit den Worten der Hypothese, die Breite der Lichtwellen ist ungleich, am kleinsten bei den violetten, am gröſsten bei den rothen Strahlen, und daher zeigen sich die rothen Lichtstreifen als die breitesten, und bei auffallendem weiſsen Lichte muſs die Farbenfolge und die Farbenmischung so seyn, wie die Erfahrung sie zeigt. Daſs bei den äuſsern Farbenrändern nur so wenige Wiederholungen sichtbar werden, glaubt Fresnel mit daraus erklären zu müssen, daſs bei gröſserer Entfernung der vom Körper abwärts gehenden Strahlen diese sich sehr schwächen.

Einen zuerst nur aus der Beobachtung gefolgerten und in die Theorie übertragenen Umstand macht Fresnel hierbei bemerklich, nämlich daſs bei den von den Kanten des Körpers ausgehenden Undulationen eine halbe Undulation verloren geht. Die Zeichnung macht dieses dadurch kenntlich, daſs der erste über die Kante hinaus gehende Kreis, dessen Mittelpunct in S ist, ein punctirter, der erste von A als Mittelpunct gezogene Kreis ein ganz ausgezogener Kreis ist. Hierzu nöthigte die Beobachtung deshalb, weil sonst die Verstärkungspuncte genau in die gerade Begrenzungslinie des Schattens fallen würden.

Um die Orte der Interferenzen zu berechnen sey S der leuchtende Punct, A die Kante des festen Körpers, SA = a, AE sey = b und a + b der Abstand, in welchem man in F die Interferenz beobachtet, so ist für SP = x, PF = y, $x^2 + y^2 = (a+b)^2$, und für den um A gezeichneten Kreis Fig. 157.

$$(x-a)^2 + y^2 = (b+d)^2,$$

b + d nämlich, weil nach der eben erwähnten Voraussetzung eine halbe Wellenbreite = $\frac{1}{2}$d zugelegt werden muſs und die erste ungleichartige Welle also um d von jenem Rande entfernt ist. Daraus folgt für den Durchschnittspunct

$$y^2 = 2\left(\frac{a+b}{a}\right)(bd + \tfrac{1}{2}d^2) + \left(\frac{bd + \frac{1}{2}d^2}{a}\right)^2,$$

oder, wenn man mit Fresnel alle höhern Potenzen des ungemein kleinen d wegläſst, $y = \sqrt{\left(\frac{2b(a+b)d}{a}\right)}$.

Nach dieser Formel lieſs sich der Ort der dunkeln auſserhalb des Schattens erscheinenden Linien berechnen. Da die im weiſsen Lichte angestellten Messungen stets auf den Punct zwischen

dem ersten Roth und dem zweiten Violett gerichtet gewesen waren, so mufste auch der Werth von d dem gemäfs angenommen werden. Nun giebt NEWTON für seine Farbenringe beim Uebergange vom zweiten Roth zum dritten Violett $20\frac{1}{6}$ Milliontel des Zolls = 0,0005176 Millimeter als Dicke der diesem Ringe entsprechenden Luftschicht an, und diesen Werth mufs man = d in die Formel setzen *). Will man die zweite Schattenlinie haben, (oder bei weifsem Lichte die Trennungslinie der Farben der zweiten und dritten Ordnung) so mufs man 2 d statt d in die Formel setzen, und die Abstände von der wahren Schattengrenze verhalten sich also bei den äufsern dunkeln Linien, wie $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{4}$ u. s. w.

Nach dieser Formel vergleicht FRESNEL seine Beobachtungen mit der Theorie und findet bei einer Reihe von Beobachtungen Differenzen, die selten bis auf 0,15 Millimeter gehn, und nur in den Fällen, wo die gemessenen Gröfsen selbst ungemein klein wurden, bis auf mehr als $\frac{1}{10}$ ihres ganzen Werthes sich erheben. Ich übergehe diese und theile nur die Vergleichung mit, wo durch ein rothes Glas nur das rothe und orangefarbne Licht durchgelassen wurde. Dieses Licht konnte daher immer als genau einerlei angesehen werden. d wurde hier den Beobachtungen NEWTON's gemäfs = 0,000623 Millimeter für diesen Farbenstrahl gesetzt.

*) Im Artikel *Interferenz* wird gezeigt, warum die Dicke der Luftschicht für den ersten hellen Ring gleich dem Viertel einer Wellenbreite ist, darnach ist also die halbe Wellenbreite gleich der Dicke der Luftschicht an dem Orte des ersten dunkeln Ringes.

	Abstand des Fadens vom lenchtenden Puncte.	Abstand des Fadens vom Mikromet.	Ordnung der dunk. äuſsern Streifen.	Doppelter Abstand des Streifens von der geometrischen Schattengrenze. beobacht.	berechn.	Differenz
	Meter			Millimeter		Millim.
1	0,201	1,000	1	5,34	5,46	—0,12
2	0,201	1,000	2	7,69	7,72	—0,03
3	0,997	1,000	1	2,99	3,16	—0,17
4	0,997	1,000	2	4,37	4,47	—0,10
5	1,991	1,000	1	2,79	2,74	+ 0,05
6	1,991	1,000	2	3,83	3,87	—0,04
7	3,971	1,000	1	2,38	2,50	—0,12
8	3,971	1,000	2	3,47	3,53	—0,06
9	3,828	0,313	1	1,23	1,30	—0,07
10	3,828	0,313	2	1,83	1,84	—0,01
11	3,828	1,192	1	2,64	2,79	—0,15
12	3,828	1,192	2	3,89	3,95	—0,06
13	3,860	0,294	1	1,26	1,26	0,00
14	3,860	0,294	2	1,77	1,78	—0,01
15	3,860	1,125	1	2,59	2,69	—0,10
16	3,860	1,125	2	3,85	3,81	+ 0,04
17	5,935	1,015	1	2,47	2,43	+ 0,04
18	5,935	1,015	2	3,45	3,44	+ 0,01
19	5,935	1,015	3	4,16	4,21	—0,05
20	5,935	1,015	4	4,85	4,86	—0,01

Die letzten vier Beobachtungen waren mit vorzüglicher Sorgfalt mit einem Metalldraht $\frac{1}{10}$ Millim. dick angestellt, und da hier alle vier Streifen so wohl übereinstimmen, so bestätigt dieses den Werth von d, so wie er nach Newton angenommen ist. Daſs man nur bei Anwendung eines homogenen Lichtes d genau erhalten kann, daſs die Mischung der Farben, welche bei auffallendem weiſsen Lichte in den Streifen verschiedener Ordnungen nicht ganz gleich ist, einen ungleichen Werth von d für die Streifen der verschiedenen Ordnungen zu geben scheint, läſst sich leicht übersehn. Die groſse Uebereinstimmung der für den Abstand der dunkeln Streifen in verschiedenen Entfernungen berechneten Werthe mit den beobachteten zeigt deutlich, daſs diese Interferenzpuncte wirklich, wie die Formel es angiebt, auf hyperbolischen Aesten liegen, und nicht auf geraden Linien, wie man es sonst anzunehmen geneigt war. Daſs die Puncte, in welchen man beim weitern Entfernen der Tafel oder des Mikrometers dieselbe dunkle Linie findet, nicht in gerader Richtung liegen, zeigt Fresnel aus einem andern Versuche,

wo bei den Abständen des Mikrometers $= 0{,}012$; $= 0{,}585$; $= 3{,}195$ die Entfernungen von der geometrischen Schattengrenze $= 0{,}105$; $= 0{,}880$; $= 3{,}01$ waren; hier erhielt man die Neigung der zwischen den beiden ersten Puncten gezogenen Sehne durch $\frac{775}{573} = 1{,}35$, die Neigung der zwischen den beiden letzten Puncten gezognen Sehne durch $\frac{2130}{2610} = 0{,}82$ bestimmt, also ist die Curve concav gegen die Axe; sie ist eine Hyperbel, deren Brennpuncte mit dem leuchtenden Puncte und der Kante des Körpers zusammenfallen, und deren Aeste freilich bald sich so weit der geraden Linie nähern, daſs es schon sehr genaue Beobachtungen fordert, um die Abweichung von ihr zu bemerken. Da die Asymptoten dieser Hyperbeln, die man nach dem bisher Gesagten nicht mehr selbst als gebeugte Lichtstrahlen ansehen wird, in einiger Entfernung von der Kante des Körpers vorbeigehen, so muſste sich leicht der Irrthum erzeugen, daſs die gebeugten Strahlen nicht die Kante selbst berührten.

Zu eben solchen Betrachtungen, wie sie bisher für die nach auſsen von der Kante ausgehenden Strahlen oder Lichtwellen angestellt sind, in Beziehung auf ihr Zusammentreffen mit den frei bei dem Körper vorbeigehenden Lichtstrahlen oder Wellen, führen nun auch bei schmalen Körpern die Licht- und
Fig. 158. Schattenlinien im Innern des Schattens. Zieht man die Mittellinie CD, nennt die auf ihr genommenen Abscissen $= x$, die Senkrechten $= y$, die ganze Breite des schattenwerfenden Körpers $= c$, so sind offenbar

$$x^2 + (y - \tfrac{1}{2}c)^2 = b^2, \text{ und}$$
$$x^2 + (y + \tfrac{1}{2}c)^2 = (b + \tfrac{1}{2}d)^2$$

die Gleichungen für zwei Kreise, die um eine halbe Wellenbreite verschieden, also so beschaffen sind, daſs sie beim Durchschneiden einen dunkeln Punct geben. Wegen der Kleinheit von d ist also $y = \frac{bd}{2c}$ und in irgend einer Entfernung $= b$ hinter dem schattenwerfenden Körper ist der Zwischenraum zwischen den zwei an beiden Seiten der Mittellinie liegenden ersten dunkeln Linien $= \frac{bd}{c}$. Ebenso, da die zweite dunkle Linie von dem Zusammentreffen der um $1\frac{1}{2}$ Wellenbreiten verschiedenen Kreise, die dritte von den um $2\frac{1}{2}$ Wellenbreiten verschiedenen Kreisen

abhängt, so sind $\frac{3bd}{c}$, $\frac{5bd}{c}$ die Abstände der dunkeln Linien der zweiten und dritten Ordnung von einander. Die oft ausgesprochene Erfahrung, dafs die innern Schattenstreifen gleich weit von einander entfernt sind, findet sich also der Hypothese der Interferenzen und der Undulationen gemäfs.

Bei diesen innern Streifen, die auf einer Ebene aufgefangen allemal matt erscheinen, fand Fresnel vorzüglich das Auffangen mit der Loupe vortheilhaft, und aufser vielen andern Messungen, die im weifsen Lichtstrahle angestellt wurden, (die er nicht mittheilt,) ergeben folgende im rothen Lichte (wofür d = 0,000623 Millimeter) angestellte Messungen eine nahe Uebereinstimmung mit der Theorie.

	Abstand des leuchtenden Puncts vom Metalldraht. Meter.	Abst. des Drahts vom Mikromet. Meter	Durchmesser des Drahts. Millim	Anzahl der Zwischenräume.	Abstände von der Mitte gemes. Millimeter	Abstände von der Mitte bercht. Millimeter	Differenz. Millimeter
1	1,430	0,546	0,76	1	0,45	0,45	0
2	1,430	0,546	1,01	3	0,98	1,01	—0,03
3	5,95	0,546	1,01	3	0,98	1,01	—0,03
4	1,447	1,093	1,56	3	1,30	1,31	—0,01
5	1,447	1,093	2,56	7	1,90	1,86	+0,04

Eigentlich liegen auch hier die Puncte, zu welchen man beim Fortrücken der Tafel gelangt, wenn man auf eben der dunkeln Linie bleibt, auf einem hyperbolischen Aste, aber die Krümmung desselben ist so klein, dafs die Linien völlig als gerade erscheinen, wie es auch die Formel, die auf die höhern Glieder keine Rücksicht nimmt, schon zeigt.

Die Formel $y = \frac{bd}{c}$ zeigt, dafs bei gleicher Entfernung = b der den Schatten auffangenden Tafel der Abstand der dunkeln Linien von der Mitte beträchtlich wird, wenn c klein ist, und dafs daher ein spitzer Körper, wie eine Nadel, einen an der Spitze gespaltnen Schatten zeigen mufs, weil die dunkeln Linien da, wo c auf ein Zehntel abgenommen hat, zehnmal so weit von einander abstehen, dafs man aber aus eben dem Grunde in dem Schatten des breitern Theils der Nadel mehrere dunkle Linien gewahr werden mufs.

Diese einfache Vergleichung der Wege reicht, wie Fres-

Fig. 159. NEL bemerkt [1], hier aus, weil die kleinen Wellen, die von Puncten a, b, entfernt von der Ecke A des festen Körpers, ausgehen, sich in P fast völlig zerstören. Wenn nämlich Aa, ab, bc, cd.... so genommen sind, dafs die von den Enden dieser Wellentheile nach P gezognen Wege um eine halbe Wellenlänge verschieden sind, so zerstören ab und cd vereinigt die Wirkung der zwischenliegenden bc, und in P wird nur noch die halbe Wirkung des letzten Wellentheiles Aa statt finden, dessen halbe Wirkung durch ab zerstört ist. Dieses findet genau statt, so lange man die Wellentheile Aa, ab, bc, cd.... als gleich ansehen kann, das heifst, so lange P noch ziemlich entfernt ist, es findet auch genau genug statt um die Mitte des Schattens des Körpers AB, dagegen bei Q darf man nicht mehr so vollkommen die Differenz der nach der Mitte von Aa und Be gezognen Linien mit der Differenz der AQ, BQ vertauschen, und die hier erscheinenden Streifen sind daher der Mitte des Schattens ein wenig näher, als sie nach der Formel seyn sollten, welche die Wege von den Grenzen des Körpers an mifst.

Weit schwieriger als dieser Fall ist derjenige, wo die Strahlen durch eine enge Oeffnung eintreten und wo die Einwirkung beider Ränder A, G auf die Wellen des Zwischenraumes betrachtet werden mufs. Fig. 160. Indefs ist folgende Ueberlegung klar. Es sey P ein Punct, für welchen die Wege AP, PG um eine ganze Wellenlänge verschieden sind, und PI sey um eine halbe Wellenlänge von beiden verschieden. Da I als in der Mitte zwischen A und G liegend angesehen werden kann, so nehme man gleiche Stücke, Ga, Ib und so weiter, und es ist offenbar, dafs die von G und I kommenden Wellen in P eine Dunkelheit hervorbringen, eben so die von a und b kommenden Wellen und so ferner, und dafs also der dunkle Streif P so liegen wird, dafs die Differenz der Wege AP, GP eine ganze Wellenlänge beträgt; für den zweiten dunkeln Streif wird die Differenz der Wege zwei Wellenlängen und so ferner gleich seyn. Die Erfahrung bestätigt dieses, indem die dunkeln Streifen, oder bei weifsem Lichte die Grenzen der Spectra, in Entfernungen, die sich wie 1, 2, 3 verhalten, erscheinen, wie es vorzüglich FRAUNHOFER's bald zu erwähnende Beobachtungen zeigen. Dafs diese Bestimmung aufhört genau zu seyn,

1 Ann. de Chim. et Ph. XI. 266.

wenn AG erheblich gegen GP ist, versteht sich von selbst, da dann I nicht mehr in die Mitte zwischen A und G fällt, wenn $AP - IP = IP - GP$ seyn soll.

Da bei den durch eine Oeffnung gehenden Strahlen die Erscheinungen so sehr ungleich sind, je nachdem man die Farbenstreifen in einer oder der andern Entfernung von der Oeffnung beobachtet, so sucht FRESNEL die Frage zu beantworten, wo die das gebeugte Licht auffangende Ebene sich befinden müsse, damit bei ungleichen Oeffnungen AG, A'G' das Farbenbild gleich erscheine. Es sey $CI = a$, $C'I' = a'$ die Entfernung des leuchtenden Punctes von der Oeffnung, $OI = b$, $O'I' = b'$ die zu jenem Zwecke erforderliche Entfernung der Tafel, AG sey $= c$, $A'G' = c'$. Damit nun zuerst die in O ankommenden Strahlen eben die Erscheinungen wie in O' hervorbringen, muſs $CA + AO - CO = C'A' + A'O' - C'O'$ seyn, also, wenn die Kreise um C, O, C', O' gezogen sind, $AF = A'F'$. Da nun Fig. 161.

$$AO = \sqrt{\{(b + a - \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{4}c^2)})^2 + \tfrac{1}{4}c^2\}}$$

oder angenähert

$$AO = \sqrt{\left\{b^2 + 2ab + 2a^2 - 2(b+a)\left(a - \tfrac{1}{8}\frac{c^2}{a}\right)\right\}}$$

$$= b + \tfrac{1}{8}\frac{(a+b)c^2}{a}, \text{ und } AF = \tfrac{1}{8}\frac{(a+b)c^2}{ab}$$

so muſs $\frac{(a+b)c^2}{ab} = \frac{(a'+b')c'^2}{a'b'}$ seyn, damit die Differenz der Wege für O und O' gleich sey. Sollen auch für P und P' die gleichen Erscheinungen eintreten, so muſs, wenn man CP, C'P' zieht, und diese die Bogen IG, I'G' in M, M' schneiden, $IM : I'M' = c : c'$ seyn, und da auch $PO = \frac{IM.(a+b)}{a} = \frac{I'M'(a'+b')}{a'} = P'O'$ seyn soll, weil wir fordern, daſs die ganze Farbenerscheinung um O und um O' ganz einerlei sey, so folgt $c(a+b)\,a' = c'(a'+b')\,a$, also $\frac{(a+b)c}{b} \cdot \frac{c}{b} = \frac{cc'(a'+b')}{a'b}$, und dieses sollte nach der ersten Bedingungsgleichung $= \frac{(a'+b')c'^2}{a'b'}$ also $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ seyn, woraus dann auch $a' = \frac{ab'^2}{ab + b^2 - ab'}$ folgt.

Fresnel hat diese Formel geprüft, indem er bei ungleichen Oeffnungen den Ort des leuchtenden Punctes und des Mikrometers zu Abmessung der Farbenerscheinungen so anbrachte, wie es die Formel fordert, und wirklich gleiche Farbenstreifen erhielt. Aber an diese leichtern Folgerungen, welche zur Bestimmung der Gesetze der Beugung des Lichtes dienen, knüpft Fresnel noch einige schwierigere Untersuchungen. Wenn wir das Phänomen genau wollen kennen lernen, so müssen wir für jeden einzelnen Punct die Intensität der vermöge der verschiedenen Wellen dorthin gelangenden Erleuchtung berechnen können. Jedes Elementartheilchen der von C ausgegangenen
Fig. 162. Welle bringt eine den Punct P treffende Oscillation hervor, und wenn wir den fast als gerade anzusehenden Bogen MZ = z, Zz = dz nennen, CM = a, PM = b, so ist, wie wir oben gesehen haben, $Zu = \frac{1}{2}\frac{z^2(a+b)}{ab}$, also, wenn eine Wellenlänge $= \lambda$ ist, so wird $\frac{1}{2}\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}$ die Anzahl von Wellen und Wellentheilen geben, welche auf diesem Abstande Raum hat, und die Wirkung der Welle ist eine solche periodische Function dieser Gröfse, dafs sie für das Stück dz als aus zwei Theilen

$$dz\,.\,\text{Sin.}\frac{z^2(a+b)}{2ab\lambda} \text{ und } dz\,\text{Cos.}\frac{z^2(a+b)}{2ab\lambda}$$

unter rechtem Winkel zusammentreffend angesehen werden kann*); die gesammte Wirkung aller vom Bogen z herrührenden Wellen ist daher =

$$\sqrt{\left\{\left[\int dz\,.\,\text{Cos.}\frac{z^2(a+b)}{2ab\lambda}\right]^2 + \left[\int dz\,\text{Sin.}\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right]^2\right\}}$$

Diese Integralen müssen von M bis zu den Grenzen, wo sich die die Lichtstrahlen aufhaltenden Schirme befinden, genommen werden.

Wendet man dieses auf die verschiedenen hier vorkommenden Fälle an, so findet sich Folgendes. Erstlich, wenn man die Erleuchtung innerhalb der Grenze des Schattens eines die Sonnenstrahlen auffangenden breiten Körpers sucht, so nimmt

*) Die Herleitung dieser beiden zugleich eintretenden Wirkungen (Ann. XI. 257. 286.) ist mir nicht so klar, dafs ich sie in wenig Worte zu fassen wüfste, ich verweise daher lieber auf das Original selbst. Auch Poisson ist mit dieser Theorie nicht ganz zufrieden. Vergl. Ann. de Ch. et Ph. XXII. 250. XXIII. 32. 113.

die Erleuchtung ununterbrochen ab, je tiefer man in den Schatten hineintritt; es finden keine Maxima und Minima statt, und dieses ist der Erfahrung gemäſs, welche hier keine Abwechselungen von Hell und Dunkel zeigt. Die Theorie zeigt überdies, daſs die bei verschiedenen Entfernungen der das Licht auffangenden Ebene gleich stark erleuchteten Puncte nicht in gerader Linie, sondern auf einer hyperbolischen Linie liegen. Zweitens, wenn der Schirm nur von einer Seite den Bogen ZM begrenzt, oder wenn die Kante eines sehr breiten Schirmes den Schatten wirft und M auſserhalb der Grenze des Schirmes liegt, so ergeben sich Maxima und Minima der Erleuchtung, jedoch ist auch an den am schwächsten erleuchteten Stellen diese nicht $= 0$; da nach Fresnel's Formeln $v = z\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}}$ ist, so läſst sich dieser Wechsel in folgenden Zahlen übersehen, wenn man v in Theilen des Quadranten ausdrückt:

für v = 1,2172	ist die Intens. des Lichtes	= 2,7413
= 1,8726		1,5570
= 2,3449		2,3990
= 2,7392		1,6867
= 3,0820		2,3022
= 3,3913		1,7440
= 3,6742		2,2523
= 3,9372		1,7783

und so weiter. Diese Bestimmung weicht etwas von derjenigen ab, die sich bloſs an die Differenz der Wege zweier Lichtstrahlen hielt, die jetzige Bestimmung nämlich giebt für die erste dunkle Linie 1,8726, statt daſs jene 2 gäbe. Fresnel theilt hier eine neue Reihe von Versuchen mit, die genauer mit dieser Theorie als mit der vorigen übereinstimmen. Drittens, wenn das Licht durch eine enge Oeffnung fällt, so muſs man die Integrale gehörig in Beziehung auf beide Ränder der Oeffnung nehmen, und dieses findet statt sowohl wenn die von P nach C gezogene Linie zwischen den Rändern der Oeffnung durchgeht, als auch wenn sie den Schirm schneidet. Hier giebt die Formel wieder abwechselnde Maxima und Minima der Erleuchtung, die sehr nahe dahin fallen, wo die Beobachtung sie angiebt; die Fälle, wo die Abweichung bedeutender ist, glaubt Fresnel auf die Schwierigkeit, den genauen Punct der geringsten Er-

leuchtung zu erkennen, schieben zu dürfen. Dafs Viertens auch für die in den Schatten eines sehr schmalen Körpers hinein gelangenden Lichtstrahlen Maxima und Minima statt finden, läfst sich aus dem Vorigen schon erwarten. Unter andern ergab sich hier eine Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung dadurch, dafs bei gleich bleibender Breite des Körpers und gleichem Abstande der das Licht auffangenden Tafel oder des Mikrometers die Farbenstreifen sich änderten, wenn der Abstand des leuchtenden Punctes geändert wurde, indefs betragen diese Aenderungen nur einige Hundertel des Millimeters, und da die Abweichungen der Rechnung vom Resultate des Versuchs auch nicht in engere Grenzen eingeschlossen sind, so darf man kein so sehr grofses Gewicht hierauf legen. Merkwürdiger sind die Berechnungen über einige andere Fälle, zum Beispiel, dafs sich bei a = 5,049 Meter, b = 0,615 Meter, c = der Breite des dunkeln Körpers = 0,78 Millimeter, die beiden ersten dunkeln Linien so ungemein fein zeigten und die dritte fast gar nicht erschien; die Rechnung zeigte, dafs hier wirklich die Erleuchtung in einem sehr engen Raume beträchtlich kleiner seyn mufste, als am Rande eines breiten Schirmes, und dafs für die dritte dunkle Linie nur ein sehr schwaches Minimum statt finden konnte. Alle mit der Rechnung verglichenen Beobachtungen geben eben solche Uebereinstimmung mit der Theorie.

Eine Folgerung, welche Poisson aus der Theorie Fresnel's herleitete, bestand darin, dafs nach dieser bei einem kreisförmigen Schirme von geringer Breite [1] der Mittelpunct so erhellet ist, als ob gar kein Schirm vorhanden wäre. Und wirklich zeigte ein zwei Millimeter im Durchmesser haltender, auf eine reine Glasplatte aufgeklebter Schirm einen hellen kleinen Kreis nahe um den Mittelpunct. Berechnet man nach eben den Principien die Erleuchtung in der Mitte des hellen Raumes, den die kreisförmige Oeffnung eines Schirms auf der Mikrometerplatte darstellt, so findet man diese dunkel, wenn der Abstand der Mikrometerplatte vom Schirme $= b = \frac{a r^2}{ad - r^2}$ oder $= \frac{a r^2}{3ad - r^2}$ ist, dagegen hell, wenn $b = \frac{a r^2}{2ad - r^2}$, oder $= \frac{a r^2}{4ad - r^2}$ ist. Da nämlich a die Entfernung des leuchtenden Punctes vom

1 Poggendorff Ann. V. 246.

Schirme, r den Halbmesser der Oeffnung, d eine ganze Wellenlänge bedeutet, so soll für eine Verstärkung der Erleuchtung durch die vom Rande der Oeffnung ausgehenden Strahlen

$$a + b + d = \sqrt{(a^2 + r^2)} + \sqrt{(b^2 + r^2)}$$
$$= a + b + \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{a} + \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{b} \text{ seyn,}$$

also $b = \frac{a r^2}{2ad - r^2}$. Die Beobachtung zeigte wirklich bei den richtigen Entfernungen einen völlig schwarzen Fleck im Mittelpuncte jenes Raumes.

So viel indeſs hier erklärt ist, so bleiben doch noch schwierige Fälle übrig, bei denen man mit der Differenz der Wege allein nicht ausreicht, und deren Berechnung auch nach Fresnel's Methode nicht so leicht ausführbar scheint. Befinden sich die beiden Schirme, welche durch einen an beiden Seiten eng begrenzten Raum das Licht durchlassen, nicht gerade einander gegenüber, sondern gelangt das Licht an die Kante des zweiten, nachdem es schon der Beugung an der Kante des ersten unterworfen gewesen ist, so läſst sich leicht einsehen, daſs die Farbenstreifen nicht mehr an beiden Seiten symmetrisch seyn werden, aber es scheint sehr schwer, die Erleuchtung, welche dann auf jeden Punct einer hinter dem Orte des zweiten Schirmes aufgestellten Tafel fallen muſs, richtig zu berechnen. Eben so verhält es sich, wenn man, wie Flaugergues es that, innerhalb des Schattens eines breitern Schirmes einen zweiten Schirm der Grenze des Schattens so nähert, daſs die in jenen Schatten hineingebeugten Strahlen den Rand des zweiten Schirmes treffen. Daſs das Anstoſsen der Lichtwellen an diesen zweiten Schirm neue Wellen und ein Interferiren mit den am Rande des ersten Schirmes gebeugten Wellen hervorbringen muſs, erhellet wohl; aber hier wären wenigstens Versuche zu wünschen, ob der Erfolg dem gemäſs ist, was die Differenz der Wege der einmal und der zweimal gebeugten Lichtstrahlen oder Lichtwellen fordert.

Doch, wenn sich gleich noch mehr Fragen hier aufwerfen lieſsen, und manche Zweifel, ob die Undulationstheorie sich für alle genügend zeigen wird, übrig bleiben mögen, so läſst sich dennoch nicht leugnen, daſs diese Theorie ungemein viel leistet, um diese so mannigfaltigen Phänomene weit besser unter einfache Regeln zu bringen, als es vorher je möglich schien.

Einen merkwürdigen Beitrag zu der eben erklärten Reihe von Phänomenen hat ARAGO[1] bekannt gemacht. Wenn man, statt die von der einen Seite in den Schatten eines schmalen Körpers hereingebeugten Strahlen durch einen undurchsichtigen Schirm aufzufangen, sie mit einem durchsichtigen Glase auffängt, so verschwinden die Farbenstreifen im Innern des Schattens ebenso wohl. Hier gelangen die durch das Glas gehenden Strahlen zwar zu den Puncten hin, wo sie vorhin die Erscheinung der hellen und dunkeln Linien hervorbrachten, aber da die Undulationen nicht mehr so wie vorhin zusammentreffen, so entsteht jene Erscheinung nicht mehr oder entsteht wenigstens verändert. Wendet man nach und nach dickere Gläser an, so gelangt man allmälig zu der Grenze, wo die Streifen verschwinden. Ungemein dünne Glasscheibchen bringen nämlich nicht das Verschwinden hervor, sondern verändern nur den Ort der Streifen, und bei gröſserer Dicke scheinen die Streifen nur darum zu verschwinden, weil sie über die Grenzen des Schattens hinausrücken, wo sie in stärkerem Lichte unkenntlich werden. Diese Veränderung hängt davon ab, daſs die Lichtwellen im Glase eine andere Breite erlangen, also die Dicke des Glases nicht genau so viele Wellen als vorhin erhält, weshalb die gleichen Erscheinungen nun nicht mehr genau gleichen Wegen entsprechen, sondern statt des wahren Weges der im Innern des Glases durchlaufene Weg gehörig reducirt in Rechnung gebracht werden müſste.

Eine ganz eigenthümlich angeordnete Reihe von Versuchen über die Beugung des Lichtes hat endlich FRAUNHOFER angestellt[2], die ich jetzt noch im Auszuge mittheilen werde. Der wichtigste Vorzug, den FRAUNHOFER seinen Versuchen gab, besteht darin, daſs er die durch Beugung modificirten Lichtstrahlen auf das Objectivglas eines Fernrohres fallen läſst, so daſs man die Erscheinungen durch das Fernrohr vergröſsert sieht. Ist dieses Fernrohr auf einem Theodolit befestigt, so erhält man zugleich die Mittel, die Winkel der Ablenkung des Lichtes zu messen. Um solche Versuche vollkommen anzustellen, muſs man sich, wie FRAUNHOFER es that, eines Heliostaten bedienen,

1 Ann. de Ch. et Ph. I. 190. 199.

2 Denkschr. d. Acad. zu München, VIII. Band, und Schumacher's astron. Abh. S. 46.

damit der Sonnenstrahl, des Fortrückens der Sonne ungeachtet, fortwährend in einerlei Richtung auf das Instrument falle. Läfst man den Lichtstrahl so auf das Objectiv des Fernrohrs fallen, dafs dieses genau auf die den Strahl einlassende Oeffnung sieht, dafs nämlich der Mikrometerfaden im Fernrohre mitten vor der Oeffnung erscheint, und bringt dann einen Schirm mit einem schmalen, durch parallele Seiten begrenzten, Spalte vor das Objectiv, so sieht man in der Mitte des Feldes einen weifsen, hellen Streifen L'L', der gegen die beiden Seiten gelb und am äufsersten Rande roth erscheint, in dessen Mitte der Mikrometerfaden K gesehen wird; daran grenzt an beiden Seiten gleich ein zweites Farbenbild L'L'', dessen tiefes Blau an jenes stöfst, und dann alle Farben bis zum Roth, weiter entfernt von der Mitte, zeigt; diesem folgt, weiter von der Mitte, ein neues Farbenspectrum L''L''', schwächer als das vorige, in welchem Blau, Grün, Gelb, Roth, das letztere am weitesten von der Mitte, an einander gereihet sind; ein noch matteres Farbenbild L'''L$^{\text{IV}}$ mit eben der Anordnung der Farben schliefst sich an dieses an, und so folgen noch mehrere mit zunehmend matteren Farben, und diese endlich in einen matten Lichtstreif übergehenden Spectra dehnen sich sehr weit nach beiden Seiten aus, indem das Fernrohr hier noch den schwachen Lichteindruck zu beobachten gestattet, den man mit einer blofsen Loupe nicht wahrnehmen könnte. Fig. 163.

Die Breite des Spaltes wurde bei jedem Versuche mit einem an demselben angebrachten Mikroskope und Mikrometer so genau gemessen, dafs der Abstand als bis auf ein Funfzigtausendtel des Zolles genau bekannt angesehen werden kann.

Die Farbenbilder zeigten sich so, dafs die Uebergänge von einer Farbe zur andern in jedem derselben nicht strenge begrenzt sind, und auch von dem Roth des einen zum angrenzenden Blau des andern ein allmäliger Uebergang statt findet. Dafs die Ablenkungswinkel sich mit Hülfe des Theodoliten, an welchen das Fernrohr befestigt war, genau messen liefsen, erhellt von selbst, und da die aus diesen Messungen hervorgehenden Resultate so ungemein einfach sind, so brauche ich von den Versuchen nur einige wenige anzuführen. Nahm Fraunhofer den Winkel von der Mitte des hellen Streifes bis zur Grenze des ersten Roth, wo nämlich das Violett oder Blau des zweiten Farbenbildes anfing, ferner den Winkel von der Mitte bis zur Grenze des zweiten Roth, dann bis zur Grenze des dritten, end-

lich bis zur Grenze des vierten Roth, so waren die Winkel im Verhältnifs der Zahlen 1:2:3:4; zum Beispiel bei einer Weite des Spaltes = 0,06098 paris. Zoll waren jene Ablenkungswinkel, oder die Breiten jener Farbenbilder von der Mitte der ganzen Erscheinung bis zu den eben genannten Grenzen, $= 1' \, 11'',6$; $= 2' \, 22'',7$; $= 3' \, 31'',7$; $= 4' \, 44'',6$. Das zweite Resultat dieser Messungen war, dafs diese Winkel genau in umgekehrtem Verhältnisse der Breite des Spaltes standen, zum Beispiel zu der Weite des Spaltes = 0,06098 gehörte $1' \, 11'',6$,
zu der Weite = 0,01210 gehörte $6' \, 0''$
0,00337 $21' \, 3''$
0,00114 $1^\circ \, 4' \, 53''$

Diese und eben so alle übrigen Beobachtungen geben mit zureichender Uebereinstimmung für die rothen Strahlen den Winkel $L' = \frac{0,0000211}{\gamma}$, wenn γ die Breite des Spaltes ist, (zum Beispiel $\frac{0,0000211}{0,06098} = 0,000346 = 1' \, 11'',6$) und ebenso für den zweiten rothen Rand $L'' = 2 \, . \, \frac{0,0000211}{\gamma}$, und so für die folgenden.

Wenn das Licht nicht durch einen engen Spalt, sondern durch eine kleine kreisförmige Oeffnung eingelassen wurde, so zeigten die Farbenringe um die Oeffnung sich ganz so im Fernrohre, wie es die Farbenstreifen neben dem Spalte gethan hatten, nur mit dem Unterschiede, dafs der Halbmesser des ersten rothen Ringes, oder vielmehr der Grenze desselben, wo er an die nächste Farbenfolge grenzte, etwas gröfser war, so dafs, wenn, dem Vorigen gemäfs, L' den Halbmesser dieses Ringes bezeichnet, γ den Durchmesser der Oeffnung in pariser Zollen ausgedrückt, $L' = \frac{0,0000257}{\gamma}$ war; für die folgenden Ringe ward eben die Grenze durch $L'' = L' + \frac{0,0000214}{\gamma}$,

$$L''' = L' + 2 \, . \, \frac{0,0000214}{\gamma}$$

angegeben. Den Grund für die Erweiterung des ersten Ringes, welche bei den folgenden Ringen nicht verdoppelt vorkommt, giebt Fraunhofer nicht an, sie mufs indefs wohl darin liegen,

dafs die nach den Sehnen gemessenen geringeren Abstände der nächsten Wand eine stärkere Ablenkung hervorbringen.

Eine zweite Reihe von Versuchen betraf die Ablenkung, die durch zwei Schirme, welche einander nicht gerade gegenüber stehen, hervorgebracht wird. So lange hier die beiden Schneiden der Schirme noch so standen, dafs die Breite des zuerst an der einen, später erst an der andern Seite begrenzten Lichtstrahles noch 0,04 bis 0,02 Zoll betrug, so zeigten sich die Spectra, wie in den früheren Versuchen; bei noch mehr verengerter Oeffnung aber, das ist, wenn die mit der Richtung des Strahles parallel durch die Schärfen beider Schirme gezogenen Linien noch näher an einander rücken, hört die Symmetrie der Bilder auf, die Bilder verbreitern sich an der Seite, wo der dem Objectiv nähere Schirm ist, mehr, als an der andern Seite. Wird die Oeffnung sehr enge, so breitet zuerst das entfernteste, z. B. fünfte Bild sich sehr weit aus und wird unkenntlich, bei noch gröfserer Annäherung der Schirme geht es mit dem vierten, dem dritten u. s. w. ebenso; an der andern Seite verschwinden die Bilder nicht so allmälig, sondern erst, wenn an der ersten Seite das letzte Bild verschwindet und die Schneiden gar kein Licht mehr durchlassen.

Noch einen merkwürdigen Versuch bot eine auf die Goldblättchen-Belegung eines Glases radirte Kreislinie dar. Ein solches mit Goldblättchen belegtes Glas ist undurchsichtig; radirt man auf dem Golde eine gerade Linie oder befreit man eine sehr kleine Kreisfläche vom Golde, so zeigen sich eben die Erscheinungen, als wenn die gerade Linie oder die Kreisfläche Oeffnungen in einem Schirme wären; war dagegen die vom Golde befreite Linie eine blofse sehr feine Kreislinie, so erschienen eben solche Farbenringe, wie bei einer Kreisöffnung, aber die Durchmesser dieser Ringe waren nicht durch den Halbmesser jener Kreislinie bestimmt, sondern blofs durch die Breite der radirten Linie, so dafs, wenn diese $=\gamma$ war, der Halbmesser des ersten Kreises, den die Grenze des Roth bildet, $=\frac{0,0000211}{\gamma}$, der Halbmesser des zweiten doppelt so grofs war. Diese Ringe blieben noch vollständig, wenn man auch die Hälfte des Kreises bedeckte; ward aber ein Segment $= 180° + x$ bedeckt, so fehlten in den Ringen an zwei einander gegenüberstehenden Seiten Stücke, die x Grade umfafsten.

Um diesen Versuch richtig zu verstehen, muſs man sich erinnern, daſs die Beobachtungen mit dem Fernrohre angestellt wurden. Wären die durch jene Kreislinie einfallenden Strahlen sämmtlich der Axe parallel, so würden sie bloſs einen erleuchteten Punct im Brennpuncte des Objectivs, also einen kleinen hellen Punct in der Mitte des Feldes darstellen; wegen der Neigung der bei der Beugung getrennten Strahlen stellen sich für jeden sehr kleinen Bogen des Kreises kleine Farbenbilder neben dem Brennpuncte dar, genau so, wie es der Fall seyn würde, wenn ein eben so kurzer Spalt vor der Mitte des Objectivs läge. Die Bilder, welche zwei diametral gegen einander liegenden Bogen zugehören, fallen zusammen, und darum bleiben die Ringe vollständig, wenn auch der Halbkreis bedeckt ist, bedeckt man aber einen gröſsern Theil, so müssen Stücke der Ringe fehlen.

Eine andere Reihe merkwürdiger Versuche, die noch nie so angestellt worden waren, betrifft die gegenseitige Einwirkung gebeugter Strahlen. Um auf der ganzen Fläche des Objectivs eine groſse Anzahl gleich gebeugter Strahlen zu erhalten, wurden parallele Fäden, alle von gleicher Dicke und alle in gleichen Entfernungen von einander, vor dem Objective ausgespannt, und kein andres Licht, als das durch diese Zwischenräume gegangene, fiel auf das Objectiv. Das Fernrohr war auf eine 0,01 Zoll breite Oeffnung gerichtet, durch welche das Sonnenlicht einfiel, und man sah nun im Fernrohre erstlich jene Oeffnung
Fig. 164. A am Heliostat ganz so, wie man sie ohne Fadengitter auch gesehn hätte, scharf begrenzt, ohne Farben; daran grenzte, an beiden Seiten symmetrisch, ein völlig dunkler Raum AH′; an diesen zweitens ein Farbenbild H′C′, welches das Violett gegen das erste Bild, gegen die Mitte der ganzen Erscheinung, wendet; dann wieder ein dunkler Raum C′H″; hieran grenzt drittens ein zweites doppelt so breites Farbenbild H″C″, worin die Farben eben so wie im vorigen auf einander folgen; ohne dunkeln Zwischenraum grenzt hieran ein drittes Farbenbild C″D‴, dessen Violett schon mit dem Roth des vorigen zusammenfällt; ein viertes Bild D‴D^IV, dessen Blau sich schon in das Roth des dritten verliert, grenzt an dieses, und so folgen mehrere Bilder mit schwächer werdendem Lichte, die immer mehr und mehr auf einander fallen. Wenn das Fernrohr so weit ausgezogen war, daſs man ohne Fadengitter die Oeffnung

ganz deutlich begrenzt sah, so wurden auch hier, wie in dem durch das Prisma zerstreuten Sonnenlichte, eben die dunkeln Linien in den Farbenbildern [1] wahrgenommen. Die Gröſse dieser Farbenbilder hängt nicht von der Dicke der Fäden allein und nicht von der Breite der offenen Zwischenräume allein ab, sondern von der Breite des Zwischenraumes zwischen der Mitte zweier Fäden, oder von der Summe der Fadendicke und des offenen Zwischenraumes; je kleiner diese ist, desto breiter sind die Farbenbilder. Eben deswegen aber müssen diese Fäden und ihre Abstände auch genau gleich seyn, damit nicht einige Theile des Gitters eine andere Breite der Farbenbilder, als andre Theile, bewirken, wodurch eine gegenseitige Verdeckung und Undeutlichkeit eintreten würde. Am schönsten zeigten sie sich, wenn entweder feine Parallellinien in Glas eingeschnitten oder auf die Goldbelegung eines Glases radirt wurden.

Ich schalte hier die Bemerkung ein, daſs diese Farbenbilder ganz dieselben sind, die man schon mit recht schönen Farben geziert sieht, wenn man durch ein recht gleich gewebtes seidnes Florband nach einem 20 Fuſs oder weiter entfernten Lichte sieht; selbst bei dem Blinzeln mit den Augen, wo die Augenwimpern ein ähnliches Gitter darstellen, sieht man, wenn gleich unvollkommener, eben solche Farbenbilder, wenn man eine Lichtflamme ansieht [2].

Diese Farbenbilder nennt Fraunhofer mittlere Spectra vollkommener Art. Sie sind bei groſser Feinheit der Gitter breit und von ausgezeichnet schönen Farben. Aber wenn die Zwischenräume zwischen der Mitte der Fäden ziemlich groſs und eben deshalb diese Spectra von geringer Breite sind, so sieht man, vorzüglich bei etwas dickeren Fäden, da, wo diese mittleren Spectra vollkommener Art schwächer werden, andre Spectra, deren Breite sich bloſs nach den freien Zwischenräumen der Fäden richtet, und die sich so verhalten, wie bei einer einzelnen schmalen Oeffnung. Jene mittlern Spectra vollkommner Art bestehen aus vollkommen getrennten Farbenstrahlen, so daſs jede einzelne Farbe ganz homogenes Licht enthält. Fraunhofer zeigte dieses dadurch, daſs er vor dem Oculare seines Fernrohres ein kleines Prisma anbrachte. Dieses Prisma's Axe ist

1 Vergl. Art. *Farben*. Th. IV. S. 77.

2 G. XVIII. 197.

horizontal, wenn man verticale Streifen beobachten will, und man bemerkt dann, dafs da, wo durch eine einzelne Oeffnung das Licht eindringt und diese mit ihren farbigen Nebenbildern gesehen wird, sich am einen Ende selbst der rothen Strahlen ein Blau und umgekehrt am andern Ende selbst der blauen Strahlen ein Roth zeigt, zum Beweise, dafs jene rothen Strahlen und diese blauen nicht homogen sind. Bei den mittlern Farbenbildern vollkommener Art findet dieses nicht statt. Dieses Ocularprisma dient noch auf eine andre Weise, um die Homogeneität des Lichtes zu prüfen. Wenn man durch dieses Prisma ins Fernrohr sieht, und es ist der Kreuzfaden mit homogenem Lichte erleuchtet, so erkennt man ihn deutlich, weil nämlich nun selbst das Prisma keine Zerstreuung des von ihm ausgehenden Lichtes bewirken kann, dagegen wird er unsichtbar, wenn er von gemischtem Lichte erleuchtet ist. Bei den Beobachtungen des gebeugten Lichtes ist dieser Faden abwechselnd von verschiedenartigem Lichte erleuchtet, indem zum Beispiel bei den Farbenbildern, welche das Bild eines einzigen, das Licht durchlassenden Spaltes begleiten, auf einen Theil des Fadens das erste, auf einen Theil das zweite Spectrum fällt; haben nun diese Spectra in ihren einzelnen Theilen kein homogenes Licht, so sieht man da den Faden gar nicht; haben sie in einem Puncte rein violettes, in einem andern Puncte rein rothes Licht, in einem dritten Puncte wieder rein violettes Licht, so erscheinen diese drei Puncte nicht in gerader Linie, sondern, während das Bild des Fadens, so wie man ihn in der ganzen Farbenfolge von Violett bis Roth sieht, als schief hinaufwärts gehend erscheint, fängt er, gleichsam abgebrochen, unten wieder an, wo das zweite Violett ihn erleuchtet, und die Stücke des Fadens bezeichnen daher das Ende der einzelnen Farbenbilder. Bei den mittlern vollkommnen Farbenbildern sind die Farben der Bilder rein und homogen, so lange nicht die Grenzen derselben auf einander fallen, welches bei dem dritten, vierten Farbenbilde immer mehr und mehr eintritt.

Bei diesen Farbenbildern wurden ebenso, wie bei den durch eine einzige Oeffnung dargestellten Farben, die Abstände von der Mitte, welche als Mafs für die Ablenkung der gebeugten Strahlen erscheinen, abgemessen; da aber hier die dunkeln Linien (welche mit strenger Genauigkeit ein Licht von bestimmter Brechbarkeit bezeichnen, oder die Stelle im prismati-

schen Farbenbilde, wo eine bestimmte Brechung statt findet, angeben) sichtbar waren, so konnte mit Bestimmtheit für jeden farbigen Strahl jene Ablenkung angegeben werden. Richtete man auf irgend eine dieser Linien sowohl im ersten als in jedem folgenden Spectrum die Messung, so waren die Abstände von der Mitte im zweiten Bilde doppelt, im dritten dreimal so grofs, als im ersten, und so ferner. Man erkennt zum Beispiel im orangefarbnen Theile des Farbenbildes[1] eine dunkle Linie D, für welche die Winkel $= 38' \, 19''$; $= 1^\circ \, 16' \, 38''$; $= 1^\circ \, 55' \, 0''$; $= 2^\circ \, 33' \, 15''$ gefunden wurden, wenn $\gamma + \delta = 0{,}001952 =$ der Summe der Fadendicke und des Faden-Abstandes betrug; dagegen wurde für eine Linie H, die im Anfange des Violetten sichtbar ist, der Winkel $= 25' \, 42''$, $= 51^\circ \, 32''$ gefunden; das Mittel aus jenen ist $= 38' \, 19'',2 = 0{,}0111468 = D$, und $D.(\gamma + \delta) = 0{,}00002176$; das Mittel aus den letztern ist $= 25' \, 44'' = 0{,}0074815 = H$, und $H.(\gamma + \delta) = 0{,}00001461$. Diese Zahlen $D.(\gamma + \delta)$, $H.(\gamma + \delta)$ und so die übrigen auf ganz bestimmte Farbenstrahlen bezogenen finden sich bei allen Fadengittern constant, wenn man unter D immer eben den bestimmten Theil des Farbenbildes im Orange, unter H den andern bestimmten Punct im Violett versteht. Fraunhofer giebt dieses für noch mehr einzelne Puncte des Farbenbildes, wo sich deutlich ausgezeichnete Linien zeigen, an und findet es allgemein bestätigt.

Warum hier die hellen Farbenbilder desto breiter werden, je weiter von der Mitte sie sind, und warum sie über einander greifen, erhellet hieraus. Bei dem Gitter, welches ich eben erwähnte, war die im Violett (also nahe am einen Ende des Farbenbildes) beobachtete Linie zum ersten Male $25' \, 44''$ von der Mitte entfernt, zum zweiten Male $51' \, 28''$, zum dritten Male hätte sie $77' \, 12''$ entfernt seyn müssen, wenn sie da nicht schon mit dem Roth der zweiten Ordnung zusammen gefallen wäre; eine Linie, die nahe am rothen Ende des Spectrums liegt, hatte die Abstände $44' \, 45''$, $89' \, 30''$, also war von dem reinen Bilde in der Mitte an gerechnet ein Zwischenraum von etwa $25'$ bis zum nächsten Bilde, dessen Violett bei $25',5$ anfing, und dessen Roth bei $44' \, 45''$ endigte; der nächste dunkele Zwischenraum betrug nur etwa $6'$, und dann hätte das zweite Spe-

1 Vergl. Bd. IV. Tab. II. Fig. 19.

ctrum von 51′ bis 89′, etwa 38′ breit folgen sollen, wenn nicht das dritte Violett schon 12′ näher bei der Mitte angefangen und sich daher mit dem Roth gemischt hätte.

Erst in einer spätern Abhandlung[1] hat Fraunhofer darauf aufmerksam gemacht, dafs die Zahlen, von denen ich hier zwei $= D(\gamma + \delta)$ und $= H(\gamma + \delta)$ mitgetheilt habe, gleich sind der Länge der Lichtwellen in der von Young und Fresnel angenommenen Theorie, und hier genau die Länge derjenigen Lichtwellen ausdrücken, die ganz bestimmten Theilen des Farbenbildes entsprechen.

Warum hier die Farbenbilder genau so, wie das blofse Auge sie sehen würde, erscheinen, ist leicht zu übersehen, wenn wir zuerst bei der Vorstellung stehen bleiben, als ob wir blofs die durch Beugung abgelenkten Lichtstrahlen zu verfolgen brauchten. Waren nämlich die auf das Gitter auffallenden Strahlen unter sich parallel, so sind auch die von allen einzelnen Fäden des Gitters ausgehenden violetten Strahlen der ersten Ordnung unter sich parallel, und als parallel auf das Objectiv des Fernrohrs gelangend vereinigen sie sich in einem, ihrem Ablenkungswinkel gemäfsen, Abstande vom Brennpuncte neben diesem, und eben das gilt von den rothen Strahlen der ersten Ordnung, von den violetten der zweiten Ordnung und so ferner. Waren die auffallenden Strahlen nicht genau parallel, so befanden sich diese Vereinigungspuncte doch immer noch neben dem Puncte, wo das gewöhnliche Bild jener nur wenig divergirenden Strahlen entsteht, und das Fernrohr mufste daher, um die Farbenstreifen ganz deutlich zu erkennen, genau ebenso ausgezogen werden, wie es nöthig war, um jenen divergirenden Strahlen angemessen zu seyn; darauf beruht es, dafs Fraunhofer das Ocular des Fernrohrs so stellen mufste, wie es nöthig war, um die Oeffnung am Heliostat ganz scharf zu sehen; bei dieser Stellung waren auch die Farbenstreifen vollkommen deutlich.

Um die Beobachtung auf die Interferenzen zurückzuführen, mufs man Folgendes überlegen. Wenn die Strahlen, die zunächst um den Mittelpunct des Objectivs einfallen, allein da wären, so hinge die Bestimmung der Lage eines Punctes, welcher durch den zusammenwirkenden Einflufs eines directen und

1 G. LXXIV. 337.

eines gebeugten Strahls erleuchtet wird, davon ab, dafs, wenn $AC = \gamma + \delta$ ist, BC um n ganze Wellenlängen kürzer als AB sey; sieht man also den Kreisbogen CD als ein Perpendikel auf AB an, so soll AD = nd, und folglich, wenn $AC = \gamma + \delta$ ist, Fig. 165.

$$\text{Sin. ABC} = \frac{\text{n d}}{\gamma + \delta}$$ seyn. Da dieses für die durch die Mitte des Objectivs gehenden Strahlen gilt, so gilt es für alle, welche mit jenen parallel sich in dem Bilde sammeln.

Die Versuche können nur dann, wenn $\gamma + \delta$ recht klein wird, darüber entscheiden, ob der Winkel oder der Sinus dem Werthe von $\frac{\text{n d}}{\gamma + \delta}$ proportional ist. FRAUNHOFER bediente sich, um diese Entscheidung durch Versuche zu erhalten, eines mit den zartesten Linien auf Glas gezeichneten Gitters; die Linien waren mit Diamant so gleichförmig eingeschnitten, dafs sich, obgleich $\gamma + \delta = 0{,}0001223$ Zoll war, dennoch keine in den Farbenbildern irgend merkliche Undeutlichkeit zeigte. Die Versuche gaben für einerlei Licht, nämlich für eine im Orange kenntliche Linie, die Ablenkungswinkel für die beiden ersten Spectra

$$= 10^\circ\, 14'\, 31'' \text{ und } = 20^\circ\, 49'\, 44''.$$

Die Sinus dieser Winkel sind

$$= 0{,}1778052 \text{ und } = 0{,}3555783,$$

so dafs der Winkel $= 20^\circ\, 49'\, 51''$, welchem der genau doppelte Sinus des erstern zugehört, nur wenig von dem beobachteten abweicht, statt dafs der doppelte Winkel $= 20^\circ\, 29'\, 2''$ sich um ganze 20 Minuten von der Beobachtung entfernt hätte[1].

Die Uebereinstimmung mit der Theorie läfst sich noch vollkommener nachweisen in Versuchen, wo das Gitter nicht senkrecht gegen die auffallenden Strahlen gestellt ist. Hier müssen die Spectra nicht mehr symmetrisch um die Mitte liegen, sondern an der einen Seite breiter, als an der andern seyn. Stellt nämlich ABC das Gitter, AB = BC die Abstände der Linien von einander $= \gamma + \delta$ vor, so ist der Unterschied der Wege für die nach B und nach C gelangenden Strahlen = BD $= (\gamma + \delta)\,\text{Sin.}\,\sigma$, wenn σ der Winkel ist, welchen die parallel einfallenden Strahlen mit dem Einfallslothe einschliefsen; es mufs also $CT - BT = (\gamma + \delta)\,\text{Sin.}\,\sigma + \text{nd}$ seyn, wenn in T das n te Spectrum soll gesehn werden. Sieht man hier den Fig. 166.

1 G. LXXIV. 349.

Bogen BE als ein Perpendikel auf CT an, so ist offenbar

$$\mathrm{Tang.\,BCT} = \frac{\sqrt{\{(\gamma+\delta)^2 - ((\gamma+\delta)\,\mathrm{Sin.}\,\sigma + \mathrm{nd})^2\}}}{(\gamma+\delta)\,\mathrm{Sin.}\,\sigma + \mathrm{nd}}$$

oder $\mathrm{Cos.\,BCT} = \mathrm{Sin.}\,\sigma + \frac{\mathrm{nd}}{\gamma+\delta}$, und $\mathrm{BTC} = 90° - \sigma - \mathrm{BCT}$.

Dagegen für den an dem Faden A nach t gebeugten Strahl muſs $\mathrm{Bt} - \mathrm{At} = \mathrm{nd} - (\gamma+\delta)\,\mathrm{Sin.}\,\sigma$ seyn, also

$$\mathrm{Tang.\,BAt} = \frac{\sqrt{\{(\gamma+\delta)^2 - ((\gamma+\delta)\,\mathrm{Sin.}\,\sigma - \mathrm{nd})^2\}}}{(\gamma+\delta)\,\mathrm{Sin.}\,\sigma - \mathrm{nd}}$$

also $\mathrm{Cos.}(180° - \mathrm{BAt}) = \mathrm{Sin.}\,\sigma - \frac{\mathrm{nd}}{\gamma+\delta}$ und

$$\mathrm{BtA} = 90° - \mathrm{BAt} + \sigma.$$

Unter den Versuchen mit eben jenem Gitter, wo $\gamma + \delta =$ 0,0001223 Zoll war, fanden sich die beiden ersten Spectra an beiden Seiten bei $\sigma = 55°$ und für eben den farbigen Lichtstrahl $= 30°\ 33'\ 10''$ und $= 15°\ 6'\ 36''$. Da nun für dieses orangefarbene Licht d = 0,00002175 paris. Zoll und hier n = 1 ist, so ergab sich $\mathrm{Cos.\,BCT} = \mathrm{Sin.}\,\sigma + 0{,}1778414$

$$\mathrm{Cos.}(180° - \mathrm{BAt}) = \mathrm{Sin.}\,\sigma - 0{,}1778414,$$

$$\mathrm{BCT} = 4°\ 26'\ 38''; \ 90° - \sigma - \mathrm{BCT} = 30°\ 33'\ 22''$$

$$180° - \mathrm{BAt} = 50°\ 6'\ 36''; \ 90° + \sigma - \mathrm{BAt} = 15°\ 6'\ 36''$$

beinahe aufs allerstrengste den Versuchen entsprechend.

Zum Schlusse dieser mit Gittern angestellten Versuche bemerke ich noch, daſs die Erscheinungen ganz gleich bleiben, wenn man zwei genau gleiche Gitter hinter einander stellt, dagegen die Erscheinungen sich so darstellen, wie es dem engern Gitter angemessen ist, wenn zwei ungleiche Gitter hinter einander aufgestellt werden.

Eine andere Reihe von Versuchen war bestimmt, um die Verschiedenheit der eben betrachteten Farbenbilder, welche Fraunhofer mittlere vollkommener Art nennt, und derjenigen näher kennen zu lernen, welche durch einen einzigen engen Spalt entstehen, und welche Fraunhofer äuſsere Farbenbilder nennt. Diese Versuche zeigen die Einwirkung einer geringen Anzahl gebeugter Strahlen auf einander. Wenn man vor ein Fadengitter einen Schirm mit einer schmalen Oeffnung stellt, und diese so verengert, daſs nur ein einziger Zwischenraum zwischen den Fäden offen bleibt, so sieht man die Spectra ebenso wie es vorhin bei einem einfachen Spalte an-

gegeben ist, wie Fig. 163. es darstellt, das heifst, sogleich an das mit Roth endigende erste Spectrum schliefst sich das Violett eines eben so breiten zweiten, an das Roth des zweiten das Violett eines eben so breiten dritten an u. s. w. Oeffnet man den Spalt des Schirmes so, dafs er genau zwei Zwischenräume des Gitters offen läfst, so hat sich das erste Farbenbild verändert, während das zweite, dritte u. s. w. unverändert bleiben. Jenes erste nämlich hat sich in eine Reihe neuer Farbenbilder KM′, M′M″.... Fig. 167. u. s. w. getheilt, welche in Rücksicht der Farbenfolge mit den vorigen übereinstimmen. Fraunhofer nennt sie mittlere Spectra unvollkommener Art. Wenn der Schirm das Licht durch drei Fadenzwischenräume auffallen läfst, so theilt das erste der bei zwei Strahlen entstandenen neuen Farbenbilder KM′ sich wieder in mehrere, die daher innere Farbenbilder heifsen; das zweite und die folgenden jener mittlern Farbenbilder unvollkommener Art bleiben ziemlich ungeändert. Bei vier Strahlen werden die im innersten Farbenbilde entstandnen Spectra kleiner und so fort bei mehreren eingelassenen Strahlen. Die mittlern Farbenbilder unvollkommener Art (das heifst das zweite, dritte, vierte der Farbenbilder, welche bei zwei Oeffnungen im Raume des einer Oeffnung entsprechenden ersten Bildes entstehen) bleiben wenig geändert, so lange die Zahl der frei gelassenen Oeffnungen geringe ist; bei einer gröfsern Anzahl freier Oeffnungen ändern sie sich in Hinsicht ihres Zusammenhanges und des Abstandes von der Mitte und gehen endlich in die mittlern Spectra vollkommener Art über. Als Hauptresultate giebt Fraunhofer folgende Sätze an: Bei einem und demselben Gitter, aber einer ungleichen Anzahl frei gelassener Fäden, verhalten sich die Abstände der Spectra innerer Art von der Axe und die Gröfse derselben umgekehrt wie die Anzahl der durch die schmalen Zwischenräume gebeugten Strahlen. Zum Beispiel bei dem Gitter, dessen Faden-Abstände = 0,007745 waren, theilte sich für zwei Oeffnungen das einer einzelnen Oeffnung entsprechende erste Farbenbild KL′ in vier, deren Grenzen die Abstände $M' = 4'\,32''$; $M'' = 13'\,32''$; $M''' = 22'\,42''$; $M^{IV} = 31'\,53''$ von der Mitte hatten; bei drei freien Oeffnungen theilte sich das erste derselben KM′ in zwei Spectra innerer Art, deren Breiten $N' = 3'\,1''$; $N'' = 5'\,57''$ (so dafs $N' = \frac{0{,}0000208}{3(\gamma+\delta)}$) betrugen; für die folgenden blieb $M'' = 12'\,16''$; $M''' = 22'\,11''$; $M^{IV} =$

31′ 44″, fast wie vorhin. Wurden mehr Oeffnungen frei gelassen, so gingen die Werthe von M″; M‴; M^{IV}... nur wenig herunter, so daſs sie bei acht Oeffnungen waren M″ = 11′ 4″; M‴ = 21′ 59″; M^{V} = 31′ 31″; aber die Theilung des ersten Raumes gab bei vier Strahlen N′ = 2′ 15″; N″ = 4′ 29″; N‴ = 6′ 35″, (also $N' = \frac{0{,}0000208}{4 \cdot (\gamma + \delta)}$) bei fünf Strahlen N′ = 1′ 45″; N″ = 3′ 34″; N‴ = 5′ 21″; bei sechs Strahlen N′ = 1′ 29″; N″ = 3′ 4″; N‴ = 4′ 30″; N^{IV} = 5′ 55″; bei sieben Strahlen N′ = 1′ 16″; N″ = 2′ 34″; N‴ = 3′ 50″; N^{IV} = 5′ 11″; bei acht Strahlen N′ = 1′ 4″,5; N″ = 2′ 15″; N‴ = 3′ 20″; N^{IV} = 4′ 27″; N^{V} = 5′ 40″.

Bei verschiedenen Gittern, aber gleicher Anzahl der offenen Zwischenräume verhalten sich die Abstände der Spectra innerer Art (die mit N′, N″ bezeichnet sind) umgekehrt wie der Abstand zwischen der Mitte zweier Fäden. Im Allgemeinen war $N' = \frac{0{,}0000208}{n(\gamma + \delta)}$, wenn n die Anzahl der Strahlen und $\gamma + \delta$ die Summe der Breite der Oeffnung und der Fadendicke bezeichnet.

Von den Versuchen, wo das Licht durch wenige runde Oeffnungen auf das Objectiv fiel, will ich nur einen anführen und die verkleinerte Zeichnung aus Fraunhofer's Abhandlung
Fig. 168. mittheilen. Hier waren in einem vor dem Objectiv angebrachten dünnen Bleche vier kreisförmige Löcher von 0,01596 Zoll Durchmesser so gestellt, daſs ihre Mittelpuncte die Eckpuncte eines Quadrats von 0,02897 Zoll Seite bildeten. Die Vergleichung dieser Erscheinung, in welcher die einzelnen Bilder nach ähnlichen Gesetzen wie bei den Gittern farbig sind, mit den bisher umständlicher erwähnten Farbenbildern bei schmalen Oeffnungen muſs ich übergehen. Ich füge nur die Bemerkung hinzu, daſs man ähnlich vervielfältigte Bilder, wenn gleich von minderer Schönheit, sich leicht verschaffen kann, wenn man nach einem recht hellen, aber nur einen kleinen Sehewinkel einnehmenden Lichte durch ein aus rechtwinklig sich durchkreuzenden Fäden bestehendes Gitter sieht. Die schon erwähnten Florbänder sind dazu als am allgemeinsten zur Hand zu empfehlen.

Die letzte Reihe der hier zu erwähnenden Versuche Fraunhofer's betrifft die durch gegenseitige Einwirkung gebeugten

reflectirten Strahlen. Er bediente sich eines auf einer Seite sorgfältig mit Goldblättchen belegten Planglases, wo in das Gold in genau gleichen Entfernungen Parallellinien radirt waren. Dieses Glas wurde so vor das Objectiv des Fernrohrs gestellt, dafs die vom Spalt des Heliostates kommenden Strahlen von der unbelegten Seite auf das Objectiv reflectirt wurden, und man sah nun alle Erscheinungen im Fernrohr, welche ein durch ein Gitter fallendes Licht darstellt, nämlich die mittleren Spectra vollkommener Art mit den darin kenntlichen Linien, und die Spectra äufserer Art. Die Ablenkungswinkel sind gröfser, als wenn das Licht durchgelassen wird, weil wegen der schiefen Richtung die parallelen Linien des Gitters so wirken, als ob sie enger an einander lägen.

Die Farben, welche sich hier zeigen, sind eben die schon im Artikel *Farbe* S. 100. erwähnten. Einige Versuche über dieselben hat schon Young angestellt [1].

Fraunhofer's Abhandlungen enthalten noch viel Lehrreiches, was ich, um diese Untersuchungen endlich zu schliefsen, übergehen mufs. Aber bemerken will ich noch, dafs in von Utzschneider's optischem Institute ein ungemein vortrefflicher Apparat zur Anstellung der wichtigsten hier erwähnten Versuche Fraunhofer's verfertigt wird. Es befinden sich dabei, aufser den Stücken, deren Beschreibung nicht zu meinem jetzigen Zwecke gehört, eine ganze Reihe solcher Gitter, wie sie hier erwähnt worden sind. Diese bestehen aus feinen Linien, die bei den meisten in eine auf Glas angebrachte Goldbelegung radirt, bei einer mit Diamant in Glas geschnitten sind; sie sind ungemein schön ausgeführt und geben Farbenspectra von den reinsten Farben. Aufserdem befinden sich dabei die zur Darstellung eines sehr engen Spaltes dienenden, durch feine Schrauben verschiebbaren Platten, das oben erwähnte Ocularprisma u. s. w. Die Gitter und der Spalt können auf eine vorn am Fernrohre aufzuschiebende Vorrichtung eingesetzt werden. Wenn man, da kein Winkelmesser dabei ist, das Fernrohr auf einem Theodoliten anbringen kann, so lassen sich auch die Messungen Fraunhofer's mit diesem Instrumente wiederholen.

Die im täglichen Leben uns oft vorkommenden, auf Beu-

1 G. XXXIX. 188.

gung des Lichtes beruhenden, Phänomene habe ich zum Theil gelegentlich schon erwähnt. Es gehören dahin die undeutlichen Ränder, die wir sehen, wenn wir einen dunkeln Körper vor einem sehr hellen Gegenstande vorbeiführen, die dunkeln Linien, die man zwischen zwei mit parallelen Seiten einander sehr genäherten dunkeln Körpern vor einem hellen Hintergrunde sieht, das anscheinend zu schnelle Gegeneinanderrücken dieser parallelen Seiten, wenn bei ungleichem Abstande der beiden dunkeln Körper vom Auge der Spalt sehr eng wird. Die Farbenbilder, die wir an dünnen cylindrischen Körpern, an Spinnenfäden, an unsern eigenen Haaren sehen, die ganz gleichmäſsig geordneten Farbenreihen, die sich an vielen neben einander stehenden kleinen Härchen, am Hutfilz u. dgl. zeigen, die Farben an feinen Ritzchen in Glas und andern Körpern gehören hieher. Einige Spiegel zeigen farbige Streifen, wenn man sich mit einem brennenden Lichte vor sie stellt, vermuthlich weil ihre Politur eine gleichförmige Reihe sehr feiner paralleler Linien enthält; sind diese parallelen Linien ungleich entfernt von einander, so zeigen sich nur unvollkommene Lichtschweife senkrecht auf die Richtung der Parallellinien, und diese Lichtschweife sind es, die sich an der Seite einer Lichtflamme zeigen, wenn wir sie durch ein Glas ansehen, auf welchem Fetttheilchen und dergleichen, nach einer einzigen Richtung abgewischt, sich in parallelen Linien angelegt haben. Das Schillern der Vogelfedern scheint mit den Farben überein zu stimmen, die wir an Glastafeln mit feinen eingerissenen Parallellinien sehen.

B.

Inklination s. Neigung.

Inklinatorium.

Neigungsnadel; *Acus inclinatoria;* Boussole d'inclinaison; *Dipping needle.* Ein Instrument, um den Winkel zu messen, unter welchem eine vollkommen aequilibrirte Magnetnadel im magnetischen Meridiane gegen den Horizont geneigt wird.

Die im nördlichen Europa allgemeine Erfahrung, daſs das Nordende einer gehörig abgeglichenen stählernen Nadel nach

dem Magnetisiren schwerer wird, mufste den Verfertigern von Compassen schon frühe auffallen. Doch nur der Engländer Robert Normann, Compafsmacher zu Ratcliff, war aufmerksam genug, die Wahrnehmung zum Versuche zu erheben, und diese Senkung durch eine eigens veranstaltete Einrichtung der Nadel zu messen. Er bestimmte sie im Jahre 1576 zu London auf 71° 50′. Die Angaben späterer Beobachter an andern Orten zeigten, dafs die Neigung mit der geographischen Breite zunehme, ja sogar, dafs sie (wenigstens im nördlichen Atlantischen Meere) auch mit der westlichen Länge gröfser werde. Dafs hierauf bald Vorschläge zur Bestimmung der Breite zur See und wohl auch zur Findung der so schwierigen Länge gegründet wurden, war natürlich. Die Möglichkeit des Letztern bemühte sich nebst Andern vorzüglich Henry Bond in einer eigenen Schrift[1] darzuthun. Aus Mangel an Beobachtungen war es ihm jedoch nicht möglich, diese Idee zur Ausführung zu bringen. Besser war dazu Whiston ausgerüstet, welcher die der Beobachtung abgehende Genauigkeit durch eine untaugliche Verlängerung der Nadel (von 2 bis 4 Fufs) ersetzen wollte. So wenig sich auch von diesem Vorschlage erwarten liefs, so ist doch nicht zu läugnen, dafs in gewissen Gegenden, bei anhaltend bedecktem oder neblichten Wetter und ruhiger See eine gute Neigungsbeobachtung dem Seefahrer wenigstens zur Breitenbestimmung einigermafsen dienen kann.

Die einfachste Darstellung eines magnetischen Inklinatoriums ist ein in vier Quadranten getheilter, verticaler Kreis, an einem Ringe so aufgehangen, dafs die Anfangspuncte a und b seiner Quadranten genau in der durchs Centrum c gehenden Verticallinie liegen. Auf dem Stege d e und einem zweiten dahinter liegenden befindet sich bei c in einer Höhlung die Queraxe der Nadel, und diese letztere ist so beschaffen, dafs sie im nichtmagnetischen Zustande in jedem Azimuth des Ringes genau horizontal liegt, gleichviel welche Seite der Nadel sich unterhalb oder oberhalb des Centrums befinde. Die Erfahrung zeigt jedoch, dafs diese Bedingung schwerlich mit der nöthigen Schärfe erreicht werden kann, indem durch die Wirkung des Erdmagnetismus alle stählernen Werkzeuge schon während der Bearbeitung mehr oder weniger magnetisch werden, so dafs es

Fig. 169.

1 The Longitude found. Lond. 1670.

beinahe unmöglich ist, die statische Abgleichung der Magnetnadel für sich allein zu bewerkstelligen. Die Reibung, welche die Enden der Queraxe in den Lagern erleiden, verhindert die Nadel, zumal wenn sie schwach magnetisirt und von einigem Gewichte ist, sich in die Richtung des magnetischen Stromes zu setzen; Excentricität, Theilungsfehler, Schwierigkeit der Schätzung beim Ablesen, nicht genau cylindrische Zapfen, inhärirender Magnetismus des messingenen Ringes sind ebensoviele Quellen von Ungenauigkeit, so dafs zuverlässige Neigungsbeobachtungen zu den sorgfältigern physikalischen Versuchen gehören [1], welche ebenso sehr die Genauigkeit des Künstlers bei Verfertigung des Werkzeuges, als die Gewandtheit des Experimentators beim Gebrauche desselben in Anspruch nehmen.

Die Mängel der früher gebrauchten Inklinatorien veranlafsten die Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1743, auf die beste Construction dieses Instruments einen Preis auszusetzen, den Daniel Bernoulli erhielt. Dieser suchte der Unvollkommenheit des Aequilibrirens der Nadel durch Anbringung eines kleinen Gewichtes zu begegnen, das um die Axe derselben be-
Fig. 170. weglich war. Auf die Queraxe der Nadel NS war nämlich als Gewicht ein kleiner Zeiger CQ aufgesteckt, dessen veränderliche Stellung auf dem eingetheilten Kreise AEQ bemerkt wurde. Es wurden dann alle Neigungen der Nadel notirt, welche dieselbe *vor* dem Magnetisiren bei den verschiedenen Stellungen des Zeigers darbot, wodurch man eine *Aequationstafel* erhielt, und eben diese Stellungen des Zeigers wurden sodann auch mit der magnetisirten Nadel durchprobirt. Die Lage der Nadel, welcher in beiden Fällen ein gleicher Stand des Aequations-Zeigers entsprach, gab die wahre Neigung zu erkennen. Kraft [2] und Albert Euler [3] verfolgten diesen sinnreichen Gedanken und der Erstere zeigte, wie man durch Anwendung einer kleinen Rechnung die Aequationstafel, deren Construction immer mühsam war, entbehrlich machen könne. So grofs auch die Sorgfalt war, die der geschickte Brander [4] als Künstler auf diese Inklinatorien verwendete, so entsprachen sie dennoch ihrem

1 Hansteen's Urtheile in Schumacher's astron. Nachr. No. 144.
2 Acta Acad. Petropol. A. 1778. P. 2. p. 170.
3 Hist. de l'Acad. de Berlin. A. 1755.
4 Beschreibung des magnet. Declinatorii und Inclinatorii. Augsburg 1779. 8.

Zwecke nur sehr unvollkommen, woran sowohl die Kleinheit der Eintheilung auf dem Aequationsringe, als auch die eben durch denselben vermehrte Belastung der Nadel und die Reibung ihrer Zapfen Schuld war. Dieser suchten die englischen Künstler durch Anbringung grofser Frictionsrollen zu begegnen, deren Zapfen aus einer Legirung von Gold und Kupfer bestanden und in Löchern von Glockenmetall liefen. Allein der zarte Bau dieser Räder macht die Genauigkeit ihrer Kreisform sehr zweifelhaft, und überdem waren auch diese Nadeln statt des Zeigers mit einem kleinen Kreuze beschwert, das vier stellbare Kügelchen als Momente trug, durch welche die Nadel dergestalt abgeglichen werden sollte, dafs sie in allen Lagen und auch nach Umwendung der Pole stets die nämliche Neigung zeigte. Solche Instrumente wurden von Nairne mit grofser Sorgfalt verfertigt, und auf Cook's zweiter Reise, auf Phips Reise nach dem Nordpole, auch auf Krusenstern's Expedition gebraucht; allein die mit denselben angestellten Beobachtungen sind keineswegs fehlerfrei und besonders setzte das angebrachte Abgleichungskreuz, wegen der veränderlichen Entfernung seiner Potenzen, noch mehr als der Aequationszeiger den Beobachter der Gefahr aus, die Neigung, die er suchte, selbst zu construiren.

In den neuern Zeiten ist man mit Vortheil wieder zu der einfachen ursprünglichen Idee einer Neigungsnadel zurückgekehrt. Man gleicht die Nadel durch Schleifen bestmöglich ab, giebt den Enden der Queraxe möglichst feine Zapfen und läfst diese auf horizontalen Achatflächen laufen. Das Verdienst dieser Verbesserung gehört Borda zu, und die Beobachtungen, welche Humboldt, Nouet, Biot in den Jahren 1799 bis 1805 mit einem so vereinfachten Instrumente von kleinen Dimensionen angestellt haben, so wie die Beobachtungen der neuesten französischen Entdekkungsreisen, scheinen die Vorzüge dieser Construction zu bestätigen.

Die Beobachtung selbst bleibt jedoch immer noch verschiedenen Einflüssen ausgesetzt, die der Künstler nicht ganz zu entfernen vermag. Schon die unleugbare Schwierigkeit, eine Nadel in völlig unmagnetischen Zustand zu versetzen, oder sie darin zu erhalten, macht eine genaue Aequilibrirung unmöglich. Eine geringe Polarität des einen Endes der Nadel wird ihn glauben machen, die Nadel sey ihrer Länge nach im Gleichgewicht, während dem sie es in Beziehung auf die Vertheilung der Materie wirklich nicht ist. Leichter möchte es seyn, zu erfahren,

ob die tragende Axe auch der Breite nach durch die Mitte der Masse gehe, indem eine Oberlast durch eine Geneigtheit zum Ueberschlagen, die Unterlast aber durch eine Tendenz zur horizontalen Lage sich verrathen würde; doch können auch diese Wirkungen durch einen etwelchen Magnetismus der Nadel noch einigermafsen verhüllt werden. Man pflegt daher sowohl beim Abgleichen der Nadel vor dem Magnetisiren, als auch bei der wirklichen Beobachtung die Nadel auf ihren Lagern so umzulegen, dafs die untere Seite der Queraxe nach oben zu liegen kommt. Sodann ist es zweitens die Frage, ob der Theilungskreis richtig d. h. so gestellt sey, dafs seine beiden Nullpunkte wirklich in der Horizontallinie liegen. Dieses kann direct durch ein Loth ausgemittelt werden, welches die Theilstriche von 90° oben und unten an der Theilung durchschneidet, oder man versieht das Inklinatorium mit einer verticalen Axe, an welcher es um 180° umgedreht werden kann, was die Engländer durch die Benennung *face East, face West* bezeichnen. Da aber hierbei die Nadel eine gegen die Weltgegenden verkehrte Richtung erhält, so ist sie genöthigt umzuschlagen, und so wird die Prüfung der Collimation mit der in No. 1. bemerkten Ungewifsheit vermischt. Der Fehler einer Excentricität 3) der Nadel wird durch Ablesen der Eintheilung an beiden gegenüber stehenden Enden berichtigt. Endlich ist es 4) keineswegs ausgemacht, dafs die Richtung des Magnetismus in der Nadel genau mit der geraden Linie zusammenfalle, welche beide Enden derselben verbindet. Dieses kann nur dadurch entschieden werden, dafs man mit einem hinreichend starken Magnete die Pole der Nadel umwendet, wodurch zugleich auch die in No. 1. erwähnte ungleiche Schwere der Hebelarme sich zu erkennen giebt. Die Beseitigung aller dieser Fragen hat daher allezeit vier Beobachtungen nöthig gemacht, um eine magnetische Neigung zu bestimmen; nämlich die östliche und westliche, (*face East* und *face West*) vor dem Umwenden der Pole, und eben diese nach demselben, wobei jedesmal das Mittel aus den diametral einander gegenüber stehenden Theilungsangaben genommen wird. Das arithmetische Mittel aus diesen vier Beobachtungen wurde bisher immer für die wahre Neigung angenommen, was eigentlich nur in dem Falle zulässig ist, wenn dieselben nur wenig von einander abweichen. Dem würdigen Sohne des berühmten Tobias Mayer in Göttingen gebührt das Verdienst, auf diese

Vernachlässigung zuerst aufmerksam gemacht und das Phänomen der Neigung einer genauen Untersuchung nach den Grundsätzen der Statik unterworfen zu haben[1].

Theorie der Messungen.

Es bezeichne nämlich c das Centrum der verticalen Bewegung der Neigungsnadel ab, die wir in dem magnetischen Meridiane uns denken, cn sey die senkrechte Richtung, ocm die Richtung des magnetischen Stromes und g der Schwerpunct der Nadel. Man setze ferner die beobachtete Neigung der Nadel gegen die Verticale cn oder den Winkel $acn = \varphi$, die wahre Neigung gegen eben diese Linie oder den Winkel $mcn = \alpha$, endlich den Winkel $acg = \eta$, so ist die Lage der Nadel das Resultat aus den zwei auf sie einwirkenden Kräften, der Kraft des magnetischen Stromes und der senkrecht herunterziehenden Kraft des Schwerpunctes g. Man kann sich die erstere Kraft, die wir mit M bezeichnen wollen, als am Ende des Hebels ac vereinigt denken, und sie durch $ac \times M$ ausdrücken, ohne uns um die Frage zu bekümmern, ob die Summe der in der Nadel enthaltenen magnetischen Kräfte wirklich im Endpuncte der Nadel sich befinde oder nicht, indem wir beide Factoren unbestimmt lassen. Von dieser Kraft wirkt nur der auf mc senkrechte Theil zur Drehung der Nadel; er ist also $= ac \times M \times \text{Sin.}\, mca$, oder (da $mca = mcn - acn$) $= ac \times M \times \text{Sin.}\,(\alpha - \varphi)$. Ebenso wird auch von der vertical wirkenden Kraft P, welche das Uebergewicht der Nadel im Schwerpuncte ausübt, nur der Theil gd zur Drehung verwendet, indem gf in der Richtung des Radius zieht. Es ist aber $gd = ge . \text{Sin.}\, ged$; und da $ged = fge = fcn = acn - acg$, so ist für den Hebelarm cg das Drehungsmoment $cg \times P \times \text{Sin.}\,(\varphi - \eta)$. Wenn also die Nadel in der Richtung ab ruht, so muſs $ac \times M . \text{Sin.}\,(\alpha - \varphi) = ge \times P . \text{Sin.}\,(\varphi - \eta)$ seyn. (I.) Setzt man $\frac{ge \times P}{ac \times M} = e$, und entwickelt die Sinus der Differenz zweier Winkel, so erhält man Fig. 171.

$$\text{Sin.}\,\alpha . \text{Cos.}\,\varphi - \text{Cos.}\,\alpha . \text{Sin.}\,\varphi = e . \text{Sin.}\,\varphi . \text{Cos.}\,\eta - e . \text{Cos.}\,\varphi . \text{Sin.}\,\eta;$$

und indem man durch Cos. φ dividirt

1 Commentatio de usu accuratiori acus inclinatoriae magneticae in den Comment. rec. Soc. reg. sedent. Gottingensis. Cl. Math. T. III. 1814. und in G. XLVIII. 229.

$$\text{Sin.}\,\alpha + e\,.\,\text{Sin.}\,\eta = e\,.\,\text{Tg.}\,\varphi\,.\,\text{Cos.}\,\eta + \text{Cos.}\,\alpha\,.\,\text{Tg.}\,\varphi, \text{ also}$$

$$\text{Tg.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + e\,.\,\text{Sin.}\,\eta}{\text{Cos.}\,\alpha + e\,.\,\text{Cos.}\,\eta} \quad \text{(II.)}$$

Der Winkel φ bezeichnet demnach die Richtung gegen die Verticallinie, in welcher die von den Kräften M und P sollicitirte Nadel zur Ruhe kommt. Kennte man e und η, so ließe sich aus der Beobachtung von φ der Winkel α oder das Complement der wahren magnetischen Neigung herleiten. Wäre die Nadel vollkommen aequilibrirt, so wäre $g e = 0$; also auch $e = 0$, und $\text{Tg.}\,\varphi = \text{Tg.}\,\alpha$, indem die Nadel einzig der Richtung des magnetischen Stromes folgen würde. Da aber eine solche Voraussetzung dem Zwecke dieser Untersuchung gerade entgegen ist, so müssen wir durch Veränderung des Versuchs die unbekannten Größen zu eliminiren suchen. Kehrt man nämlich die Nadel um, so daß die untere Seite die obere wird, so liegt g oberhalb der Axe: die Nadel muß daher unter einem andern Winkel, als zuvor, zur Ruhe kommen; der Winkel η wird negativ und wir erhalten in diesem Falle

$$\text{Tg.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha - e\,.\,\text{Sin.}\,\eta}{\text{Cos.}\,\alpha + e\,.\,\text{Cos.}\,\eta}$$

Wäre die Nadel so weit abgeglichen, daß sie im unmagnetischen Zustande genau horizontal läge, wobei der Schwerpunct g senkrecht unter c sich befinden würde, so hätte man $\eta = 90°$; also

$$\text{Tg.}\,\varphi = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + e}{\text{Cos.}\,\alpha} \text{ und } \text{Tg.}\,\varphi' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha - e}{\text{Cos.}\,\alpha}; \text{ mithin}$$

$$\text{Tg.}\,\varphi + \text{Tg.}\,\varphi' = 2\,\text{Tg.}\,\alpha. \quad \text{(III.)}$$

Um jedoch auch diese Annahme, deren genaue Erreichung in der Ausführung ziemlich schwierig seyn dürfte, entbehrlich zu machen, ist es rathsamer, durch Bestreichen mit einem kräftigen Magnete die Pole der Nadel umzuwenden. Dadurch erhalten wir noch zwei neue Bestimmungen von φ, in welchen der Schwerpunct g gegen den dominirenden Pol in eine Lage kommt, die den beiden vorigen diametral entgegengesetzt ist. In diesem Falle wird der Winkel η oder a c g stumpf, und somit sein Cosinus negativ, und wir haben

$$\text{Tg.}\,\varphi'' = \frac{\text{Sin.}\,\alpha + \varepsilon\,.\,\text{Sin.}\,\eta}{\text{Cos.}\,\alpha - \varepsilon\,.\,\text{Cos.}\,\eta}, \text{ wobei } \varepsilon \text{ statt e gesetzt}$$

Fig. 172 bis 175. wird, indem nicht anzunehmen ist, daß die Nadel nach dem Umwenden der Pole einen gleich starken Magnetismus wie vorher erhalte. Man hat also für die vier in den Figuren bezeich-

neten Lagen der Nadel folgende Gleichungen, in welchen wir die Werthe von φ durch die Buchstaben F, f, G und g unterscheiden wollen:

für Fig. 172. $\text{Tg.F} = \dfrac{\text{Sin.}\alpha + e\,.\,\text{Sin.}\eta}{\text{Cos.}\alpha + e\,.\,\text{Cos.}\eta}$

für Fig. 173. $\text{Tg.f} = \dfrac{\text{Sin.}\alpha - e\,.\,\text{Sin.}\eta}{\text{Cos.}\alpha + e\,.\,\text{Cos.}\eta}$

für Fig. 174. $\text{Tg.G} = \dfrac{\text{Sin.}\alpha + \varepsilon\,.\,\text{Sin.}\eta}{\text{Cos.}\alpha - \varepsilon\,.\,\text{Cos.}\eta}$

für. Fig. 175. $\text{Tg.g} = \dfrac{\text{Sin.}\alpha - \varepsilon\,.\,\text{Sin.}\eta}{\text{Cos.}\alpha - \varepsilon\,.\,\text{Sin.}\eta}$

Aus der ersten erhalten wir

$$e = \frac{\text{Tg.F}\,.\,\text{Cos.}\alpha - \text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}\eta - \text{Tg.F}\,.\,\text{Cos.}\eta}$$ und aus der zweiten

$$-e = \frac{\text{Tg.f}\,.\,\text{Cos.}\alpha - \text{Sin.}\alpha}{\text{Sin.}\eta + \text{Tg.f}\,.\,\text{Cos.}\eta}.$$ Dividirt man durch Cos. η, so wird

$$(\text{Tg.F}\,.\,\text{Cos.}\alpha - \text{Sin.}\alpha) \times (\text{Tg.}\eta + \text{Tg.f})$$
$$= (\text{Sin.}\alpha - \text{Tg.f}\,.\,\text{Cos.}\alpha) \times (\text{Tg.}\eta - \text{Tg.F})$$

Also auch $2\,.\,\text{Sin.}\alpha\,.\,\text{Tg.}\eta - (\text{Tg.F} + \text{Tg.f})\,\text{Cos.}\alpha\,.\,\text{Tg.}\eta$
$= \text{Tg.F}\,.\,\text{Sin.}\alpha - \text{Tg.f}\,.\,\text{Sin.}\alpha$; mithin

$$\text{Tg.}\eta = \frac{(\text{Tg.F} - \text{Tg.f})\,.\,\text{Sin.}\alpha}{2\,.\,\text{Sin}\,\alpha - (\text{Tg.F} + \text{Tg.f})\,\text{Cos.}\alpha} \quad \text{(IV.)}$$ Ganz auf dieselbe Weise erhält man aus der dritten und vierten Gleichung

$$\text{Tg.}\eta = \frac{(\text{Tg.G} - \text{Tg.g})\,.\,\text{Sin.}\alpha}{(\text{Tg.G} + \text{Tg.g})\,\text{Cos.}\alpha - 2\,.\,\text{Sin.}\alpha}.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen die Summe der Tangenten von F und f mit M, ihre Differenz mit m, ebenso die Summe der Tangenten von G und g mit N, ihre Differenz mit n, so ist mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors Sin. α,

$$m\,.\,N\,.\,\text{Cos.}\alpha - m\,.\,2\,\text{Sin.}\alpha = n\,.\,2\,\text{Sin.}\alpha - n\,.\,M\,.\,\text{Cos.}\alpha,$$

oder indem man durch Cos. α dividirt

$$m\,.\,N\,. - m\,.\,2\,\text{Tg.}\alpha = n\,.\,2\,\text{Tg.}\alpha - n\,.\,M;$$ also

$$2\,\text{Tg.}\alpha = \frac{m\,.\,N + n\,.\,M}{m + n}.$$

Da man gewöhnt ist, die Neigung der Nadel auf die Horizontallinie zu beziehen, so ist $i = 90° - \alpha$; also

$$2\,.\,\text{Cotg}\,i = \frac{m\,.\,N}{m + n} + \frac{n\,.\,M}{m + n},$$

wobei jedoch die Winkel F, f, G, g als Abstände vom Fuſspunct gemessen werden. Ist das Instrument so getheilt, daſs die beiden Nullpuncte in der Horizontallinie liegen, so muſs man natürlich die Cotangenten dieser Winkel nehmen. Ist der Einfluſs des Schwerpunctes der Nadel so groſs, daſs das Nordende der Nadel in den südlichen Quadranten übertritt, so ist jener Winkel und seine Tangente negativ. Ein Beispiel aus Mayer's trefflicher Abhandlung, aus welcher diese ganze Darstellung entnommen ist, wird diese für genaue Bestimmungen unentbehrliche Methode erläutern.

Mayer beobachtete am 2. März 1814 in Göttingen folgende Zenithdistanzen der Nadel:

$$F = 56^\circ 45'; \; f = -32^\circ 13'; \; G = 50^\circ 12'; \; g = -28^\circ 10'.$$

Es ist nun

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\text{Tg.}\,F = & 1{,}5252 & \text{Tg.}\,G = & 1{,}2002 \\
\text{Tg.}\,f = & -0{,}6301 & \text{Tg.}\,g = & -0{,}5354 \\
\hline
M = & 0{,}8951 & N = & 0{,}6648 \\
m = & 2{,}1553 & n = & 1{,}7356
\end{array}$$

$$m + n = 3{,}8909$$

$$\begin{array}{lr@{\qquad}lr}
\text{Log.}\,m = & 0{,}33350 & \text{Log.}\,n = & 0{,}23944 \\
\text{Log.}\,N = & 9{,}82269 & \text{Log.}\,M = & 9{,}95187 \\
\hline
\text{Log.}\dfrac{m \,.\, N}{m+n} = & 9{,}56625 & \text{Log.}\dfrac{n \,.\, M}{m+n} = & 9{,}60137
\end{array}$$

Zu diesen Logarithmen gehören die Zahlen 0,36835 und 0,39931; ihre halbe Summe ist 0,38383 gleich der Tangente von 69° 0',2.

Sind M und N gleich, so ist dieses ein Zeichen, daſs die Nadel ihrer Länge nach richtig abgeglichen sey, und dann bedarf es des Umwendens der Pole nicht. Wären auch F und f, und ebenso G und g gleich, so wäre die Nadel auch der Quere nach gleichförmig, das Umlegen derselben wäre überflüssig und jede einzelne Beobachtung gäbe sogleich die richtige Neigung an. Da jedoch dieses Umlegen keine Schwierigkeit macht, so hat man nur darauf zu sehen, daſs man der in Formel (III.) ausgesprochenen Bedingung genüge, und η dem rechten Winkel möglichst nahe bringe. Man kann jedoch nach dem schicklichen Rathe von G. G. Schmidt[1] jene Umkehrung der Pole dazu benutzen, um ein- für allemal den Winkel η an einer Nadel zu bestimmen, und dann mit Hülfe desselben die Neigung aus einem einzigen Beobachtungspaare ohne Umkehrung der Pole ab-

1 G. LXIII. 1—16.

zuleiten; was um so wünschenswerther ist, da diese Operation dann doch die zarten Enden der Queraxe einer öftern Gefahr der Verletzung aussetzt, und ihre Ausführung leicht durch Zeit und Umstände erschwert werden kann.

Man hat nämlich mit Beibehaltung der angenommenen Bezeichnung nach (IV.)

$$\text{Tg.}\,\eta = \frac{\text{m}\,.\,\text{Sin.}\,\alpha}{2\,.\,\text{Sin.}\,\alpha - \text{M}\,.\,\text{Cos.}\,\alpha} = \frac{\text{n}\,.\,\text{Sin.}\,\alpha}{\text{N}\,.\,\text{Cos.}\,\alpha - 2\,.\,\text{Sin.}\,\alpha} \text{ oder}$$

$$\text{Cotg.}\,\eta = \frac{2 - \text{M}\,.\,\text{Cot.}\,\alpha}{\text{m}} = \frac{\text{N}\,.\,\text{Cot.}\,\alpha - 2}{\text{n}}, \text{ mithin}$$

$$\text{Cotg.}\,\alpha = \frac{2 - \text{m}\,.\,\text{Cot.}\,\eta}{\text{M}} = \frac{\text{n}\,.\,\text{Cot.}\,\eta + 2}{\text{N}} \text{ (V.) also}$$

$$(\text{m}\,.\,\text{N} + \text{n}\,.\,\text{M})\,\text{Cot.}\,\eta = 2\text{M} - 2\text{N} \text{ oder}$$

$$2\,\text{Tg.}\,\eta = \frac{\text{m}\,.\,\text{N}}{\text{M} - \text{N}} + \frac{\text{n}\,.\,\text{M}}{\text{M} - \text{N}}. \text{ (VI.)}$$

In obigem Beispiel ist M — N = 0,2303;

Log. mN	= 0,15619	Log. nM	= 0,19131
Log. 2(M—N)	= 9,66332	Log. 2(M—N)	= 9,66332
num. Log.	0,49287	num. Log.	0,52799
	= 3,1107		= 3,3728;

ihre Summe 6,4835 ist die Tangente von $\eta = 81^\circ\ 13',9$ oder vielmehr von $98^\circ\ 46',1$; denn da $F = 56^\circ > \alpha\ (= 21^\circ)$ ist, so mufs der Schwerpunct g in der südlichen Häfte der Nadel liegen und η oder acg ist hier ein stumpfer Winkel. Hätte man also nur F und f beobachtet, so wäre nach Formel (V.)

$$\text{Cot.}\,\alpha = \text{Tg.}\,\text{i} = \frac{2 - \text{m}\,.\,\text{Cot.}\,\eta}{\text{M}},$$ wobei Cot. η das Zeichen wechselt. Man erhält demnach

Log. m	= 0,33350		
Log. Cot. η	= 9,18819	+ 2,	
num. Log.	9,52169	= + 0,3324	
		Log. 2,3324	= 0,36780
		Log. M	= 9,95187
		Log. Tg. 69° 0',2	= 0,41593

Beobachtungen aufser dem Meridiane.

Man hat auch vorgeschlagen, durch Beobachtungen aufser dem magnetischen Meridiane die wahre Neigung zu bestimmen. An sich scheint es bei so delicaten Beobachtungen nicht rathsam,

die ohnehin schwache Wirkung des magnetischen Stromes noch durch eine ungünstige Richtung zu verringern. Doch möchte in seltenen Fällen, wo entweder die Meridianrichtung nicht zu erhalten wäre, oder etwa um die Rundung der Zapfen in verschiedenen Neigungen zu prüfen, ein solcher Versuch statt finden. Welche Neigungen die Nadel in den verschiedenen Abweichungen vom Meridiane annehme, läſst sich leicht auffinden. Es sey nämlich MDAF der Azimuthalkreis, MA der magnetische Meridian; in C befinde sich die Queraxe der Nadel, welche ihr nur eine Erhebung und Senkung in der Richtung des jedesmaligen Azimuths erlaubt; CA, CD, CF seyen solche Neigungen. Da nun der magnetische Strom einzig nach der Richtung des Meridians wirkt, so bleibt von der Kraft, die er im Meridiane ausübt, und die durch AI als Tangente der Zenithdistanz der Nadel ausgedrückt wird, in der Richtung ID nur der Theil ED übrig, und diese Gröſse hat man auf der Richtung ID aufzutragen, so daſs IB = ED. Die Verlängerung der Nadel beschreibt mithin auf der Ebene ADMF einen Kreis, dessen Durchmesser dem Maximum ihres Zenith-Abstandes AI gleich ist. Es ist nämlich ED = IK = IB, und die Dreiecke IKD und IBA, in welchen der Winkel I von gleichen Seiten eingeschlossen ist, sind einander gleich; das letztere ist also in B rechtwinklig, eine Eigenschaft, welche nur dem Winkel an der Kreislinie, deren Diameter AI ist, zukommt. Die Zenith-Abstände der Nadel (IG = HF) nehmen also ab, wenn die Abweichung vom Meridiane zunimmt, und sind Null, wenn die Ebene der Nadel mit demselben einen rechten Winkel bildet. Alsdann ist die dirigirende Kraft des magnetischen Stromes ganz wirkungslos, weil sie parallel mit der Queraxe geht, und die Nadel folgt nur dem noch übrigen verticalen Zuge des schief niedergehenden Stromes; sie steht *senkrecht*. Bezeichnet nun AI die Tangente der magnetischen Zenithdistanz im Meridiane, so ist im Dreiecke BAI die Linie $BI = AI \times Cos. AIB$, also $AI = \frac{BI}{Cos. AIB}$, oder, wenn man das magnetische Azimuth der Nadel mit ω, ihre in demselben beobachtete Zenithdistanz mit F' bezeichnet, $Tg. F = \frac{Tg. F'}{Cos. \omega}$. Da man die Nadel auch in umgekehrter Lage beobachten muſs, so ist auch $Tg. f = \frac{Tg. f'}{Cos. \omega}$;

(Margin: Fig. 176. beside "gen vom Meridiane"/"sey nämlich"; Fig. 177. beside "gleich ist"/"IKD und IBA")

überhaupt $M = \frac{Tg. F' + Tg. f}{Cos. \omega}$ und $m = \frac{Tg. F' - Tg. f}{Cos. \omega}$. Aehnliche Resultate erhält man, wenn man die Nadel auch nach der entgegengesetzten Seite des Meridians um eben so viel abweichen läfst, so dafs diese Operation, insofern man den Abweichungswinkel nicht sehr grofs annimmt, allerdings den Vortheil gewährt, eine gröfsere Zahl von Beobachtungen zu liefern, wodurch die Ungenauigkeit der einzelnen Angaben einigermafsen compensirt wird. Doch ist nicht zu vergessen, dafs man hieraus nicht das Complement der wahren Neigung, sondern nur das Maximum der Zenithdistanzen erhält, welches für eine gegebene Nadel an einem Orte möglich ist. Die wahre Neigung mufs alsdann entweder durch Umwendung der Pole, oder durch Zuziehung des Winkels η nach Formel (V.) hergeleitet werden. Läfst man die Nadel zu beiden Seiten des Meridians um 45° abweichen, so wird der Winkel bei I ein rechter und man hat $Tg.^2 F' + Tg.^2 f' = Tg.^2 F$.

Methode der Schwingungen.

Noch sind einige indirecte Methoden zur Bestimmung der Inklination vorgeschlagen worden, die als Mittel zur Controle der directen Messungen ihren Werth haben, mit dem nämlichen Apparate sich anstellen lassen, und bei gehöriger Vorsicht eine hinreichende Genauigkeit gewähren. Sie beziehen sich sämmtlich auf den Satz: dafs die Schwingungen, die eine um ihren Schwerpunct bewegliche Nadel in verschiedenen Ebenen vollführt, den Kräften proportional seyen, die in diesen Ebenen auf sie wirken, oder genauer ausgedrückt: dafs die Quadrate der Schwingungszeiten zweier Pendel von gleicher Länge sich umgekehrt, wie die sollicitirenden Kräfte verhalten. Stellen wir diese durch Linien dar, so dafs ca die Kraft des magneti- Fig. 178. schen Stromes im Meridiane und in der Richtung der Neigungslinie ausdrücke, so bezeichnet ad denjenigen Theil derselben, welcher in der verticalen Richtung cn (d. h. nach dem Vorigen, in der auf den Meridian senkrechten Ebene) wirksam ist, und cd den Theil, in welchen sie nach der horizontalen Richtung zerlegt wird. Lassen wir also eine und dieselbe Nadel in den drei auf einander senkrechten Ebenen, 1. im magnetischen Meridiane, 2. in der Richtung von Ost und West, und

3. in horizontaler Lage um ihr Centrum eine gleiche Anzahl von Schwingungen vollenden, so geben uns die Quadratzahlen dieser Schwingungszeiten drei Gröſsen an die Hand, aus deren Verhältnissen wir nach den Lehren der Trigonometrie den Neigungswinkel i bestimmen können. Es ist nämlich, wenn wir die magnetische Kraft ca in der Richtung der Neigungslinie mit M, ihren verticalen Theil da mit P, den horizontalen cd mit H bezeichnen,

(1) $M : P = 1 : \text{Sin.}\, i$;
(2) $M : H = 1 : \text{Cos.}\, i$; und
(3) $H : P = 1 : \text{Tg.}\, i$.

Da nun die Quadrate der entsprechenden Schwingungszeiten m, p, h diesen Kräften *umgekehrt* proportional sind, so ist

$$\text{Sin.}\, i = \frac{m^2}{p^2};\ \text{Cos.}\, i = \frac{m^2}{h^2},\ \text{und Tg.}\, i = \frac{h^2}{p^2}.$$

Ein Beispiel möge dieses zu erläutern dienen. Im September 1821 machte Capt. SABINE[1] in London folgende Beobachtungen: Im Meridiane machte eine wohl abgeglichene Neigungsnadel 70 Schwingungen in 260,25 Zeitsecunden; senkrecht auf demselben brauchte sie dazu 268,38 Sec. und in der horizontalen Lage 445,5 Sec. Man hat also

Log. m = 2,41539	2,41539	Log. p = 2,42875
Log. p = 2,42875	Log. h = 2,64885	2,64885
9,98664	9,76654	9,77990
multipl. mit 2 = 9,97328	9,53308	9,55980
Log. Sin. (i = 70° 6',5)	Log. Cos. 70° 2',8	Log. Tg. 70° 2',2.

Der bloſse Anblick der Figur zeigt, daſs die erste dieser Methoden, die von LA PLACE herrührt, desto genauer wird, je geringer die Neigung ist; daher sie vorzüglich für geringe Breiten sich eignet. Die zweite, die von SABINE zuerst ausgeführt wurde, ist dagegen in hohen Breiten zu empfehlen. Die dritte, von COULOMB zuerst vorgeschlagen, paſst am besten für mittlere Neigungen.

Bei den Versuchen selbst ist Folgendes zu beobachten: 1. Die Nadel, die man schwingen läſst, muſs möglichst gut aequilibrirt seyn. Man erreicht dieses entweder durch ein angestecktes Kreuz mit vier Kugeln, oder nach SABINE's Beispiele durch einen am leichteren Schenkel umgebundenen Seidenfaden,

1 Philos. Trans. f. 1821 und G. LXXVI. 17.

oder durch ein Stück angeklebtes Wachs. 2. Die Schwingungsbogen, bei denen man anfängt zu zählen, dürfen nicht allzugrofs seyn, wenigstens nicht über 30 Grade betragen. 3. Beim Zählen derselben ist folgendes Verfahren zu empfehlen: Man bemerke an einer guten, gleichförmig gehenden Secundenuhr das genaue Ende der 1., 3., 5., 7. und 9. Schwingung, mache sodann eine Pause während der zehn folgenden, und notire wieder das Ende der 10., 13., 15. etc. bis zur 19. Auf gleiche Weise bemerke man die ungeraden Schwingungen der zwanziger, dreifsiger und der folgenden Reihen. Zieht man diese Angaben von einander ab, so erhält man eine bedeutende Menge von Werthen, welche die Dauer von 10 Schwingungen ausdrücken. Es genügt auch, nur je die 10., 20., 30. Schwingung zu notiren, oder überhaupt auch gröfsere Intervalle anzunehmen[1]. Die Zeiten sollten, wo möglich, in Zehntelsecunden, nach dem Gebrauche der Astronomen, angegeben werden; nicht unbequem ist es, sich hierbei von einem Gehülfen entweder die Secunden zählen oder wenigstens die Momente schreiben zu lassen. 4. Die Schwingungen in den beiden verticalen Ebenen lassen sich allerdings am besten durch die Nadel des Inklinatoriums bewerkstelligen. Um jedoch auch eben diese Nadel zu den horizontalen Schwingungen zu benutzen, hänge man dieselbe an einem ungezwirnten Seidenfaden auf, welcher an der Queraxe befestigt wird, wozu entweder ein durchgebohrtes Loch oder auch die in derselben eingedrehte Furche, deren unten gedacht werden soll, dienen kann. Dafs der herabsinkende Pol der Nadel beschwert werden, überhaupt dafs die Nadel in horizontaler Ebene schwingen müsse, bedarf wohl keiner besondern Erwähnung. 5. Auch die horizontalen Schwingungen müssen in einem verschlossenen Glaskasten vor sich gehen. 6. Die Beobachtungen der Nadelschwingungen in den verschiedenen Ebenen sollten wenigstens in der nämlichen Stunde und bei gleicher Temperatur vorgenommen werden. Dafs sie an der nämlichen Stelle und entfernt von Wänden oder von versteckten Eisenmassen, am besten im Freien, geschehen, ist nicht minder wesentlich.

Bei der grofsen Genauigkeit, mit welcher sich die Schwin-

1 Beispiele dieser Methode findet man in G. LXXVI. in Sabine's Abhandlung, und ähnliche von Hansteen LXVIII. 268.

gungszeiten als Mittelzahl vieler Angaben bestimmen lassen, giebt diese dreifache Anwendung der Schwingungsmethode unter Beobachtung der angeführten Vorsichtsregeln Resultate, die an Genauigkeit und Zuverlässigkeit mit denen der directen Messung wetteifern können. Sie hat überdies den Vorzug der Einfachheit, indem sie den eingetheilten Kreis und das Umwenden der Pole entbehrlich macht. Die Uhr, deren man sich bedient, braucht nicht berichtigt zu seyn, und ihr Gang mufs nur auf kurze Zeit sich gleich bleiben, was schon von einer guten Cylindertaschenuhr, insofern die Temperatur sich nicht ändert, sich erwarten läfst. Auch auf Schiffen möchte sie bei den langsamen Schwankungen auf ruhiger See noch eben so genaue Resultate gewähren, als die Messung am Gradbogen; nur mufs, wie auch bei der directen Beobachtung, darauf gesehen werden, dafs während des Versuchs das Schiff sein Azimuth nicht ändere. Weniger hingegen möchte die Methode der Schwingungen zur Untersuchung der geringen täglichen oder stündlichen Variationen der Neigung sich eignen, da bei den verticalen Schwingungen die Reibung der Axe es unmöglich macht, eine hinreichend grofse Anzahl derselben zu erhalten. Weit eher dürfte dieser Zweck durch eine leichte Nadel von ungewöhnlicher Länge erreicht werden, die, an ihrem südlichen Ende als Centrum nach Art der Sortir- oder Garnwagen aufgehängt, ihre ganze Ausdehnung zum Radius des zu messenden Bogens darböte.

Der Vollständigkeit wegen mag hier noch eine Beschreibung des Verfahrens folgen, durch welches Coulomb das Verhältnifs der magnetischen Kräfte in der horizontalen und in der verticalen Richtung zu bestimmen suchte [1]. Von dem vorher erwiesenen Satz ausgehend, dafs die Summe der Momente aller Kräfte, welche eine horizontale Nadel dem magnetischen Meridiane zutreiben, durch die Formel $\frac{pl^2}{3\lambda}$ ausgedrückt werde, in welcher p das Gewicht der Nadel, l ihre halbe Länge, und λ die Länge des einfachen Pendels bezeichnen, das mit der Nadel gleichzeitige Schwingungen macht, bestimmte er zuerst durch directen Versuch das Gewicht der Nadel und die Dauer ihrer horizontalen Schwingungen, nebst dem Gewichte, mit welchem ihr südliches Ende beschwert werden mufste, um sie in die ho-

1 Mém. de l'Institut. T. IV. p. 565.

rizontale Lage zu bringen. Aus den beiden ersteren Gröfsen berechnete er mit Hülfe der obigen Formel das horizontale, aus dem Letztern das verticale Moment der Nadel, beide für die Einheiten der Länge und des Gewichts, nach welchen die Länge der Nadel, ihr Gewicht und die Entfernung des Gegengewichts angegeben wurden. Da die Nadel nicht aequilibrirt war, so mufsten ihre Pole umgewendet und sie gerade so stark magnetisirt werden, dafs ihre Schwingungszeit von der vorigen nicht merklich abwich; auch mufste der Versuch mit dem Gegengewichte wiederholt werden. Bei Coulomb's Nadel war $p = 88{,}808$ Grammes, $l = 213{,}3$ Millimeter, und da sie 50 Schwingungen in 495 Sec. machte, so ergiebt sich $\lambda = 994\left(\frac{495}{50}\right)^2$ und hieraus das horizontale Moment $\frac{pl^2}{3\lambda} = 13{,}824$ Gr. auf 1 Millim. Abstand vom Centrum der Nadel. Um sie horizontal zu stellen, bedurfte es eines Gewichts von 0,2 Gr. in 170,5 M.M. Distanz von der Axe, und nachdem die Pole umgewendet und die Nadel wieder bis auf den nämlichen Sättigungsgrad magnetisirt war, so dafs ihre horizontalen Schwingungen mit den vorigen gleichzeitig wurden, war ein Gewicht von 0,2093 Gr. in 194,5 M.M. Distanz erforderlich. Man erhält hieraus für das verticale Moment im Mittel 37,348 Gr. auf 1 M.M. Abstand. Der Quotient beider Kräfte nämlich $\frac{37{,}348}{13{,}824}$ giebt $2{,}70167 = \text{Tg.}\, 69^\circ\, 41',3$, als die Neigung in Paris um das Jahr 1798.

Instrumente.

Wir kommen nun zur Beschreibung der zum Beobachten erforderlichen Instrumente, und zwar geben wir zuvörderst ein Inklinatorium an, welches bei möglichster Einfachheit die von einem physikalischen Versuche zu erwartende Genauigkeit zu Fig. gewähren verspricht, und zugleich den verschiedenen Beobach- 179 tungsmethoden sich anpassen läfst. a b a′ b′ ist ein viereckiger und 180. Rahmen von Messing (bestimmt, den Kreis c d und das Gestelle der Nadel zu tragen), welcher auf die Aufsätze p p′ an den hölzernen Seitenwänden des Glaskastens A B aufgelegt wird. Er ist von hinreichender Höhe und Dicke, um ungeachtet der kreisrunden Durchbrechungen nahe an seinen Enden dennoch die

gehörige Steifheit zu behalten, und doch von der Eintheilung so wenig als möglich zu bedecken. Auf seiner Aufsenseite und in der Mitte seiner Länge sind die beiden Lager l und l′ angeschraubt, welche zwei schmale hervorragende Achatstücke e und
Fig. 181. e′, deren Seiten etwas keilförmig geschliffen sind, durch Anpressung festhalten. Die oberen Kanten dieser Achate müssen, wenn sie einmal an dem Rahmen unveränderlich befestigt sind, zugleich mit einer planen Fläche abgeschliffen werden, (wozu ein planer, feiner Schleifstein dienen kann,) damit sie genau in einer Ebene liegen. Auf diese möglichst polirten Achate werden die dünnen Zapfen der Queraxe der Nadel sachte hingelegt, was vermittelst des beweglichen Rahmens m n m′ n′ bewerkstelligt wird. Dieser ist der Seitenansicht nach dem Rahmen a b a′ b′ völlig gleich, und an den gleichen Stellen durchbrochen, so dafs er, wenn die Nadel frei spielt, von der Seite her gar nicht sichtbar ist. In seiner Mitte befinden sich, etwas erhöht, rechtwinklige, gabelförmige Einschnitte, welche die Axe der
Fig. 182. Nadel in zwei eingedrehten Rinnen r r′ unterstützen. Die Nadel selbst ist auch nach ihrer Dicke keilförmig gestaltet, damit ihre Enden auch beim Umwenden derselben in die Ebene der Vorderseite des Kreises zu liegen kommen. Da die Enden der Nadel, wenn sie auf die Achate abgesetzt ist, die innere Kante des Kreises beinahe berühren müssen, so mufs dieselbe in einer schräg herunter steigenden Richtung in ihre Lage gebracht werden. Zu diesem Ende ist der Rahmen m n m′ n′ an seinem Ende m m′ um einen Zapfen seitwärts beweglich, während die verti-
Fig. 179 und 180. cale Erhebung durch die Federung dieses Endstückes möglich wird. Diese Erhebung und Senkung des Rahmens wird an seinem andern Ende n n′ durch eine excentrische Scheibe u bewirkt, auf welcher er aufliegt, und die vermittelst des von aufsen angepafsten Schlüssels y... umgedreht wird. Ein Paar abweisende Stifte im Innern des Rahmens a b sind hinreichend, die erforderliche Seitenbewegung des Rahmens m n m′ n′ hervorzubringen. Am Gestelle a b hängt an der Rückseite das Niveau f f′..., welches den horizontalen Stand der Achatlager versichern soll. Um es einzustellen, wird über diese ein Spiegelglas von parallelen Flächen gelegt, auf dieses ein anderes freies Niveau, und das Instrument vermittelst der drei Stellschrauben s s′ s″ abgeglichen; nachher giebt das feste Niveau Rechenschaft von dem Stande der Zapfenlager. Ein kleines Querniveau im Fufse des Kastens wird

auf gleiche Art berichtigt, und versichert die Horizontalität auch in der andern Richtung. Der Kasten ist in der Richtung seiner gröſsten Ebene durch zwei in hölzerne Rahmen verkittete Glastafeln verschlossen, von denen die hintere weggenommen werden kann, um die Nadel einlegen zu können. Die vordere ist in der Mitte durchbohrt, und daselbst ein Gewinde q eingekittet, welches die Zapfenbewegung zweier Mikroskope r r′ aufnimmt, die auf die Enden der Nadel gerichtet werden können. Man kann dieselben, wenn sie aus zwei Linsen bestehen, mit einer Glasscale versehen, welche die Subdivisionen der Abtheilungen des Kreises, die bei einem Durchmesser von 8 Zollen etwa auf 20 Minuten gehen mögen, enthält. Das nämliche Gewinde dient auch, um, wenn man zur Beobachtung der horizontalen Schwingungen den Kasten umlegt, eine Glasröhre einzuschrauben, welche den Seidenfaden zur horizontalen Aufhängung der Nadel in sich schlieſst. Im Boden des Kastens befindet sich ein Loch, dessen oberer Theil bestimmt ist, einem Senkel t Raum zu geben, das etwa vom Deckel herunter gelassen wird, und die richtige Stellung der Verticalpuncte der Theilung zu versichern dient. Der untere Theil z paſst auf einen hölzernen Zapfen, der bei erforderlicher Drehung des Instrumentes in verschiedene Azimuthe als Centrum dient. Da es nämlich rathsam ist, die Beobachtungen nicht im Zimmer, sondern wo möglich immer im Freien anzustellen, so gehört zu diesem Inklinatorium ein Bret, in welches sich nöthigen Falls drei Füſse einschrauben lassen, und das an seiner obern Fläche weiſs angestrichen ist, um eine Gradeintheilung zu erhalten, welche sich mit schwarzem Firniſs vermittelst einer Reiſsfeder mit hinreichender Schärfe auftragen läſst. Im Centrum dieser Theilung ist jener Zapfen befestigt. Vermittelst der Stellschrauben s, s′, s″ wird das Instrument leicht in jeglicher Lage berichtigt. Daſs der Kreis mit der Axe der Nadel, so wie sie auf dem Lager abgesetzt wird, concentrisch sey, so daſs ihre Enden in horizontaler und verticaler Lage gleiche Gradtheile abschneiden, ist die Sorge des Künstlers.

Bei der Beobachtung ist vor allem darauf zu sehen, daſs die Achatflächen nach der Richtung ihrer Länge genau horizontal seyen, damit nicht die Axe der Nadel eine Tendenz zum Vor- oder Rückwärtsrollen erhalte. Alsdann wird die Nadel auf den beweglichen Rahmen gelegt, und durch Drehung des

gungszeiten als Mittelzahl vieler Angaben bestimmen lassen, giebt diese dreifache Anwendung der Schwingungsmethode unter Beobachtung der angeführten Vorsichtsregeln Resultate, die an Genauigkeit und Zuverlässigkeit mit denen der directen Messung wetteifern können. Sie hat überdies den Vorzug der Einfachheit, indem sie den eingetheilten Kreis und das Umwenden der Pole entbehrlich macht. Die Uhr, deren man sich bedient, braucht nicht berichtigt zu seyn, und ihr Gang muſs nur auf kurze Zeit sich gleich bleiben, was schon von einer guten Cylindertaschenuhr, insofern die Temperatur sich nicht ändert, sich erwarten läſst. Auch auf Schiffen möchte sie bei den langsamen Schwankungen auf ruhiger See noch eben so genaue Resultate gewähren, als die Messung am Gradbogen; nur muſs, wie auch bei der directen Beobachtung, darauf gesehen werden, daſs während des Versuchs das Schiff sein Azimuth nicht ändere. Weniger hingegen möchte die Methode der Schwingungen zur Untersuchung der geringen täglichen oder stündlichen Variationen der Neigung sich eignen, da bei den verticalen Schwingungen die Reibung der Axe es unmöglich macht, eine hinreichend groſse Anzahl derselben zu erhalten. Weit eher dürfte dieser Zweck durch eine leichte Nadel von ungewöhnlicher Länge erreicht werden, die, an ihrem südlichen Ende als Centrum nach Art der Sortir- oder Garnwagen aufgehängt, ihre ganze Ausdehnung zum Radius des zu messenden Bogens darböte.

Der Vollständigkeit wegen mag hier noch eine Beschreibung des Verfahrens folgen, durch welches Coulomb das Verhältniſs der magnetischen Kräfte in der horizontalen und in der verticalen Richtung zu bestimmen suchte [1]. Von dem vorher erwiesenen Satz ausgehend, daſs die Summe der Momente aller Kräfte, welche eine horizontale Nadel dem magnetischen Meridiane zutreiben, durch die Formel $\frac{pl^2}{3\lambda}$ ausgedrückt werde, in welcher p das Gewicht der Nadel, l ihre halbe Länge, und λ die Länge des einfachen Pendels bezeichnen, das mit der Nadel gleichzeitige Schwingungen macht, bestimmte er zuerst durch directen Versuch das Gewicht der Nadel und die Dauer ihrer horizontalen Schwingungen, nebst dem Gewichte, mit welchem ihr südliches Ende beschwert werden muſste, um sie in die ho-

1 Mém. de l'Institut. T. IV. p. 565.

rizontale Lage zu bringen. Aus den beiden ersteren Gröſsen berechnete er mit Hülfe der obigen Formel das horizontale, aus dem Letztern das verticale Moment der Nadel, beide für die Einheiten der Länge und des Gewichts, nach welchen die Länge der Nadel, ihr Gewicht und die Entfernung des Gegengewichts angegeben wurden. Da die Nadel nicht aequilibrirt war, so muſsten ihre Pole umgewendet und sie gerade so stark magnetisirt werden, daſs ihre Schwingungszeit von der vorigen nicht merklich abwich; auch muſste der Versuch mit dem Gegengewichte wiederholt werden. Bei Coulomb's Nadel war $p = 88{,}808$ Grammes, $l = 213{,}3$ Millimeter, und da sie 50 Schwingungen in 495 Sec. machte, so ergiebt sich $\lambda = 994\left(\frac{495}{50}\right)^2$ und hieraus das horizontale Moment $\frac{p l^2}{3\lambda} = 13{,}824$ Gr. auf 1 Millim. Abstand vom Centrum der Nadel. Um sie horizontal zu stellen, bedurfte es eines Gewichts von 0,2 Gr. in 170,5 M.M. Distanz von der Axe, und nachdem die Pole umgewendet und die Nadel wieder bis auf den nämlichen Sättigungsgrad magnetisirt war, so daſs ihre horizontalen Schwingungen mit den vorigen gleichzeitig wurden, war ein Gewicht von 0,2093 Gr. in 194,5 M. M. Distanz erforderlich. Man erhält hieraus für das verticale Moment im Mittel 37,348 Gr. auf 1 M. M. Abstand. Der Quotient beider Kräfte nämlich $\frac{37{,}348}{13{,}824}$ giebt $2{,}70167 = \text{Tg. } 69^\circ\ 41',3$, als die Neigung in Paris um das Jahr 1798.

Instrumente.

Wir kommen nun zur Beschreibung der zum Beobachten erforderlichen Instrumente, und zwar geben wir zuvörderst ein Inklinatorium an, welches bei möglichster Einfachheit die von einem physikalischen Versuche zu erwartende Genauigkeit zu Fig.
gewähren verspricht, und zugleich den verschiedenen Beobach- 179
tungsmethoden sich anpassen läſst. a b a′ b′ ist ein viereckiger und 180.
Rahmen von Messing (bestimmt, den Kreis c d und das Gestelle der Nadel zu tragen), welcher auf die Aufsätze p p′ an den hölzernen Seitenwänden des Glaskastens A B aufgelegt wird. Er ist von hinreichender Höhe und Dicke, um ungeachtet der kreisrunden Durchbrechungen nahe an seinen Enden dennoch die

gehörige Steifheit zu behalten, und doch von der Eintheilung so wenig als möglich zu bedecken. Auf seiner Aufsenseite und in der Mitte seiner Länge sind die beiden Lager l und l′ angeschraubt, welche zwei schmale hervorragende Achatstücke e und
Fig. 181. e′, deren Seiten etwas keilförmig geschliffen sind, durch Anpressung festhalten. Die oberen Kanten dieser Achate müssen, wenn sie einmal an dem Rahmen unveränderlich befestigt sind, zugleich mit einer planen Fläche abgeschliffen werden, (wozu ein planer, feiner Schleifstein dienen kann,) damit sie genau in einer Ebene liegen. Auf diese möglichst polirten Achate werden die dünnen Zapfen der Queraxe der Nadel sachte hingelegt, was vermittelst des beweglichen Rahmens m n m′ n′ bewerkstelligt wird. Dieser ist der Seitenansicht nach dem Rahmen a b a′ b′ völlig gleich, und an den gleichen Stellen durchbrochen, so dafs er, wenn die Nadel frei spielt, von der Seite her gar nicht sichtbar ist. In seiner Mitte befinden sich, etwas erhöht, rechtwinklige, gabelförmige Einschnitte, welche die Axe der
Fig. 182. Nadel in zwei eingedrehten Rinnen r r′ unterstützen. Die Nadel selbst ist auch nach ihrer Dicke keilförmig gestaltet, damit ihre Enden auch beim Umwenden derselben in die Ebene der Vorderseite des Kreises zu liegen kommen. Da die Enden der Nadel, wenn sie auf die Achate abgesetzt ist, die innere Kante des Kreises beinahe berühren müssen, so mufs dieselbe in einer schräg herunter steigenden Richtung in ihre Lage gebracht werden. Zu diesem Ende ist der Rahmen m n m′ n′ an seinem Ende m m′ um einen Zapfen seitwärts beweglich, während die verticale Erhebung durch die Federung dieses Endstückes möglich
Fig. 179 und 180. wird. Diese Erhebung und Senkung des Rahmens wird an seinem andern Ende n n′ durch eine excentrische Scheibe u bewirkt, auf welcher er aufliegt, und die vermittelst des von aufsen angepafsten Schlüssels y... umgedreht wird. Ein Paar abweisende Stifte im Innern des Rahmens a b sind hinreichend, die erforderliche Seitenbewegung des Rahmens m n m′ n′ hervorzubringen. Am Gestelle a b hängt an der Rückseite das Niveau f f′..., welches den horizontalen Stand der Achatlager versichern soll. Um es einzustellen, wird über diese ein Spiegelglas von parallelen Flächen gelegt, auf dieses ein anderes freies Niveau, und das Instrument vermittelst der drei Stellschrauben s s′ s″ abgeglichen; nachher giebt das feste Niveau Rechenschaft von dem Stande der Zapfenlager. Ein kleines Querniveau im Fufse des Kastens wird

auf gleiche Art berichtigt, und versichert die Horizontalität auch in der andern Richtung. Der Kasten ist in der Richtung seiner gröſsten Ebene durch zwei in hölzerne Rahmen verkittete Glastafeln verschlossen, von denen die hintere weggenommen werden kann, um die Nadel einlegen zu können. Die vordere ist in der Mitte durchbohrt, und daselbst ein Gewinde q eingekittet, welches die Zapfenbewegung zweier Mikroskope r r' aufnimmt, die auf die Enden der Nadel gerichtet werden können. Man kann dieselben, wenn sie aus zwei Linsen bestehen, mit einer Glasscale versehen, welche die Subdivisionen der Abtheilungen des Kreises, die bei einem Durchmesser von 8 Zollen etwa auf 20 Minuten gehen mögen, enthält. Das nämliche Gewinde dient auch, um, wenn man zur Beobachtung der horizontalen Schwingungen den Kasten umlegt, eine Glasröhre einzuschrauben, welche den Seidenfaden zur horizontalen Aufhängung der Nadel in sich schlieſst. Im Boden des Kastens befindet sich ein Loch, dessen oberer Theil bestimmt ist, einem Senkel t Raum zu geben, das etwa vom Deckel herunter gelassen wird, und die richtige Stellung der Verticalpuncte der Theilung zu versichern dient. Der untere Theil z paſst auf einen hölzernen Zapfen, der bei erforderlicher Drehung des Instrumentes in verschiedene Azimuthe als Centrum dient. Da es nämlich rathsam ist, die Beobachtungen nicht im Zimmer, sondern wo möglich immer im Freien anzustellen, so gehört zu diesem Inklinatorium ein Bret, in welches sich nöthigen Falls drei Füſse einschrauben lassen, und das an seiner obern Fläche weiſs angestrichen ist, um eine Gradeintheilung zu erhalten, welche sich mit schwarzem Firniſs vermittelst einer Reiſsfeder mit hinreichender Schärfe auftragen läſst. Im Centrum dieser Theilung ist jener Zapfen befestigt. Vermittelst der Stellschrauben s, s', s'' wird das Instrument leicht in jeglicher Lage berichtigt. Daſs der Kreis mit der Axe der Nadel, so wie sie auf dem Lager abgesetzt wird, concentrisch sey, so daſs ihre Enden in horizontaler und verticaler Lage gleiche Gradtheile abschneiden, ist die Sorge des Künstlers.

Bei der Beobachtung ist vor allem darauf zu sehen, daſs die Achatflächen nach der Richtung ihrer Länge genau horizontal seyen, damit nicht die Axe der Nadel eine Tendenz zum Vor- oder Rückwärtsrollen erhalte. Alsdann wird die Nadel auf den beweglichen Rahmen gelegt, und durch Drehung des

Schlüssels langsam auf die Achatlager niedergelassen; eine Operation, die ein Paar Male wiederholt werden muſs, damit die Nadel so ziemlich in der erforderlichen Neigung selbst abgesetzt werde. Hierauf wird die Axe der Nadel um 180° umgelegt, und überhaupt dasjenige Verfahren wiederholt, was oben durch Vorschrift und Beispiel erläutert worden ist. Sollen die Pole umgewendet werden, so legt man die Nadel auf ein dazu bestimmtes, starkes Bret, in welches dieselbe sammt der einen Hälfte der Axe eingelassen ist; eine in der Richtung der Nadel auf dem Brete befestigte Leiste, an welche der künstliche Magnet beim Bestreichen angehalten wird, schützt gegen das Ausgleiten. Die Form der Nadel ist gemeiniglich die eines Stabes von 4 oder mehr Linien Breite, und $\frac{1}{2}$, 1 bis $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke; sie ist entweder ganz prismatisch, oder nach den Enden zu in beiden Seitendimensionen verjüngt. Die Enden sind zuweilen breit oder kreisförmig abgerundet, zuweilen scharf zugespitzt; daſs die auf den Endflächen zu beiden Seiten gezogenen Striche genau übereinstimmen, ist von vorzüglicher Wichtigkeit. Man hat auch Nadeln aus zwei hohlen Konen verfertigt, welche nach Art der Axen von Passageinstrumenten in einen Kubus sich ein-
Fig. 182. schrauben. Die Queraxe der Nadel ist besonders abgebildet. An derselben ist der Ansatz o aufgelöthet, und mit ihr zugleich abgedreht; die Platte p wird aufgeschraubt; beide können von Messing verfertigt werden. Bei r und r′ sind Rinnen eingedreht, deren Entfernung durch die Breite des Rahmens m n m′n′ bestimmt wird. Da die Nadel gewöhnlich nicht viel über zwei Unzen wiegt, so dürfen die Zapfen der Axe sehr fein verfertigt werden; vorzüglich ist auf ihre genaue Rundung zu sehen. Hansteen bemerkt, daſs, da die Unterstützung der Axe nicht in ihrer Mitte, sondern unterhalb derselben statt findet, die Nadel immer eine gewisse Oberlast haben werde. Man könnte
Fig. 183. daher ihre Enden auch keilförmig zurichten, und für die weggenommene Masse unten durch eine Schraube compensiren. Die Axe müſste sich dann in der Nadel durch Reibung genau umdrehen lassen, damit die Schärfe des Keils bei jeder Neigung nach unten gekehrt wäre. Die beiden Schneiden so zu bearbeiten, daſs ihre Schärfe genau in der Drehungsaxe liege, ist für den Künstler allerdings eine schwierige, jedoch nicht unerreichbare Aufgabe. Diese Einrichtung möchte auch bei gröſsern Nadeln, namentlich auch bei solchen, die für bleibende, stünd-

liche Beobachtungen bestimmt wären, durch ihre sehr geringe Reibung sich empfehlen. Um jedoch auch bei den schwersten Nadeln alle und jede Reibung aufzuheben, könnte man folgendes Mittel anwenden. Man stecke an die Queraxe zwei Scheiben von hohlem Eisen oder von Buchsbaumholz, das in Oel gekocht worden ist, und lasse diese in zwei Trögen auf Quecksilber schwimmen; die äufsersten Zapfenenden müssen dabei lose zwischen zwei verticalen Schneiden spielen, um die Nadel im Centrum des Kreises zu behalten. Giebt man einer solchen Scheibe 2 Zoll Durchmesser bei $\frac{1}{3}$ Zoll Dicke, und läfst sie auf 0,7 Zoll in das Quecksilber sich einsenken, so erhält man eine Tragkraft von mehr als 5 Unzen; das Nämliche erhält man mit Scheiben von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser bei $\frac{1}{2}$ Zoll Dicke; dagegen wiegt eine stählerne Nadel, bei einer Dicke von 0,1 Zoll, nur etwa $2\frac{1}{2}$ Unzen.

Die *Abgleichung der Nadel vor* dem Magnetisiren gehört zu denjenigen Operationen, welche die Sorgfalt und Geduld des Künstlers am meisten in Anspruch nehmen. Das Schwierigste ist die Entfernung jeder Spur von Magnetismus aus der noch ungestrichenen Nadel. Sollte ein solcher sich bei Annäherung einer empfindlichen Boussole wahrnehmen lassen, so mag man versuchen, ihn durch Bestreichen mit den gleichnamigen Polen schwacher Magnete aufzuheben, und so die Nadel in einen neutralen Zustand zu versetzen. Alsdann bringe man sie in eine auf den magnetischen Meridian senkrechte Richtung, und gleiche sie in dieser Lage in Beziehung auf die Länge und Schwere der Hebelarme sorgfältig ab.

Um hierbei die Einwirkung der stählernen Instrumente zu vermeiden, mufs man sich durch Abschleifen zu helfen suchen. Man kann auch noch nach Mayer's Vorschlage der Nadel ein wenig Oberlast geben, und in der Nähe der Axe an der untern Kante einen kleinen, etwas schwerern Messingstreif anlöthen, von welchem dann das Nöthige weggefeilt wird. Ebenso kann man die Nadel oben und unten mit zwei kurzen Schraubenstiften versehen, an welchen zwei messingene Kügelchen oder Cylinder so lange versetzt werden, bis die gewünschte Aequilibrirung erreicht ist. Doch kann, nach den Erfahrungen von J. T. Mayer und Sabine, selbst eine merkliche Unterlast zwar sehr abweichende Angaben in den vier Lagen der Nadel, aber nach Mayer's Formel berechnet dennoch ein richtiges

Resultat hervorbringen, und es ist sogar zuweilen vortheilhaft, durch willkürliche Versetzungen jener Kügelchen neue und abweichende Angaben hervorzurufen, um mit einer einzigen Nadel eine Verschiedenheit der Resultate zu erhalten, zu welcher sonst mehrere Nadeln erforderlich gewesen wären. Diese entschiedene Unterlast gewährt überdieſs den Vortheil, daſs die Nadel besser vermögend ist, die Reibung der Zapfen zu überwinden, und sich immer in diejenige Richtung zu versetzen, welche dem Verhältnisse der magnetischen Kraft und der Sollicitation des Schwerpunktes entspricht, während bei einer ganz abgeglichenen Nadel die magnetische Kraft den Widerstand der Reibung nicht immer zu überwinden vermag, wodurch eine Unentschiedenheit in der Stellung der Nadel entsteht, die der genauen Beobachtung hinderlich ist. Wesentlich ist jedoch, daſs der Schwerpunct möglichst genau in der Linie liege, welche auf die Länge der Nadel *senkrecht* ist. Betreffend die *Härtung*, welche man der Nadel zu geben hat, beziehen wir uns auf dasjenige, was hierüber im Art. *Compass*[1] bemerkt worden ist, dem zufolge die strohgelbe Farbe des Stahls beim Anlassen als die tauglichste Temperirung empfohlen wird.

Wünscht man am Inklinatorium genauer abzulesen, und den Inklinationswinkel durch Repetition genauer zu erhalten, so lasse man nach einer der vorhin beschriebenen Arten die Nadel (ohne Kreis) in einem Glaskasten spielen, und setze vor diesen einen Kreis, dessen äuſserer Limbus an seiner Peripherie ein Paar Mikroskope mit Faden trägt, welche auf die Enden der Nadel gerichtet werden. Ob indeſs eine solche astronomische Genauigkeit mit der Natur eines physikalischen Versuchs und den Schwierigkeiten, welche Reibung und die nicht genau geometrische Beschaffenheit der Nadel nach sich ziehen, in Uebereinstimmung stehe, dürfte man wohl bezweifeln.

Die Inklinatorien, welche für den Gebrauch zur See bestimmt sind, unterscheiden sich von den eben beschriebenen hauptsächlich dadurch, daſs sie nicht auf Stellschrauben gestützt, sondern freischwebend aufgehängt sind, um sich selbst in die verticale Richtung zu versetzen. Man bedient sich am besten hierzu eines auf vier Füſsen ruhenden, etwa 4 Fuſs ho-

1 S. Th. II. S. 195.

hen Gestelles, an dessen Deckel oder Schlufsbret der Glaskasten mit Kreis und Nadel dergestalt zwischen zwei winkelrecht auf einander beweglichen Rahmen aufgehängt ist, dafs es allen Schwankungen des Schiffes folgen kann, ohne jedoch irgend eine Seitendrehung annehmen zu können. Die Queraxe der Nadel liegt entweder auf Frictionsrollen, oder es sind ihre auf Achat laufenden Zapfenenden zwischen zwei aufrecht stehenden, wohl polirten Streifen lose eingeschlossen, so dafs die Nadel zwar sich frei bewegen, aber nicht von den Unterlagen herunter gleiten kann. Da, selbst auch in den Windstillen, die Bewegung nie ganz aufhört, so mufs man sich begnügen, durch Beobachtung der Extreme den Stand der Nadel zu bestimmen; Beobachtung und Rechnung werden nach den oben gegebenen Vorschriften ausgeführt. Auch die drei Methoden, durch Schwingungen der Nadel die Neigung zu bestimmen, dürften deswegen zur See eine besonders gute Anwendung finden, weil die lebhaftern Schwünge der Nadel durch die langsamen Schwankungen des Schiffes wenig Störung erleiden. Ob aber, wenigstens in hohen Breiten, der Magnetismus des Schiffeisens, der die Deklination so bedeutend verändert, nicht auch auf die Neigung und auf die Schwingungszeiten der Nadel störend einwirke (s. *Ablenkung*), ist kaum zu bezweifeln, und schwerlich möchte hier Barlow's neutralisirende Eisenscheibe den erforderlichen Nutzen gewähren. Dafs man übrigens Sorge tragen müsse, bei solchen Beobachtungen die Länge und Breite der Station zuverlässig anzugeben, darf deswegen erinnert werden, weil sie oft nur nach der laufenden, durch die Schiffsrechnung oder einen unsichern Chronometer bestimmten Länge notirt werden, deren spätere Correction auch auf diese physikalische Beobachtung anzuwenden leicht vergessen wird[1].

Noch müssen wir eines Vorschlags zur Bestimmung der magnetischen Neigung erwähnen, den die neuern Entdeckungen über die Darstellung des terrestrischen Magnetismus im *weifsen Eisen* erzeugt haben, und den der verstorbene Velin in München wirklich zur Ausführung gebracht hat. Bekanntlich zeigt eine vertical gehaltene Eisenstange oben Süd-, unten Nordpo-

1 Abbildungen solcher Inklinatorien mit ihren Gestellen finden sich in W. Baily's astron. Observ. zu Cook's Reisen, und in Phips Voy. towards the North pole.

larität, und in der Mitte der Stange eine indifferente Stelle, bei welcher die Nadel von einer nahe daran gehaltenen Boussole gar nicht gestört wird. Schon im Jahre 1800 hatte der Professor Egidius Heller in Fulda eine Reihe von Beobachtungen über die Entfernung des Indifferenzpunctes vom obern Ende der Stange oder die Länge ihres südpolaren obern Theiles angestellt, und diese je nach Tagen und Jahreszeiten und den Phasen des Mondes veränderlich gefunden[1]. Aus den im Art. *Ablenkung* mitgetheilten Beobachtungen Barlow's ergiebt sich ferner, dafs die Enden einer Eisenstange die stärkste Polarität zeigen, wenn diese in der Richtung der magnetischen Neigung gehalten wird, und gar keine, wenn sie mit dieser Richtung einen rechten Winkel bildet. Diese beiden Lagen der
Fig. 184. Stange zu messen dient folgender Apparat. An der Axe CD eines mit Theilung und Vernier versehenen verticalen Kreises AB befindet sich der Bügel DE, in welchem die Stange von reinem, weichem Eisen DN so befestigt ist, dafs ihr eines Ende D genau dem Centrum der Axe gegenüber stehe. In gleicher Höhe mit demselben und nahe dabei befindet sich auf einer hölzernen Säule die kleine Boussole G, deren Nadel in der Röhre F an einem ungedrehten Faden aufgehängt ist. Wird nun Kreis und Stange in den magnetischen Meridian gestellt, so wird, wenn die Stange in der Ebene des magnetischen Aequators liegt, die ost- oder westwarts daneben stehende Compafsnadel keine Abweichung zeigen, dagegen aber die gröfste Störung verrathen, wenn die Stange in der Richtung des magnetischen Stromes sich befindet. Es kommt nun darauf an, die eine oder andere Lage (oder, wenn man will, auch beide) mit der horizontalen Richtung zu vergleichen. Die letztere erhält man durch Anhängung eines berichtigten Niveau's an die cylindrisch abgedrehte Eisenstange, und zwar jedesmal in zwei um 180° entgegengesetzten Stellungen. Ist nun der Kreis zum Repetiren eingerichtet, so stelle man erstlich den mit der Eisenstange verbundenen Vernierlimbus auf Null, drehe alsdann den Hauptkreis ACB, bis die Stange horizontal liegt, und bewege hierauf den Kreis, bis die Abweichungsnadel im Meridian steht, so hat man den Winkel, welchen die Ebene des magnetischen Aequators mit der Horizontallinie bildet. Eine zweite Hori-

1 G. IV. 478.

zontalstellung der Stange mit Hülfe des Kreises A und weitere Drehung derselben in die Lage ihrer magnetischen Unwirksamkeit giebt das Doppelte des vorhin gemessenen Winkels Eine Controle für diese Bestimmung liefert die Aufsuchung derjenigen Lage der Stange, bei welcher die Boussole im Maximo abgelenkt wird, wobei das im Centrum befindliche Ende abwechselnd südliche oder nördliche Polarität erhalten wird. Die letztere Beobachtungsart zeigt, daſs die Eisenstange im Verhältniſs zu der Boussole nicht allzu groſs seyn dürfe, weil sonst eine Ablenkung von 90° statt finden könnte, noch ehe die Stange in die günstigste Neigung gebracht wäre. Auch dürfte vielleicht die im Art. *Compaſs*[1] angegebene sehr empfindliche Einstellung der Nadel vor der Aufhängung an einem Faden den Vorzug haben, daſs die langweiligen Schwingungen sogleich zerstört, die Nadel selbst aber nicht seitwärts aus ihrer Stellung gezogen werden kann. Die Stange soll in ihrer Fassung bei E sowohl um ihre Axe gedreht, als auch überhaupt umgewendet werden können. Um ihr, nachdem sie ausgearbeitet ist, so viel möglich jeden Magnetismus zu benehmen, dürfte es rathsam seyn, sie in der Richtung des magnetischen Aequators und senkrecht auf den Meridian auszuglühen, und ohne Annäherung oder Berührung von Eisenmassen oder eisernen Werkzeugen in dieser erkalten zu lassen, auch nachher sie vor Stöſsen oder Erschütterungen zu bewahren, und, wenn nicht beobachtet wird, sie in einer auf den Meridian senkrechten Richtung zu erhalten. Der ganze Apparat kann übrigens vermittelst dreier Stellschrauben, so viel erforderlich ist, nivellirt werden. *H.*

Inponderabilien.

Unwägbare Stoffe; *Inponderabilia.* Diejenigen Potenzen, welche die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus hervorbringen, werden unwägbare Stoffe, Inponderabilien genannt, weil sie sich von den übrigen bekannten materiellen Substanzen dadurch unterscheiden, daſs sie nicht gewogen werden können. Eben diese nennt man auch *Incoërcibilien*, weil es keine Hülle giebt, welche dieselben bleibend einzuschlieſsen vermag. In

1 S. Th. II. S. 185.

dieser Bezeichnung liegt, genau genommen, zugleich das Bekenntnifs, dafs die Erscheinungen dazu berechtigen, ein diesen zum Grunde liegendes materielles Etwas anzunehmen, welches sie erzeugt, von dem übrigen Materiellen aber sich durch die genannte Eigenschaft unterscheidet; denn man ist nicht geneigt z. B. den Schall, als den Effect gewisser Bewegungen, jener Classe anzureihen, selbst auch nicht die sogenannte Lebenskraft oder das problematische Nervenfluidum. Darüber ist man indefs einverstanden, dafs es noch wohl andere ähnliche Potenzen geben möge, als die vier genannten, welche vielleicht bei den verschiedenen Aeufserungen der Lebensthätigkeit wirksam seyn könnten, und denen dann im Voraus ohne die Gewifsheit ihrer Exsistenz und um so mehr ohne die Kenntnifs ihrer Wesenheit diese Eigenschaft beigelegt wird; inzwischen versteht man in der Regel nur jene vier genannten, wenn im Allgemeinen von Inponderabilien die Rede ist, und da die wirkliche Exsistenz von diesen keinem Zweifel unterliegt, so bleibt nur zu untersuchen, ob und mit welchem Rechte ihnen jenes Prädicat zukomme.

Die genannten Potenzen heifsen zuvörderst in so fern mit Recht Incoërcibilien, als man dieselben bisher in keinen undurchdringlichen Hüllen eingeschlossen erhalten konnte; ob man indefs berechtigt sey, daraus zu schliefsen, es könne dieses überall nicht geschehen, ist eine andere Frage. Inzwischen ist nach höchster Wahrscheinlichkeit die Auffindung einer sie bleibend einschliefsenden Hülle nicht zu erwarten. Von der andern Seite werden alle vier Potenzen von verschiedenen Körpern mit ungleicher Stärke festgehalten, und der Magnetismus dringt nicht frei durch eiserne Scheiben. Im Ganzen genommen ist die Eigenschaft, falls sie auch als völlig erwiesen betrachtet wird, das Wesen der zu untersuchenden Potenzen wenig bezeichnend, und es belohnt sich daher kaum der Mühe, weitläuftige Untersuchungen darüber anzustellen, denn es läfst sich selbst nicht einmal ein Schlufs für oder wider die Materialität derselben darauf gründen. Letzteres ist zwar verschiedentlich geschehen, aber sehr mit Unrecht. Einestheils ist nämlich die Coërcibilität der meisten Materien aus der Erfahrung abstrahirt, aber nicht aus dem Wesen derselben gefolgert, weswegen man auch nicht schliefsen darf, es sey etwas nicht materiell, dem diese Eigenschaft mangelt; anderntheils aber sind sehr viele ent-

schieden materielle Substanzen, z. B. die elastischen und tropfbaren Flüssigkeiten, für eine grofse Menge von Körpern incoërcibel, so dafs also die genannten Potenzen diese Eigenschaft nur in einem höheren Grade besitzen würden.

Um über die *Wägbarkeit* der genannten Potenzen zu urtheilen, mufs zuvörderst der Begriff dieser Eigenschaft genau festgesetzt seyn. Versteht man unter Wägbarkeit die Fähigkeit, auf einer Waage gewogen zu werden, so mufs sie ihnen für sich genommen schon deswegen abgesprochen werden, weil sie sich nicht in Hüllen einschliefsen oder als abgesondertes Volumen darstellen lassen. Sie können indefs insgesammt, mit Ausnahme des Lichtes, an Körper gebunden werden, und man wollte daher durch dieses *Mittel des Wägens* eine durch sie erzeugte Gewichtszunahme erforschen; allein in dieser Hinsicht zeigen sie ein wesentlich verschiedenes Verhalten. Zuvörderst ist die Bindung des Lichtes in den sogenannten Lichtsaugern (Phosphoren) zu problematisch, und ihrem Wesen nach zu wenig genau erklärt, als dafs dabei von einer Gewichtsbestimmung überhaupt nur die Rede seyn könnte. Die Anhäufung des Magnetismus, wie sie namentlich beim Eisen, Nickel und Kobalt, aufserdem aber im Leiter der Elektricität statt findet, besteht in einer blofsen Scheidung beider Magnetismen, ohne eine Vermehrung oder Verminderung, und aufserdem unterliegt ein solcher magnetischer Körper sogleich dem Einflusse des tellurischen Magnetismus auf eine solche Weise, dafs auch hierbei von einer Wägung keine Rede seyn kann. Bei der Elektricitäts-Erregung findet nach der vorzüglichern dualistischen Theorie zwar eine Anhäufung der einen oder andern Elektricität statt, allein zugleich ein dieser proportionaler Mangel der andern, weswegen selbst bei einem vorausgesetzten Unterschiede der specifischen Gewichte beider an keine eigentliche Wägung eines auf allen Fall höchst feinen Stoffes zu denken ist. Hiernach verschwindet schon an sich die Möglichkeit einer Wägung bei allen vier Potenzen, ausgenommen bei der Wärme, deren ganz eigentliche Vermehrung und Verminderung nicht in Abrede zu stellen ist, und hierin mag denn auch die Ursache liegen, weswegen blofs bei der letztern eine wirkliche Wägung bisher versucht wurde. Man darf in Gemäfsheit dessen jenen drei Potenzen allerdings das Prädicat der Unwägbarkeit beilegen, jedoch nur in so fern, als die Bedingungen einer wirkli-

chen Wägung nicht gegeben werden können, keineswegs aber, um damit eine von der wägbaren Materie charakteristisch unterscheidende Eigenschaft zu bezeichnen, deren wirkliche Exsistenz hiernach gar nicht erwiesen ist. Wenn man indefs von der Unmöglichkeit, die Bedingungen einer Wägung zu erhalten, abstrahirt, welche blofs bei der Wärme nicht vorhanden ist, so sind aufserdem die vorläufig als materiell angenommenen Grundlagen der sogenannten Inponderabilien so fein, dafs es schwerlich eine für Versuche dieser Art hinlänglich empfindliche Waage geben kann. Um aber die mögliche Exsistenz so feiner Materien zu begreifen, darf man sich nicht weit von bekannten Erfahrungen entfernen. Verhielte sich nämlich die Dichtigkeit einer dieser Potenzen zu der des Wasserstoffgases unter dem einfachen atmosphärischen Drucke, wie die Dichtigkeit von letzterem zu der des Platin, oder wären die materiellen Theilchen derselben so fein vertheilt, als der verbreitete Dunst riechbarer Stoffe, so würde jede wirkliche Wägung unmöglich seyn, ohne dafs man ihnen das Prädicat der Unwägbarkeit im strengsten Sinne beizulegen berechtigt wäre. Bezeichnet man sie also dessen ungeachtet mit dem Ausdrucke *Inponderabilien*, so darf dieser nur die angegebene beschränktere Bedeutung haben, die Untersuchung einer wirklichen Wägung aber, welche aus oben angegebenen Gründen blofs bei der Wärme stattfinden kann, nebst den daraus erhaltenen Resultaten wird am zweckmäfsigsten im Art. *Wärme* angestellt werden.

Die Eigenschaft der Unwägbarkeit läfst sich indefs noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Offenbar wird nämlich das Gewicht der Materie durch die Kraft gegeben, womit sie durch die Erde nach dem Mittelpuncte derselben hin angezogen wird, und alles dasjenige ist dem Wesen nach schwer oder ponderabel, was gegen die Erde gravitirt. Hiernach ist also fraglich, ob den Inponderabilien diese Eigenschaft der Gravitation nicht gleichfalls beizulegen sey. Hierauf läfst sich inzwischen im Allgemeinen nicht füglich antworten, sondern für jede der einzelnen Potenzen besonders, und indem dieses in den ihnen gewidmeten Artikeln ausführlicher geschehen mufs, so genügt es hier, nur im Allgemeinen Folgendes zu bemerken.

Das Licht zuvörderst ist entschieden kosmisch, und findet sich so gut bei den entferntesten Fixsternen als bei der Sonne und auf der Erde, so dafs dabei also von einer Gravitation gegen

die letztere überall die Rede nicht seyn kann. Hiermit fällt dann die Wägbarkeit desselben, aber keineswegs seine Materialität aus den oben angegebenen Gründen von selbst weg, und berechtigten die Erscheinungen übrigens dazu, dasselbe für materiell zu halten, so wäre hiermit ein Inponderabile oder ein unwägbarer, nicht gegen die Erde gravitirender Stoff gegeben. Die Erscheinungen des Magnetismus, nach den neuesten Erweiterungen dieses Zweiges der Physik, sind von der Art, daſs sie zur Annahme eines sie bewirkenden, an verschiedene Körper gebundenen, übrigens aber allgemein über die Erde verbreiteten, Substrates führen. Nach den Beobachtungen von Gay-Lussac [1] nimmt die Stärke des tellurischen Magnetismus in meſsbaren Höhen über der Erdoberfläche nicht merklich ab, und da die magnetische Kraft, wie die der Newtonschen Attraction, den Quadraten der Entfernung umgekehrt proportional ist, so folgert man hieraus, daſs auch der Magnetismus kosmisch sey. Es versteht sich von selbst, daſs dieses nur in Beziehung auf beide zur Neutralität gebundene Magnetismen gesagt werden kann, keineswegs aber von irgend einer magnetischen Erregung, also auch nicht vom tellurischen Magnetismus. Ist alles dieses richtig, so kann von einer Gravitation dieser Potenz gleichfalls nicht die Rede seyn, und sie darf sonach mit Recht unwägbar genannt werden. Die Elektricität hat ein unleugbares Bestreben, der Erde zuzuströmen, welche gleichsam ihr groſser Behälter zu seyn scheint. Von hieraus findet eine stete Wechselwirkung zur Atmosphäre statt, welche sich in dem bekannten Verhalten der Luftelektricität zeigt. Wenn man aber berücksichtigt, daſs hohe Grade der Kälte der Elektricitäts-Erregung nicht günstig sind, daſs Parry auf der Insel Melville mit den feinsten Werkzeugen keine Spur von Luftelektricität entdecken konnte, und daſs endlich das elektrische Fluidum den luftverdünnten und leeren Raum frei durchströmt, um an die festen Körper überzugehen, an welche es im Zustande der Neutralität beider vereinten Elektricitäten gebunden zu seyn scheint, so ist man berechtigt zu schlieſsen, daſs dasselbe den absolut kalten und leeren Raum, in welchem sich unsere Erde bewegt, gleichfalls nicht durchdringt, und somit an den Erdball gebunden ist. Ist dieses alles richtig, so wäre dem elek-

1 G. XX. 11.

dieser Bezeichnung liegt, genau genommen, zugleich das Bekenntnifs, dafs die Erscheinungen dazu berechtigen, ein diesen zum Grunde liegendes materielles Etwas anzunehmen, welches sie erzeugt, von dem übrigen Materiellen aber sich durch die genannte Eigenschaft unterscheidet; denn man ist nicht geneigt z. B. den Schall, als den Effect gewisser Bewegungen, jener Classe anzureihen, selbst auch nicht die sogenannte Lebenskraft oder das problematische Nervenfluidum. Darüber ist man indefs einverstanden, dafs es noch wohl andere ähnliche Potenzen geben möge, als die vier genannten, welche vielleicht bei den verschiedenen Aeufserungen der Lebensthätigkeit wirksam seyn könnten, und denen dann im Voraus ohne die Gewifsheit ihrer Exsistenz und um so mehr ohne die Kenntnifs ihrer Wesenheit diese Eigenschaft beigelegt wird; inzwischen versteht man in der Regel nur jene vier genannten, wenn im Allgemeinen von Inponderabilien die Rede ist, und da die wirkliche Exsistenz von diesen keinem Zweifel unterliegt, so bleibt nur zu untersuchen, ob und mit welchem Rechte ihnen jenes Prädicat zukomme.

Die genannten Potenzen heifsen zuvörderst in so fern mit Recht Incoërcibilien, als man dieselben bisher in keinen undurchdringlichen Hüllen eingeschlossen erhalten konnte; ob man indefs berechtigt sey, daraus zu schliefsen, es könne dieses überall nicht geschehen, ist eine andere Frage. Inzwischen ist nach höchster Wahrscheinlichkeit die Auffindung einer sie bleibend einschliefsenden Hülle nicht zu erwarten. Von der andern Seite werden alle vier Potenzen von verschiedenen Körpern mit ungleicher Stärke festgehalten, und der Magnetismus dringt nicht frei durch eiserne Scheiben. Im Ganzen genommen ist die Eigenschaft, falls sie auch als völlig erwiesen betrachtet wird, das Wesen der zu untersuchenden Potenzen wenig bezeichnend, und es belohnt sich daher kaum der Mühe, weitläuftige Untersuchungen darüber anzustellen, denn es läfst sich selbst nicht einmal ein Schlufs für oder wider die Materialität derselben darauf gründen. Letzteres ist zwar verschiedentlich geschehen, aber sehr mit Unrecht. Einestheils ist nämlich die Coërcibilität der meisten Materien aus der Erfahrung abstrahirt, aber nicht aus dem Wesen derselben gefolgert, weswegen man auch nicht schliefsen darf, es sey etwas nicht materiell, dem diese Eigenschaft mangelt; anderntheils aber sind sehr viele ent-

schieden materielle Substanzen, z. B. die elastischen und tropfbaren Flüssigkeiten, für eine grofse Menge von Körpern incoërcibel, so dafs also die genannten Potenzen diese Eigenschaft nur in einem höheren Grade besitzen würden.

Um über die *Wägbarkeit* der genannten Potenzen zu urtheilen, mufs zuvörderst der Begriff dieser Eigenschaft genau festgesetzt seyn. Versteht man unter Wägbarkeit die Fähigkeit, auf einer Waage gewogen zu werden, so mufs sie ihnen für sich genommen schon deswegen abgesprochen werden, weil sie sich nicht in Hüllen einschliefsen oder als abgesondertes Volumen darstellen lassen. Sie können indefs insgesammt, mit Ausnahme des Lichtes, an Körper gebunden werden, und man wollte daher durch dieses *Mittel des Wägens* eine durch sie erzeugte Gewichtszunahme erforschen; allein in dieser Hinsicht zeigen sie ein wesentlich verschiedenes Verhalten. Zuvörderst ist die Bindung des Lichtes in den sogenannten Lichtsaugern (Phosphoren) zu problematisch, und ihrem Wesen nach zu wenig genau erklärt, als dafs dabei von einer Gewichtsbestimmung überhaupt nur die Rede seyn könnte. Die Anhäufung des Magnetismus, wie sie namentlich beim Eisen, Nickel und Kobalt, aufserdem aber im Leiter der Elektricität statt findet, besteht in einer blofsen Scheidung beider Magnetismen, ohne eine Vermehrung oder Verminderung, und aufserdem unterliegt ein solcher magnetischer Körper sogleich dem Einflusse des tellurischen Magnetismus auf eine solche Weise, dafs auch hierbei von einer Wägung keine Rede seyn kann. Bei der Elektricitäts-Erregung findet nach der vorzüglichern dualistischen Theorie zwar eine Anhäufung der einen oder andern Elektricität statt, allein zugleich ein dieser proportionaler Mangel der andern, weswegen selbst bei einem vorausgesetzten Unterschiede der specifischen Gewichte beider an keine eigentliche Wägung eines auf allen Fall höchst feinen Stoffes zu denken ist. Hiernach verschwindet schon an sich die Möglichkeit einer Wägung bei allen vier Potenzen, ausgenommen bei der Wärme, deren ganz eigentliche Vermehrung und Verminderung nicht in Abrede zu stellen ist, und hierin mag denn auch die Ursache liegen, weswegen blofs bei der letztern eine wirkliche Wägung bisher versucht wurde. Man darf in Gemäfsheit dessen jenen drei Potenzen allerdings das Prädicat der Unwägbarkeit beilegen, jedoch nur in so fern, als die Bedingungen einer wirkli-

chen Wägung nicht gegeben werden können, keineswegs aber, um damit eine von der wägbaren Materie charakteristisch unterscheidende Eigenschaft zu bezeichnen, deren wirkliche Existenz hiernach gar nicht erwiesen ist. Wenn man indefs von der Unmöglichkeit, die Bedingungen einer Wägung zu erhalten, abstrahirt, welche blofs bei der Wärme nicht vorhanden ist, so sind aufserdem die vorläufig als materiell angenommenen Grundlagen der sogenannten Inponderabilien so fein, dafs es schwerlich eine für Versuche dieser Art hinlänglich empfindliche Waage geben kann. Um aber die mögliche Exsistenz so feiner Materien zu begreifen, darf man sich nicht weit von bekannten Erfahrungen entfernen. Verhielte sich nämlich die Dichtigkeit einer dieser Potenzen zu der des Wasserstoffgases unter dem einfachen atmosphärischen Drucke, wie die Dichtigkeit von letzterem zu der des Platin, oder wären die materiellen Theilchen derselben so fein vertheilt, als der verbreitete Dunst riechbarer Stoffe, so würde jede wirkliche Wägung unmöglich seyn, ohne dafs man ihnen das Prädicat der Unwägbarkeit im strengsten Sinne beizulegen berechtigt wäre. Bezeichnet man sie also dessen ungeachtet mit dem Ausdrucke *Inponderabilien*, so darf dieser nur die angegebene beschränktere Bedeutung haben, die Untersuchung einer wirklichen Wägung aber, welche aus oben angegebenen Gründen blofs bei der Wärme stattfinden kann, nebst den daraus erhaltenen Resultaten wird am zweckmäfsigsten im Art. *Wärme* angestellt werden.

Die Eigenschaft der Unwägbarkeit läfst sich indefs noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Offenbar wird nämlich das Gewicht der Materie durch die Kraft gegeben, womit sie durch die Erde nach dem Mittelpuncte derselben hin angezogen wird, und alles dasjenige ist dem Wesen nach schwer oder ponderabel, was gegen die Erde gravitirt. Hiernach ist also fraglich, ob den Inponderabilien diese Eigenschaft der Gravitation nicht gleichfalls beizulegen sey. Hierauf läfst sich inzwischen im Allgemeinen nicht füglich antworten, sondern für jede der einzelnen Potenzen besonders, und indem dieses in den ihnen gewidmeten Artikeln ausführlicher geschehen mufs, so genügt es hier, nur im Allgemeinen Folgendes zu bemerken.

Das Licht zuvörderst ist entschieden kosmisch, und findet sich so gut bei den entferntesten Fixsternen als bei der Sonne und auf der Erde, so dafs dabei also von einer Gravitation gegen

die letztere überall die Rede nicht seyn kann. Hiermit fällt dann die Wägbarkeit desselben, aber keineswegs seine Materialität aus den oben angegebenen Gründen von selbst weg, und berechtigten die Erscheinungen übrigens dazu, dasselbe für materiell zu halten, so wäre hiermit ein Inponderabile oder ein unwägbarer, nicht gegen die Erde gravitirender Stoff gegeben. Die Erscheinungen des Magnetismus, nach den neuesten Erweiterungen dieses Zweiges der Physik, sind von der Art, daſs sie zur Annahme eines sie bewirkenden, an verschiedene Körper gebundenen, übrigens aber allgemein über die Erde verbreiteten, Substrates führen. Nach den Beobachtungen von Gay-Lussac[1] nimmt die Stärke des tellurischen Magnetismus in meſsbaren Höhen über der Erdoberfläche nicht merklich ab, und da die magnetische Kraft, wie die der Newtonschen Attraction, den Quadraten der Entfernung umgekehrt proportional ist, so folgert man hieraus, daſs auch der Magnetismus kosmisch sey. Es versteht sich von selbst, daſs dieses nur in Beziehung auf beide zur Neutralität gebundene Magnetismen gesagt werden kann, keineswegs aber von irgend einer magnetischen Erregung, also auch nicht vom tellurischen Magnetismus. Ist alles dieses richtig, so kann von einer Gravitation dieser Potenz gleichfalls nicht die Rede seyn, und sie darf sonach mit Recht unwägbar genannt werden. Die Elektricität hat ein unleugbares Bestreben, der Erde zuzuströmen, welche gleichsam ihr groſser Behälter zu seyn scheint. Von hieraus findet eine stete Wechselwirkung zur Atmosphäre statt, welche sich in dem bekannten Verhalten der Luftelektricität zeigt. Wenn man aber berücksichtigt, daſs hohe Grade der Kälte der Elektricitäts-Erregung nicht günstig sind, daſs Parry auf der Insel Melville mit den feinsten Werkzeugen keine Spur von Luftelektricität entdecken konnte, und daſs endlich das elektrische Fluidum den luftverdünnten und leeren Raum frei durchströmt, um an die festen Körper überzugehen, an welche es im Zustande der Neutralität beider vereinten Elektricitäten gebunden zu seyn scheint, so ist man berechtigt zu schlieſsen, daſs dasselbe den absolut kalten und leeren Raum, in welchem sich unsere Erde bewegt, gleichfalls nicht durchdringt, und somit an den Erdball gebunden ist. Ist dieses alles richtig, so wäre dem elek-

1 G. XX. 11.

trischen Fluidum allerdings eine Art der Gravitation beizulegen, und es könnte in diesem Sinne kein Inponderabile seyn, obgleich dasselbe ein unverkennbares Bestreben zeigt, sich der Atmosphäre mitzutheilen; denn eben dieses findet auch bei den Dämpfen statt, denen deswegen weder Schwere noch Wägbarkeit abgesprochen wird. Ob endlich die Wärme gegen die Erde gravitire, ist eine Frage, welche nur nach vielen vorausgehenden schwierigen Untersuchungen beantwortet werden kann. Wenn man annimmt, daſs sich die Erde in einem absolut kalten Raume bewege, so muſs jene bejahet werden, findet aber eine Strahlung gegen jenen hellen Himmelsraum statt, so wird hierdurch die Entscheidung wieder zweifelhaft. Wäre die Wärme nicht an die Erde gebunden, so ist kein Grund aufzufinden, warum sie diese nicht verlassen und dem kälteren Raume zuströmen sollte. Dabei muſs dann vorher erst eine andere Frage erörtert werden, nämlich ob durch irgend ein Mittel, namentlich das Licht, fortwährend neue Wärme erzeugt werde. Alles zusammengenommen übersieht man bald, daſs zuvor das eigentliche Wesen der Wärme näher bestimmt seyn muſs, ehe die vorliegende Aufgabe gelöset werden kann. Nach meiner individuellen Ansicht, welche ich im Art. *Wärme* zu begründen suchen werde, bildet die Wärme allerdings eine eigenthümliche, der Erde angehörende Atmosphäre, welche an diese gebunden sie nicht verlassen kann.

Aus allen diesen Betrachtungen folgt, daſs man zwar die vier bekannten und ihnen ähnliche Potenzen mit dem Namen der Inponderabilien belegen könne, daſs es dabei aber immer noch fraglich bleibt, ob dieser ihnen überhaupt oder in ganzer Strenge zukommt, wobei auf allen Fall das Wesen derselben keineswegs dadurch erklärt wird. *M.*

Interferenz.

Interference; *interference* *). Mit diesem Worte hat Young zuerst ein Zusammentreffen der Lichtstrahlen, wo

*) Von dem engl. Worte: *to interfere*, zusammentreffen, widerstreiten. Im Lateinischen würde man wohl nothwendig zu einer Umschreibung seine Zuflucht nehmen müssen.

ihre Wirkungen einander aufheben, bezeichnet; späterhin ist es auch auf andere Gegenstände angewandt worden.

Die bei der Bewegung der Wellen eintretende Interferenz macht die hervorgehende Ausgleichung am besten deutlich [1]. Erregt man in einer schmalen Rinne eine Welle so, daſs sie die ganze Breite der Rinne gleichförmig einnimmt, so geht diese Welle nach der Länge der Rinne fort, und mehrere Wellen folgen ihr. So wie die erste Welle das Ende der Rinne erreicht, welches wir uns durch eine auf die Richtung der ganzen Rinne senkrecht stehende Ebene begrenzt denken, wird sie zurückgeworfen, und indem nun diese zurückgehende Welle mit der vorwärts gehenden, ihr begegnenden zusammentrifft, giebt es Zeitpuncte, wo der Wellenberg der einen mit dem Wellenthale der andern so zusammenfällt, daſs die eine Welle die andere ausgleicht und die Wasserhöhe dem Zustande des Gleichgewichts gemäſs ist. Dieses ist eine *Interferenz*. Um sie genau zu verfolgen, wollen wir das Fortrücken der Welle, deren vorangehende, schon zurückgeworfene Theile den noch vorwärts rückenden, nachfolgenden Theilen begegnen, näher betrachten. Wenn wir uns den Wellenberg als vorangehend denken, so bleibt dieser mit dem ihm folgenden Wellenthale in gleichförmigem, ungeändertem Fortgange, bis er die Wand, an welcher die Zurückwerfung erfolgt, erreicht. Wir wollen uns nun fünf Puncte der Welle, die ungefähr in gleichen Entfernungen hinter einander folgen, bemerken, erstlich den mit der Höhe der natürlichen Oberfläche des Wassers gleich hoch liegenden vorangehenden Fuſspunct des Wellenberges, zweitens den Gipfel des Wellenberges, drittens den nachfolgenden Fuſs des Wellenberges, der zugleich der vorangehende Anfangspunct des Wellenthals ist und in der natürlichen Wasseroberfläche liegt, viertens den tiefsten Punct des Wellenthales, fünftens den nachfolgenden Rand oder Endpunct des Wellenthales, der auch in der Höhe der ruhenden Wasseroberfläche liegt und zugleich wieder der Anfangspunct eines neuen Wellenberges ist. Wenn der erste Punct an der zurückwerfenden Ebene ankommt, so hat die Welle noch ihre gewöhnliche Form; bei der Ankunft des zweiten Punctes an der zurückwerfenden Ebene ist der erste Punct so weit zurückgegangen, daſs er mit dem

1 Weber's Wellenlehre. S. 225.

dritten zusammenfällt, die Anschwellung aber, die sich vom ersten bis zum zweiten Puncte nach und nach erhob, hat sich jetzt in umgekehrter Ordnung mit der Anschwellung verbunden, die als hinterer Theil des Wellenberges zwischen dem zweiten und dritten Puncte statt fand, die mit ihrem Gipfel an die Wand stofsende Welle ist daher ziemlich genau doppelt so hoch, als sie im ruhigen Fortgange war, indem die Erhöhung, die nahe vor dem höchsten Puncte statt fand, sich nun zurückgehend mit der Erhöhung, die nahe hinter dem höchsten Puncte lag, vereinigt, die mindere Höhe in der Mitte der schon zurückgeworfenen vordern Hälfte sich mit der mindern Höhe in der Mitte der hintern Hälfte verbindet u. s. w. In dem Augenblicke also, wo der höchste Punct der Welle antrifft, behält der nachfolgende Fufspunct der Welle die Höhe der natürlichen Oberfläche, und der zwischen ihm und der Wand liegende halbe Wellenberg hat noch eben die Länge, aber die doppelte Höhe. Ist dagegen im Fortrücken der Welle der dritte Punct bei der zurückwerfenden Wand angekommen, so trifft der zurückgehende zweite Punct mit dem vierten, der zurückgehende erste Punct mit dem fünften zusammen. In diesem Augenblicke tritt die Interferenz für die ganze Welle ein, oder die ganze Welle bildet nun eine mit der natürlichen Wasseroberfläche zusammenfallende Horizontallinie, indem jener dritte Punct selbst in dieser Horizontallinie liegt, der ihm zunächst folgende benachbarte Punct zwar den Anfang des Wellenthales bilden sollte, aber durch das Zusammenfallen mit dem letzten Theile des Wellenberges eben so viel vermehrte Höhe erhält, als ihm vorher fehlte, und ebenso jeder Punct des Wellenthales bis zur Höhe der Horizontalfläche ausgeglichen wird durch die mit ihm zusammenfallende Höhe des zurückgeworfenen Wellenberges. Verfolgen wir die Bewegung der Welle weiter, so ist beim Antreffen des vierten Punctes an die Wand ein Zusammenfallen des dritten und fünften Punctes eingetreten, und das halbe Wellenthal, welches zwischen dem vierten und fünften Puncte lag, hat zwar noch seine ebenso grofse Länge, aber eine in jedem Puncte doppelte Tiefe. Folgt auf diese Welle eine eben solche zweite Welle, so giebt die Ankunft des fünften Punctes an der zurückwerfenden Wand wieder eine Interferenz für die ganze Welle, indem dieser Punct selbst in der Horizontallinie der ruhenden Wasserfläche liegt, jeder nahe hinter ihm folgende

Punct etwas höher lag, aber im Zusammentreffen mit dem zurückgehenden Wellenthale eine genaue Ausgleichung erfolgt.

Weber hat diese Verdoppelung der Höhe des Wellenberges und der Tiefe des Wellenthales abgemessen und nur um weniges geringer gefunden, als die genaue Verdoppelung forderte. Auch über die Interferenz finden sich dort genauere Beobachtungen [1]. War der Wellenberg an der zurückwerfenden Ebene angekommen, so bemerkte man für die bei jenem Versuche erregten Wellen, wenn man einen etwa 8 Zoll von dieser Ebene entfernten Punct ins Auge faſste, daſs dieser bei weiterem Fortgange der vorwärtsgehenden und zurückprallenden Welle in der ungeänderten Mittelhöhe blieb, während an der Ebene sich bald ein hoher Wellenberg, bald ein tiefes Wellenthal bildete; in der Mitte zwischen beiden Zuständen war die ganze von dort bis an die Ebene sich erstreckende Welle durch Interferenz verschwunden. Eben dieses bemerkt man auch, mancher zufälligen Unregelmäſsigkeiten ungeachtet, im offenen Wasser, wo Wellen an einen steilen Gegenstand gelangen und zurückgehende Wellen bilden. Diese Interferenz findet mehr oder minder genau statt, je nachdem Wellenberg und Wellenthal vollkommen oder minder vollkommen dieselbe Form haben, und sofern zum Beispiel der nachfolgende Theil des Wellenberges mehr Wasser enthielte, als der vorangehende, aber nicht genau so der entsprechende Theil des Thales einen gröſsern Raum darböte, würde die Interferenz unvollständig seyn. Derjenige Interferenzpunct aber, wo unaufhörlich die herankommende und die zurückkehrende Welle eine gleiche Höhe unterhalten, liegt um ein Viertel der Wellenbreite vom Zurückwerfungspuncte.

Eine ähnliche Interferenz beim Schalle haben zuerst E. und W. Weber bemerkt, und von dem Letzteren ist sie genauer untersucht worden [2]. Da der Schall in der Luft durch eine abwechselnde Verdichtung und Verdünnung, durch Vibrationen, die wellenartig fortgehen, fortgepflanzt wird, so läſst es sich wohl denken, daſs da, wo gleichzeitige Verdichtungen zweier Schallwellen zusammentreffen, eine Verstärkung des Schalles merkbar seyn muſs, und daſs gleichzeitig eintreffende Verdün-

1 S. S. 228.

2 Wellenlehre S. 507. Schweigg. Journ. XLVIII.

nungen eben dieses bewirken müssen, dagegen wird da, wo der verdichtete Theil einer Schallwelle mit dem im verdünnten Zustande befindlichen Theile einer zweiten Welle zusammentrifft, eine Interferenz, eine Unterbrechung der aus abwechselnden Verdichtungen und Verdünnungen bestehenden Vibrationen statt finden. Gäbe es einen Punct, wo von zwei Puncten ausgehende Schallwellen sich fortwährend so träfen, daſs allezeit die verdichtete Hälfte der einen mit der verdünnten der andern und umgekehrt gleichzeitig ihn erreichte, so würde man in diesem Puncte gar keinen Schall hören, das gleichzeitige Eintreffen zweier gleichen Schallerregungen würde keine Verstärkung, sondern ein gegenseitiges Auslöschen bewirken. Eine Verstärkung des Schalles durch zusammentreffende Schallwellen kannte man lange in dem Mitklingen eines tieferen Tones, wenn zwei höhere angegeben werden. Wenn man auf einer rein gestimmten Orgel zwei Pfeifen tönen läſst, deren eine die höhere Quinte der andern angiebt, so hört man zugleich die tiefere Octave der tiefsten von beiden als mittönend. Die Tonlehre nämlich zeigt, daſs wenn ein Ton irgend eine Anzahl von Schwingungen in gegebener Zeit macht, so ist für die höhere Quinte die Anzahl der Schwingungen anderthalbmal so groſs; es trifft daher jede zweite Schwingung des einen Tones mit jeder dritten Schwingung des zweiten zusammen, und unser Ohr empfindet, auſser den beiden angegebenen Tönen, noch eine in gleichen Zeiträumen, in Zeiträumen doppelt so lang, als sie beim ersten Tone, dreimal so lang, als sie beim zweiten Tone sind, eintretende Verstärkung, welche wegen ihrer in gleich abgemessenen Zeiträumen statt findenden Wiederkehr als ein Ton, und wegen der nur halb so oft als beim ersten Tone eintretenden Wiederkehr als tiefere Octave dieses ersten Tones gehört wird.

Eine Unterbrechung des hörbaren Tones giebt ein Versuch, den man mit tönenden Stäben oder mit der Stimmgabel anstellen kann. Wenn man eine gewöhnliche Stimmgabel während ihres Tönens in verticaler Richtung vor dem Ohre
Fig. 185. hält, und so um ihre Axe drehet, daſs bald die Seite ab, bald die Seite bc dem Ohre zugewandt ist, so hört man den Ton fast genau gleich, das Ohr mag sich in einer auf ab oder in einer auf bc senkrechten Linie befinden; ist dagegen das Ohr in einer Richtung, welche ungefähr in der Mitte zwischen

diesen beiden Senkrechten liegt, so verschwindet der Ton fast ganz. Um zu zeigen, dafs dieses auch bei einem einfachen Stabe statt findet, bediente W. Weber sich eines 8 p. Zoll langen, 2 Linien breiten und dicken, sehr genau gearbeiteten Messingstabes. An diesem wurde auf $\frac{9}{40}$ seiner Länge, wo nämlich ein Schwingungsknoten liegt, in feinen Einschnitten ein Faden umgebunden, und so der Stab aufgehängt; ward nun der Stab durch Anschlagen an seine Seite in Schwingungen gesetzt, so wurden bei der Drehung des Stabes vor dem Ohre jene Unterbrechungen deutlich bemerkt. Um genauere Bestimmungen des Ortes zu erhalten, wo jene Interferenzpuncte liegen, wandte Weber die Stimmgabel wieder an. Man hört bei ihrem Tönen die Unterbrechungen am besten und bestimmtesten, wenn man sie über einem mittönenden Glase klingen läfst *), und Weber gab diesem Glase oben nur eine 0,3 Linien weite Oeffnung, um sehr genau den Ort zu bestimmen, den diese Oeffnung einnahm. Die Stimmgabel wurde mit einem Wollastonschen Goniometer so verbunden, dafs sie mit diesem um ihre Längenaxe gedreht, und dafs an dem Gradbogen des Goniometers diejenige genaue Lage der Stimmgabel angegeben wurde, welche mit dem Verschwinden des Mittönens zusammengehörte; denn ebenso, wie bei bestimmter Stellung des Ohres der Ton der Stimmgabel nicht gehört wird, so verschwindet auch das Mittönen der Luftsäule im Glase, wenn jene Oeffnung sich an dem Orte der Interferenz befindet. Die sorgfältige Abmessung zeigte, dafs erstlich die Interferenzpuncte in derselben Entfernung und Winkelrichtung gegen den Querschnitt der Zinke der Stimmgabel liegen, man mag, welchen Punct der Länge der Zinke man will, der Oeffnung gegenüber stellen; dafs aber zweitens die Winkelrichtung, welche man der Stimmgabel geben mufs, eine andere ist bei verschiedenen Entfernungen der Oeffnung von derselben. Der geometrische Ort der

*) Dieses Mittönen findet statt, wenn die Stimmgabel über ein cylindrisches Glas gehalten wird, dessen Höhe so grofs ist, dafs die Luftsäule in demselben bei ihren Schwingungen eben den Ton, wie die Stimmgabel, giebt. Ist dieses nicht völlig der Fall, so kann man bei zu grofser Höhe des Glases durch ein wenig eingegossenes Wasser ihm die richtige Höhe geben. Wenn diese statt findet, so hört man den Ton der Stimmgabel sehr verstärkt, statt dafs eine solche Verstärkung bei einer andern Länge der Luftsäule nicht eintritt.

Interferenzpuncte bildet also eine gekrümmte Fläche, deren geradlinige Durchschnittslinien mit der Längenaxe der Zinke parallel sind; die auf diese senkrechten Querschnitte sind aber hyperbolisch, und umgeben den Querschnitt der Stimmgabel in einer symmetrischen Stellung, so dafs die Brennpuncte der Hy-
Fig. 186. perbeln in den Kanten der Stimmgabel liegen. Die Figur stellt die aus den Versuchen abgeleitete Lage der Interferenzpuncte dar, ccdd sind die Querschnitte der Zinken, deren Seite 2 Lin. betrug, und die Versuche ergaben bei

$3''',23$ Entfernung, den Winkel $= 30\frac{1}{16}°$,
$4, 38$ $40\frac{1}{8}$,
$6, 1$ $45\frac{1}{8}$,

so dafs die Interferenzpuncte in hyperbolischen Aesten lagen, deren Gleichung $1{,}8175\,(x^2 - 0{,}355) = y^2$ ist, wenn man x und y in Linien ausdrückt.

An diese Versuche knüpft Weber die Frage, wie denn die Schallwellen beschaffen seyn müssen, damit sie durch ihr Zusammentreffen diese Interferenzen bilden. Jeder dieser hyperbolischen Aeste ab hat seinen Mittelpunct in der Mitte der ihm zugehörigen Seite cd, und es erhellet, dafs die Halbmesser der um c gezeichneten Kreise eine bestimmte Abhängigkeit von den Halbmessern der um d gezeichneten Kreise haben müssen, wenn der geometrische Ort ihrer Durchschnittspuncte jene Hyperbel seyn soll. Nimmt man den Abstand zweier Kreis-
Fig. 187. Mittelpuncte $A, B = 2f$, und die Halbmesser $= \varrho$ und $= \varrho + c$, so ist, wenn man die Coordinaten beider Kreise von C, mitten zwischen A, B an rechnet, und die Abscissen x auf AB nimmt, y aber als Ordinate des einen, y′ als Ordinate des andern Kreises betrachtet,

$$y^2 = \varrho^2 - (f + x)^2 \text{ und } y'^2 = (\varrho + c)^2 - (x - f)^2,$$

da also, wo beide Kreise sich schneiden,

$$y'^2 = y^2, \text{ und } 4fx = -2c\varrho - c^2.$$

Eliminirt man mit diesem Werthe von ϱ, $\varrho = -\frac{1}{2}c - \frac{2fx}{c}$, den Halbmesser aus der Gleichung für beide Kreise, so hat man den geometrischen Ort der Durchschnitte aller Kreise, deren Halbmesser um c verschieden sind. Die Gleichung für diesen geometrischen Ort ist

$$y^2 = \left(\frac{4f^2}{c^2} - 1\right)\left\{x^2 - \tfrac{1}{4}c^2\right\}.$$

Nach den empirisch bestimmten Werthen der vorigen Formel ist f = 1 und folglich $\frac{1}{4}c^2 = 0{,}355$,

$c = 1{,}192$ par. Lin.

Die Versuche zeigen also, daſs die sich interferirenden Wellen, die von einer Kante ausgehen, allemal einen um 1,192 Linien gröſseren Halbmesser haben, als die von der andern Kante ausgegangenen; die eine Welle ist also um einen Zeitraum von 0,000485 Tertien der andern vorgeeilt, denn in dieser Zeit durchläuft die Schallwelle 1,192 Lin., wenn man 1024 Fuſs in 1 Sec. rechnet.

Um dieses Resultat des Versuches richtig zu übersehen, müssen wir Folgendes überlegen. Indem die Zinke der Stimmgabel angeschlagen wird, weicht ihre äuſsere Seite zurück und bringt in der Luft eine mit Verdünnung anfangende Welle hervor, die innere Seite drängt sich gegen die Luft und erregt dort eine mit Verdichtung anfangende Welle; diese beiden Wellen aber entstehen nicht gleichzeitig, sondern die letztere ein wenig früher, oder wenigstens so, daſs sie beim Fortgange allemal den Radius $\varrho + 1{,}192$ hat, wenn der Halbmesser der andern $= \varrho$ ist. Da die Entfernung der beiden Kanten von einander $= 2$ angenommen wurde, so erreichen beide Wellen einander zuerst, wenn $2\varrho + 1{,}192 = 2$ ist, und in der Entfernung $\varrho = 0{,}404$ vom äuſsern Eckpuncte der Gabel tritt die erste Interferenz ein. Da die Stimmgabel den Ton g gab, so tritt der gleiche Zustand der Vibration nach $\frac{1}{384}$ Sec. ein, denn dieser Ton macht 384 Vibrationen in 1 Sec., und die Schallwellen folgen also in Entfernungen von $\frac{1024}{384}$ Fuſs = 384 Lin. auf einander, das heiſst, wenn die zweite Verdünnungswelle von der äuſsern Seite der Zinke ausgeht, so ist der Halbmesser der ersten Verdünnungswelle, die eben da ausging, = 384 Lin., der Halbmesser der ersten Verdichtungswelle, die von der andern Seite ausging, = 385,192 Lin. Die zweite Welle kann also nirgends mit der ersten eine Interferenz bewirken, weil diese jener bei weitem zu weit voraus ist; die Interferenz aber, welche die beiden ersten Wellen für $\varrho = 0{,}404$ zu bewirken anfingen, rückt beim Fortgange der Welle in der durch die Versuche und die geometrische Betrachtung angegebenen Hyperbel fe fort, und da eben diese Interferenz aus dem immer um gleich viel verschieden bleibenden Halbmesser der einander genau ausgleichenden Theile der Wellen stetig fort hervorgeht, so wird Fig. 188.

dort fortdauernd kein Ton gehört. Der zweite Ast der Hyperbel, welchen die Geometrie angiebt, hat hier keine akustische Bedeutung. Nehmen wir nämlich, statt c = 1,192, c = 1,2, so würde die Interferenz mit $\varrho = 0{,}4$ und $\varrho' = 1{,}6$ anfangen; die Kreise mit $\varrho = 0{,}5$, $\varrho' = 1{,}7$

$$\varrho = 0{,}6,\ \varrho' = 1{,}8$$

geben wahre Interferenzen; die Geometrie scheint auch für

$$\varrho = 1{,}6 \text{ und } \varrho' = 0{,}4$$
$$\varrho = 1{,}7 \quad\quad \varrho' = 0{,}5$$

Interferenzen zu geben, aber wenn der am meisten verdünnte Theil der Welle bis $\varrho = 1{,}6$ vorgedrungen ist, so trifft nicht der am meisten verdichtete Theil in $\varrho' = 0{,}4$ ein, sondern ein Theil, welcher um 2,4 hinter jenem hergeht, der also keineswegs eine genaue Interferenz bewirkt. Also kann nur diejenige Seite des Stabes die zwei Aeste der Interferenzhyperbeln neben sich haben, von welcher die etwas retardirten Wellen ausgingen. Die Erfahrung an einzelnen Stäben zeigt aber, daſs sich an allen vier Kanten solche Interferenzlinien finden, und daſs sie bei Stimmgabeln nach der Seite, die auswärts liegt, da sind, die erste äuſsere Welle mag eine mit Verdünnung oder eine mit Verdichtung anfangende seyn.

Man ist daher genöthigt anzunehmen, daſs jede mit Verdichtung anfangende Welle jenen kleinen Vorsprung vor der mit Verdünnung anfangenden Welle gewinnt, wo dann in dem wechselnden Hin- und Hergange der Zinken beide Hyperbeln entstehen. Weber bemerkt, bei der Stimmgabel könne man die der innern Seite der Zinken zugehörenden Interferenzhyperbeln nicht beobachten, weil auſser den von der innern Seite der Zinken ausgehenden Wellen auch noch eine zweite Art Wellen durch das Zusammendrängen der beiden Zinken entstehen, eben diese Art Wellen aber, indem sie sich mit den stark seitwärts gebogenen Wellen der Innenseite vereinigen, machen die Interferenz an der Auſsenseite in der Hyperbel, deren Brennpunct der äuſsere Eckpunct ist, desto vollkommener.

Ueber die Ursache des Voreilens der verdichteten Welle hat Weber folgende Vermuthung aufgestellt. Wenn die Zitterungen der Zinke statt finden, so macht eine quer durch die ganze Zinke gehende Reihe von Puncten ihre Excursionen gleichzeitig; läge diese Reihe von Puncten in einer Senkrechten gegen die Längenrichtung, so erzitterten zwei einander gegen-

überstehende Puncte, folglich auch beide Endpuncte der Zinke genau gleichzeitig; da das nicht der Fall ist, so mufs die Vibration der Zinke, welche zugleich in $\frac{1}{181}$ Sec. als Quervibration vollendet wird, und zugleich in eben der Zeit die Länge der Zinke hin und zurück durchläuft, bei diesem Durchlaufen an der einen Seite um $0''',00048$ früher in dem Endpuncte ankommen, und eben das mufs für jede andere zwei sich senkrecht gegenüberstehende Puncte gelten. Nimmt man dieses an, so ist allerdings der Zeitpunct, da die eine Welle vom Endpuncte ausgeht, um $0''',00048$ früher, und die Erscheinung ist erklärt. Aber sollte nicht diese Voreilung noch einen andern Grund haben können? Nach Weber's Angaben ist die verdichtende Welle diejenige, welche der verdünnenden um 1,192 Lin. voreilt; aus andern Schlüssen aber hat Laplace gefolgert, dafs die Geschwindigkeit der Schallfortpflanzung in der Luft von der bei jeder Verdichtung frei werdenden, bei jeder Verdünnung gebunden werdenden Wärme abhängt; sollte es daher nicht wahrscheinlich seyn, dafs im ersten Momente der Entstehung die verdichtete Welle, als gewaltsamer verdichtet, mehr Wärme frei machte, als es nachher im freien Fortgange in der Luft der Fall ist, und bei der verdünnenden Welle das Gegentheil statt fände? Dann würde jene in den ersten Theilen einer Tertie mehr, als der regelmäfsigen Geschwindigkeit des Schalles gemäfs ist, diese dagegen weniger durchlaufen. Ich will annehmen, dieses betrüge so viel, dafs in 0,0001 Tertie die Fortrückung jener Welle 0,260 Linie, die Fortrückung dieser Welle 0,230 Lin. ausmachte; dann würden in 0,004 Tertie die durchlaufenen Wege = 10,4 und = 9,2 Linien betragen, und eine wäre schon sehr nahe nach ihrer Entstehung, in $\frac{1}{250}$ Tertie, der andern um 1,2 Lin. vorgeeilt; in so grofser Entfernung von der ersten gewaltsamen Erschütterung könnte aber der Einflufs dieser nur momentan wirkenden Ursache vorüber seyn, und daher in jeder uns bequem mefsbaren Entfernung die Welle als jenen Vorsprung behaltend angesehen werden. Doch auch diese Ableitung des Voreilens ist blofse Vermuthung.

Ich komme nun auf die Interferenzen, welche das Licht zeigt. Im Artikel *Inflexion* werden die zahlreichen Erscheinungen angeführt, welche eine solche Interferenz als Folge der Beugung des Lichtes, indem es an festen Körpern vorbeigeht,

der Beobachtung darbieten; ich will hier daher nur einige Fälle anführen, die dorthin nicht gehören. Im Allgemeinen besteht diese Einwirkung der Lichtstrahlen auf einander darin, daſs zwei Lichtstrahlen, die von *einer* Lichtquelle ausgehend auf etwas verschiedenen, jedoch sich unter einem sehr kleinen Winkel durchschneidenden Wegen in *einem* Puncte ankommen, erstlich die Erleuchtung verstärken, wenn die durchlaufenen Wege in einerlei Medio gleich lang sind; zweitens, daſs bei einer gewissen Ungleichheit der Wege, die = d heiſsen mag, die vereinigten Lichtstrahlen keine Verstärkung der Erleuchtung, sondern eine fast gänzliche Zerstörung derselben, ein Dunkel, hervorbringen; drittens, daſs dagegen, wenn der Unterschied der in einerlei Mittel durchlaufenen Wege = 2d oder = 4d oder = 6d ist, die Verstärkung der Erleuchtung wie bei gleichen durchlaufenen Wegen statt findet, daſs aber, wenn der Unterschied der Wege = 3d oder = 5d und so ferner ist, eben die Zerstörung der Erleuchtung wie bei dem Unterschiede = 1d statt findet; viertens, daſs der Werth von d bei jedem einzelnen verschiedenfarbigen Strahle ein anderer, aber, wenn der Strahl sich in der Luft fortpflanzt, bei dem rothen immer gleich, bei dem violetten immer gleich, und so ferner, ist; endlich, daſs der Werth dieses d beim Durchgange durch verschiedene Mittel sich so ändert, daſs dabei eine gewisse Uebereinstimmung mit dem Brechungsverhältnisse nicht zu verkennen ist.

Da die Emissionstheorie keinen in der Natur der Lichttheilchen nachzuweisenden Grund angeben kann, wodurch das Lichttheilchen in einem Augenblicke die Wirkung des andern verstärkt, im andern aber sie zerstört, so ist es nicht wohl anders möglich, als hier derjenigen Darstellung zu folgen, welche die Undulationstheorie darbietet, obgleich auch sie bei den Phänomenen, die ich am Schlusse anführen werde, nicht ganz ohne Schwierigkeit die Erklärungen zu geben scheint; ich werde daher hier meistens nach Young's und Fresnel's Beispiel von einem verdichteten Theile und einem verdünnten Theile der Lichtwelle genau so reden, wie wir es beim Schalle zu thun pflegen, und annehmen, daſs zwei fast in gleichen Richtungen zu einem Puncte gelangende Lichtwellen, die von demselben Puncte ausgehend auf verschiedenen Wegen ankommen, dann

sich einander aufheben, wenn die Länge ihrer Wege um eine halbe Wellenlänge verschieden ist.

Als einen Hauptversuch führt FRESNEL folgenden an [1]. Wenn man zwei unbelegte Spiegelgläser nimmt, die an der Hinterseite geschwärzt sind, um keine doppelten Bilder zu geben, oder statt dieser Gläser zwei Metallspiegel anwendet, so kann man, indem man ihre Ränder in vollkommene Berührung bringt und die Spiegel einen sehr nahe an 180 Grade kommenden Winkel mit einander machen läfst, ja sehr leicht zwei Bilder eines und desselben leuchtenden Punctes erhalten, zwischen diesen aber zeigen sich Lichtstreifen durch die gegenseitige Einwirkung beider Lichtstrahlen auf einander. Es sey A der leuchtende Punct, BC der eine, CD der andere Spiegel, so läfst sich leicht übersehen, dafs das Auge E im Durchschnittspuncte der reflectirten Strahlen ein zweifaches Bild des leuchtenden Punctes in F und G sieht. Ebenso würde ein Auge in H zwei Bilder in I und K sehen, und es ist bekannt, dafs die von dem einen Spiegel kommenden Lichtstrahlen die Richtung haben, als ob sie von dem Bilde V, die von dem andern Spiegel kommenden, als ob sie von dem Bilde U ausgingen, und diese Bilder liegen auf den gegen CB und CD senkrecht gezogenen Linien AT, AS, so dafs VT = AT und US = AS ist. Zieht man nun die Linie ECW so, dafs sie den Winkel VCU halbirt, so liegen auf ihr die Durchschnittspuncte derjenigen Strahlen, welche von A bis zum Durchschnittspuncte gleiche Wege durchlaufen haben. Denn erstlich ist offenbar CA = CU = CV, und da zweitens EW die Mitte der UV senkrecht trifft, so ist EV = EU, aber EV = AF + FE ist der vom einen Strahle, EU = AG + GE der vom andern Strahle durchlaufene Weg. Da diese gleich sind, so kommen in E, und ebenso in e, allemal die verdichtenden Theile der Lichtwellen des einen und andern Strahles zugleich an, ebenso die verdünnenden Theile zugleich und so immerfort, so dafs die Strahlen beide beitragen, den Lichteindruck zu verstärken. In den Puncten wie L und H, oder l und h, dagegen ist die Summe der von dem einen Strahle durchlaufenen Wege AK + KH um etwas verschieden von der Summe der Wege = AI + IH, die der andere Strahl durchläuft, und wenn Fig. 189.

1 Poggend. Ann. III. 96. V. 223.

diese Verschiedenheit gerade so viel beträgt, als eine halbe Wellenlänge, so bringen die in H und ebenso die in L unter einem sehr kleinen Winkel zusammentreffenden Strahlen keine Erleuchtung hervor, sondern müssen nach dieser Theorie der Interferenzen einander auslöschen. Es läfst sich leicht übersehen, dafs für Puncte wie m und n die Differenzen der Wege noch gröfser werden, und wenn sie hier eine ganze Wellenlänge betragen, so treffen hier wieder zwei einander verstärkende Lichtstrahlen zusammen. Wegen der ungemeinen Kürze einer Lichtwelle liegen diese Puncte, wo in e verstärktes Licht, in h und l Dunkel, in m und n verstärktes Licht ist, sehr nahe bei einander, und nur wenn der Winkel, den beide Spiegel mit einander machen, ungemein wenig von zwei rechten Winkeln verschieden ist, wird dieser Abstand grofs genug, um wahrgenommen zu werden. Bringt man bei so geneigten Spiegeln eine Linse von kurzer Brennweite etwas jenseit m h e l n so an, dafs e im Brennpuncte derselben liegt, also alle diese Puncte so nahe am Brennpuncte, dafs ein jenseit der Linse stehendes Auge die Abwechselungen von Hell und Dunkel deutlich erkennen kann, so mufs man diese neben einander erscheinenden hellen und dunkeln Streifen sehen. Und so geschieht es wirklich; es zeigen sich unter diesen Umständen, wenn das Licht bei A von einem nur kleinen Puncte ausgeht, Lichtstreifen mit dunkeln Zwischenräumen in der hier angegebenen Richtung neben einander liegend, und ihre Abstände sind so grofs, dafs man, beim Berechnen der vom Lichte durchlaufenen Wege, die Differenzen derselben dem gemäfs findet, was vorhin über die zum Verstärken oder Zerstören des Lichtes erforderlichen Verhältnisse gesagt worden ist, und dem gemäfs, was andere Versuche über die absolute Länge der Lichtwellen ergeben.

Dafs diese hellen und dunkeln Streifen wirklich von der gegenseitigen Einwirkung der zusammentreffenden Lichtstrahlen abhängen, läfst sich dadurch erweisen, dafs ein Schirm, welcher den Zutritt des einen zurückgeworfenen Lichtstrahls entweder vor oder nach seinem Antreffen an den Spiegel hindert, die Erscheinung sogleich aufhebt, so dafs also zu dem vom einen Spiegel herkommenden und für sich eine Erleuchtung bewirkenden Lichte ein anderer, für sich allein ebenfalls Erleuchtung bewirkender Lichtstrahl kommen mufs, um jenes Dunkel, das Zerstören der Erleuchtung, hervorzubringen.

Dieser Versuch fordert, daſs die Ränder der beiden Spiegel genau ohne Vorsprung an einander anliegen; denn da die Länge einer Lichtwelle so ungemein klein ist, so machen selbst Hundertstel einer Linie groſse Unterschiede, weil die Interferenzen nur sichtbar werden, wenn der Unterschied der Wege beider Lichtstrahlen wenige Wellenlängen ausmacht; sobald er mehrere Wellenlängen beträgt, so wird bei weiſsem Lichte schon sehr bald die ganze Erscheinung aufhören, und selbst bei einfarbigem Lichte läſst sich keine so strenge Homogeneität erhalten, daſs nicht auch da ein Verdecken der der einen Wellenlänge entsprechenden dunkeln Streifen durch die der andern Wellenlänge entsprechenden hellen Streifen eintrete. Da nämlich die verschieden brechbaren oder verschiedenfarbigen Strahlen nach dem Undulationssysteme eine ungleiche Wellenlänge besitzen, so tritt zuerst ein Mischen der Farben ein, wenn der Unterschied der Wege einige Wellenlängen beträgt, dann bei einer gröſsern Differenz ein Zusammenfallen der Farben, welche einer gewissen Anzahl von Wellenlängen zugehörten, mit denen, die der nächst gröſsern Anzahl zugehören, und eben dadurch ein gänzliches gegenseitiges Zerstören der hellen und dunkeln Streifen. Bei einfarbigem Lichte ist dieser Nachtheil zwar weit geringer, aber wenn die Differenz der Wege einer sehr groſsen Anzahl von Wellenlängen gleich ist, so hindert er dennoch das Sichtbarwerden der dunkeln und hellen Streifen. Damit dieses Aneinanderpassen der Gläser ohne einen nachtheiligen Vorsprung des einen vor dem andern erreicht werde, empfiehlt Fresnel ein Eindrücken beider Gläser in eine Unterlage von Wachs, damit man durch leise Abänderung der Lage den Zweck erreichen könne.

Daſs die Kleinheit des Winkels erforderlich ist, um die Streifen weit genug auseinander zu rücken, läſst sich leicht übersehen. Stellt nämlich e p einen Theil der dem Bilde V angehörenden, e q einen Theil der dem Bilde U angehörenden Welle vor, so ist $qep = SCT'$ und $ep = \frac{pq}{\text{Tang. } qep}$ giebt an, wie weit man auf der einen Welle fortgehen muſs, um einen gewissen Abstand $= pq$ der andern Welle zu erreichen. Stellt also p q eine halbe Wellenlänge vor, so ist e q der Abstand des mittlern hellen Streifes vom nächsten dunkeln, und bei der ungemeinen Kleinheit der Wellenlänge, deren Hälfte nur etwa

ein Achttausendstel einer Linie ist, muſs qep sehr klein seyn, damit ep eine merkliche Gröſse erhalte.

Daſs der leuchtende Punct A so viel als möglich auf einen wirklich geometrischen Punct beschränkt werden muſs, läſst sich hiernach gleichfalls leicht übersehen; denn bei einem irgend erheblich groſsen leuchtenden Körper verdecken die dem einen Puncte desselben zugehörenden Lichtverstärkungen die dunkeln Stellen, die dem andern Puncte entsprechen würden. Endlich ist auch der Umstand, daſs dieser leuchtende Punct eine Reihe heller Streifen hervorbringt, leicht zu erklären. Das nämlich, was die Figur als in einer einzigen Ebene vorgehend vorstellt, ereignet sich ja nicht in dieser Ebene allein, sondern wenn wir uns die Ebenen der Spiegel BC, CD als auf der Ebene des Papiers senkrecht stehend denken, so liegt ein wenig vor und hinter der Ebene des Papiers neben M ein Punct, der nahe neben e eine Lichtverstärkung hervorbringt, und neben F ein Punct, welcher nahe neben l eine Zerstörung des Lichts hervorbringt, und so müssen Lichtstreifen senkrecht auf der Richtung, in welcher sie an einander gereihet sind, erscheinen.

Als Beispiel, wie die Interferenzen auch andere Phänomene erklären, will ich hier nur bei den *Newtonschen Farbenringen* verweilen, und die Erklärung anderer Phänomene im Artikel *Licht*, wo die Undulationstheorie vollständiger erklärt werden muſs, mittheilen. Wenn man ein an der untern Seite wenig convexes Glas auf ein ebenes Glas legt, so zeigen sich um den Punct, wo die untere Platte die Kugelfläche des convexen Glases berührt, farbige Ringe, welche bei auffallendem weiſsen Lichte alle verschiedenen Farben zeigen[1]. Um jetzt nur den einfachern Fall zu betrachten, will ich das auffallende Licht als einfarbig ansehen, damit nicht von einer ungleichen Länge der Lichtwellen die Rede zu seyn brauche. Es ist bekannt, daſs Fig. 190. ein in AB auffallender und in B die untere Oberfläche des einen Glases erreichender Lichtstrahl hier eine theilweise Reflexion erleidet, so daſs also Lichtwellen von B ausgehend nach der Gegend A zurückgelangen, aber auch von dem bei B nach C zu fortgehenden Lichte wird in C ein Theil zurückgeworfen, und die von B und C nach einerlei Richtung zurückgehenden Lichtstrahlen müssen also einander verstärken oder schwächen,

1 Art. *Anwandlungen*.

je nachdem sie so in irgend einem Puncte ankommen, daſs gleichartige oder ungleichartige Wellentheile zusammenfallen. Um aber hier richtig über die von B ausgehenden Wellen zu urtheilen, muſs man aus der Undulationstheorie den Satz entlehnen, daſs bei der Reflexion nach dem Innern des dichteren Körpers zurück eine Welle von entgegengesetzter Art hervorgebracht wird, als diejenige ist, welche bei der Reflexion vom dichteren Körper in die Luft zurück entstehen würde. Wenn daher der Zwischenraum zwischen B und C selbst in Vergleichung der ungemein geringen Ausdehnung einer Lichtwelle klein oder = 0 ist, so bringen die beiden zurückgehenden Wellen auf ihrem ganzen Wege ein Interferiren hervor, weil ihre durchlaufenen Wege gleich, sie selbst aber von Anfang an so entgegengesetzter Art sind, daſs die Verdichtung der einen mit der Verdünnung der andern zusammenfällt. Ist BC gleich der Hälfte einer Wellenlänge, so ist in eben dem Augenblicke, da ein verdichteter Wellentheil in C ankommt und zurückgeworfen wird, ein verdünnter Wellentheil in B, der eine zurückgeworfene Welle hervorbringt. Wären diese Wellen beim Zurückgehen beide den ankommenden gleichartig, so würde, da die Differenz ihrer Wege eine ganze Wellenlänge beträgt, eine Verstärkung des Lichts hervorgebracht, aber da die eine beim Austritt aus dem dichteren Mittel, die andere beim Eintritt in das dichtere Mittel reflectirt wird, so ist im einen Falle eine halbe Undulation verloren gegangen, und diese Wellen zerstören auf ihrem ganzen Wege einander. Dagegen wenn BC gleich dem Viertel einer Wellenlänge ist, so sind die Wege der von B und von C zurückkehrenden Wellen um eine halbe Wellenlänge verschieden, und die Entgegensetzung der Einwirkung, welche die eine und die andere bei der Reflexion erlitten hat, bringt eine zweite Differenz von einer halben Wellenlänge hinzu, so daſs nun auf dem ganzen Wege nach A zu und weiter hinaus die verdichteten Theile mit den verdichteten und die verdünnten mit den verdünnten zusammentreffen, also einem Auge in A einen verstärkten Lichteindruck gewähren. So entsteht für das in A beobachtende Auge in der Mitte, im Berührungspuncte, ein dunkler Fleck, da wo der Abstand der Gläser ein Viertel einer Wellenlänge beträgt, ein heller Kreis, wo der Abstand die Hälfte einer Wellenlänge beträgt, ein dunkler Kreis, und so abwechselnd, genau wie es die Erfahrung ergiebt. Ist das

Licht nicht homogen, so decken die hellen und dunkeln Ringe, die den verschiedenen Farben angehören, einander zum Theil, denn da die Wellen des violetten Strahles kürzer sind, so liegt für sie das Viertel einer Wellenlänge dem Mittelpuncte der Ringe näher, und die violetten Ringe sind kleiner, die rothen dagegen sind die gröſsten, und die Bestimmung des Aufeinanderfallens findet so statt, wie es im Art. *Anwandlungen* gezeigt worden ist [1].

Nach der Undulationstheorie sind im Wasser, überhaupt in stärker brechenden Materien, die Wellen kürzer, und folglich ist, wenn sich Wasser zwischen den Gläsern befindet, die Stelle, die dem Viertel einer Wellenlänge entspricht, näher am Mittelpuncte, die Ringe also kleiner, wie es sich auch wirklich findet.

Als einen besonders wichtigen Triumph der Undulationstheorie sehen es die Vertheidiger derselben an, daſs selbst die chemischen Wirkungen des Lichtes sich, den Interferenzen gemäſs, da nicht zeigen, wo Wellentheile entgegengesetzter Art zusammentreffen. Arago hat hierfür folgenden Versuch ausgeführt [2]. Er lieſs die von zwei Spiegeln auf die oben angeführte Weise reflectirten Lichtstrahlen, welche also durch ihre Interferenzen dunkle und helle Streifen hervorbrachten, auf frisch bereitetes Chlorsilber fallen, und fand hier, daſs die Schwärzung, welche die Einwirkung des Lichtes allemal auf dem Hornsilber hervorbringt, durch Zwischenräume unterbrochen, also die Schwärzung nur da entstanden war, wo die Interferenzen der Lichtwellen ein wirksames Zusammentreffen derselben gestattet hatten. Also ist allerdings auch die chemische Wirkung ebenso durch das Zusammentreffen der Lichtstrahlen bedingt, wie es die Wirkungen auf das Gesicht sind; die chemischen Wirkungen hören auf, wo die Differenz der Wege durch das 1, 3, 5, 7fache einer gewissen Gröſse d ausgedrückt wird, und sie erreichen ihren gröſsten Werth, wo diese Differenz der Wege das 2, 4, 6, 8fache u. s. w. eben jenes d ist. Arago hat gezeigt, daſs diese ungleiche, durch Streifen unterbrochene Schwärzung des Chlorsilbers nicht mehr statt findet,

1 Annales de Ch. et Ph. XXII. 337. XXIII. 129. u. Poggendorff's Ann. XII. 197.

2 Einen ähnlichen Versuch hat auch Young ausgeführt, Lectures on nat. phil. II. 647.

wenn man den einen Lichtstrahl durch einen Schirm auffängt, dafs also in der That das Zusammentreffen zweier Lichtstrahlen es ist, wovon auch hier die geschwächte und selbst zerstörte Wirkung des Lichtes abhängt.

Es scheint mir hier nicht möglich, die Interferenz-Erscheinungen, welche das polarisirte Licht darbietet, zu erzählen. Auch diese, insbesondere die Erscheinung, dafs bei polarisirten Strahlen unter gewissen Umständen die Interferenzen nicht eintreten, hat Fresnel aus seiner Theorie erklärt, indefs hat er dabei eine neue Hypothese zu Hülfe genommen, welche wenigstens die Einfachheit der bisherigen Betrachtungen zum Theil aufhebt [1]. *B.*

Iod.

Iodine; *Iodum, Iodina;* Iode; *Iodine;* (von ἰοειδής, veilchenfarbig), von Courtois 1811 entdeckt, findet sich, meist als hydriodsaures Natron, im Meere, in verschiedenen im und am Meere wachsenden Pflanzen, in einigen Seethieren, in manchem Steinsalz, mehreren Salzsoolen und einigen andern Mineralwassern. Es wird aus der Lauge der eingeäscherten Seegewächse, nachdem man daraus die minder löslichen Salze durch Abdampfen und Krystallisiren geschieden hat, durch Erhitzen mit Vitriolöl und Braunstein sublimirt. Es krystallisirt in spitzen rhombischen Oktaedern und dünnen Blättchen, ist weich und leicht zerreiblich, hat nach Gay-Lussac ein specifisches Gewicht von 4,948, erscheint bei auffallendem Lichte eisenschwarz, bei durch dünne Blättchen fallendem roth, während dickere Massen undurchsichtig sind; es schmilzt nach Gay-Lussac bei 107° und siedet bei 175 bis 180°; sein Dampf ist dunkel violett und hat nach Dumas ein specifisches Gewicht von 8,716 (das der Luft = 1,000).

Das Iod löst sich in 7000 Wasser mit bräunlich gelber Farbe.

Aufser der noch nicht völlig erwiesenen *iodigen Säure* giebt es nur eine Verbindung des Iods mit Sauerstoff, nämlich die *Iodsäure* (125 Iod auf 40 Sauerstoff), weifs, geruchlos, von scharfem Geschmack, in der Hitze in Ioddampf und in Sauerstoffgas zerfallend und mit brennbaren Körpern verpuffend. Sie

1 Poggendorff Ann. der Phys. XII. 366.

löset sich leicht in Wasser, und bildet mit den Salzbasen die *iodsauren Salze*, welche in der Hitze entweder bloſs Sauerstoffgas entwickeln, während Iodmetall bleibt, oder Sauerstoffgas und Ioddampf, während Metalloxyd bleibt, und welche auf glühenden Kohlen verpuffen, jedoch schwächer als die chlorsauren Salze.

Mit dem Wasserstoff bildet das Iod die *Hydriodsäure* (125 Iod und 1 Wasserstoff). Diese erhält man beim Erwärmen von Iodphosphor mit sehr wenig Wasser, als ein farbloses, sauer riechendes, nicht brennbares Gas von 4,3677 spec. Gewicht, durch Sauerstoff und verschiedene Sauerstoff haltende Verbindungen und durch Chlor, welche den Wasserstoff entziehen, so wie durch Metalle, welche das Iod entziehen, zersetzbar, sich mit den meisten Metalloxyden in Wasser und in Iodmetall verwandelnd. Dasselbe wird vom Wasser reichlich verschluckt zu einer farblosen, sauern Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht bis zu 1,700 gehen kann, wobei sie einen Siedpunkt von 125 bis 128° zeigt und ohne Zersetzung verdampft. Da die Hydriodsäure mit einigen Metalloxyden schon in der Kälte in Wasser und Iodmetall zerfällt, so liefert sie nur mit einem Theile derselben hydriodsaure Salze, die aber theils schon beim Krystallisiren, theils beim Abdampfen zur Trockne und Erhitzen unter Wasserbildung ebenfalls in Iodmetalle übergehen. Die hydriodsauren Salze lassen bei Anwendung überschüssigen Vitriolöls Iod frei werden, und da dieses mit Stärkemehl eine lebhaft violett blaue Verbindung eingeht, so läſst sich in einer Flüssigkeit, die wenig hydriodsaures Salz enthält, durch Versetzen mit Vitriolöl und wenig Stärkemehl mittelst der Färbung des letztern das Iod entdecken. Auch geben die in Wasser gelösten hydriodsauren Salze mit Bleisalzen und Quecksilberoxydulsalzen einen gelben, mit Quecksilberoxydsalzen einen scharlachrothen, mit Silbersalzen einen gelbweiſsen Niederschlag; letzterer, das Iodsilber, unterscheidet sich durch seine Unauflöslichkeit in wässerigem Ammoniak vom Chlorsilber.

Sofern die wässerige Hydriodsäure und die wässerigen hydriodsauren Alkalien noch eben soviel Iod aufzunehmen vermögen, als sie bereits enthalten, womit eine dunkelbraune Färbung verbunden ist, kann man eine iodreichere oder wasserstoffärmere *hydriodige Säure*, so wie *hydriodigsaure Salze* unterscheiden.

Das Iod vereinigt sich, zum Theil nach mehreren Verhältnissen, mit Kohlenstoff, Phosphor, Schwefel, Chlor, Stickstoff und Cyan; es löst sich in Schwefelkohlenstoff mit lebhaft violetter Farbe.

Das Iod ist mit den meisten Metallen verbindbar, zum Theil unter Wärme- oder Feuer-Entwickelung. Die Iodmetalle sind im Allgemeinen den Chlormetallen verwandt; sie besitzen keinen Metallglanz, dagegen oft lebhafte Farben. In der Glühhitze treibt der Sauerstoff aus den meisten derselben, das Chlor aus allen, das Iod aus. Die meisten lösen sich im Wasser und diese Lösungen sind als Lösungen hydriodsaurer Metalloxyde zu betrachten. *G.*

Iridium.

Iridium; Iridium; *Iridium.* Dieses von Wollaston entdeckte Metall findet sich im Platinerz theils in einzelnen Körnern, die fast bloſs aus Iridium und Osmium bestehen, theils den Platinkörnchen selbst in kleiner Menge beigemischt. Es bleibt beim Auflösen des Platinerzes in Verbindung mit Osmium als ein schwarzes Pulver gröſstentheils ungelöst zurück und wird hieraus auf einem umständlichen Wege für sich dargestellt.

Es erscheint als ein grauweiſses Pulver, oder nach dem Schmelzen, was bloſs durch eine starke Voltasche Säule oder durch das Knallgasgebläse möglich ist, in weiſsen, sehr glänzenden, spröden Kügelchen von 18,68 specifischem Gewichte.

Das Iridium oxydirt sich oberflächlich bei mäſsigem Glühen an der Luft, und wird bei heftigem Glühen wieder reducirt; es scheint mit Sauerstoff 4 Verbindungen zu bilden.

1) *Iridiumoxydul* (98,7 Iridium auf 8 Sauerstoff). Schwarzes, schweres Pulver. Bildet mit Wasser ein graugrünes Hydrat, welches sich in Säuren zu schmutzig grünen Salzen löst und mit wässrigem Kali eine Lösung bildet, die an der Luft erst purpurn, dann blau wird, sofern sich darin ein mittleres, blaues Oxyd, zwischen Oxydul und Sesquioxydul, bildet.

2) *Iridium-Sesquioxydul* (98,7 Iridium auf 12 S.). Zartes, schwarzblaues Pulver, welches durch Wasserstoffgas in der Kälte unter Wärmeentwickelung reducirt wird, und beim Erhitzen mit brennbaren Körpern verpufft. Sein Hydrat ist dun-

kelbraun, seine Lösung in Säuren ist braun oder schmutzig purpurroth.

3) *Iridiumoxyd* (98,7 Iridium auf 16 Sauerstoff). Nicht für sich bekannt; bildet mit Salzsäure und Schwefelsäure gelbrothe Lösungen, welche nicht durch Alkalien fällbar sind, in denen es leicht löslich ist.

4) *Iridium-Sesquioxyd* (98,7 Iridium auf 24 Sauerstoff). Sein Hydrat ist braungelb oder grünlichgelb und seine Auflösung in Salzsäure ist rosenroth.

Mit Chlor bildet das Iridium 4 entsprechende Verbindungen:

1) *Einfach-Chloriridium* (98,7 Iridium auf 35,4 Chlor). Leichtes dunkelolivengrünes Pulver, kaum in Wasser, wenig, mit grünlich gelber Farbe, in Salzsäure löslich, bildet mit Chlorkalium eine grünliche, strahlig krystallisirende Verbindung.

2) *Anderthalb-Chloriridium* (98,7 Iridium auf 53,1 Chlor). Dunkelbraun. Vereinigt sich mit Chlorkalium zu einem dunkelgelbbraunen, nicht deutlich krystallisirenden Körper.

3) *Doppelt-Chloriridium* (98,7 Iridium auf 70,8 Chlor). Schwarze Masse, erst in starker Hitze Chlor verlierend, leicht in Wasser und Weingeist löslich. Bildet sowohl mit Chlorkalium als mit Salmiak rothschwarze Oktaeder von dunkelrothem Pulver, mit dunkelrother Farbe in Wasser löslich.

4) *Dreifach-Chloriridium* (98,7 Iridium auf 106,2 Chlor). Nur in Verbindung mit Chlorkalium bekannt, welche Verbindung bei auffallendem Lichte braun, bei durchfallendem rubinroth ist, und sich mit rosenrother Farbe in Wasser löst.

Indem man durch Auflösung der 4 Oxyde in Salzsäure Hydrothionsäure leitet, so erhält man schwarzbraune Niederschläge, die als verschiedene Arten von *Schwefeliridium* zu betrachten sind. *G.*

Irrlicht.

Irrwisch; *Ignis fatuus, ambulo;* Feu follet; *Wile with the Wisp.* Es ist in der That sonderbar, daſs man allgemein von den Irrlichtern als einer durchaus bekannten Sache redet und lange Zeit geredet hat, ohne daſs dennoch weder das eigentliche Wesen derselben, noch auch sogar selbst das Thatsächliche bisher genügend ausgemittelt wurde.

Schon Gehler[1] bemerkte dieses, und so viel auch seitdem für die Erweiterung der Naturkunde geschehen ist, so hat doch der vorliegende Gegenstand in diesem Zeitraume keine nähere Aufklärung erhalten, ja es sind mir selbst aus den zahlreichen Zeitschriften kaum neue Erfahrungen bekannt geworden[2]. Vermuthlich hat daher Vorurtheil und Täuschung manches geschaffen, was bei näherer Untersuchung sich nicht bestätigt.

Unter Irrlichtern versteht man gemeiniglich kleine Flämmchen, welche nicht hoch über der Oberfläche der Erde zum Vorschein kommen, eine hüpfende, unruhige Bewegung zeigen und schnell wieder verschwinden. Meistens sollen sie an derselben Stelle, wo das erste zum Vorschein kam, sich wiederholt zeigen, auch in gröfserer Zahl an den geeigneten Orten. Insbesondere Kirchhöfe, sumpfige Gegenden, Moore und solche Plätze, auf denen gestorbene Thiere verwesen, sind diejenigen Orte, wo sie am häufigsten beobachtet wurden. Dafs sie namentlich auf Kirchhöfen oft gesehen sind, mufs ich nach dem Zeugnisse eines vorurtheilsfreien und wahrhaften Mannes glauben, welcher mir wiederholt erzählte, dafs er sie in seiner Jugend beim Besuche der Frühschule dort häufig gesehen habe; auffallend aber scheint es mir, dafs ich selbst bei aller Aufmerksamkeit auf dieses Phänomen nur einmal ein solches Licht gesehen habe, ohne wegen zu weiter Entfernung mit Gewifsheit gegen Täuschung gesichert zu seyn. Man hat nach Volta[3] diese eigentlichen Irrlichter für kleine Massen Phosphorwasserstoffgas gehalten, welches allerdings aus vereinten vegetabilischen und thierischen modernden Körpern entbunden wird. Nach seiner Ansicht sollte zwar dieses Gas nur Sumpfluft (Kohlenwasserstoffgas) seyn, welche er mit etwas atmosphärischer Luft verbunden leicht auch durch den elektrischen Funken entzünden konnte, und die Entzündung desselben war er dann geneigt auch bei den Irrlichtern von der Elektricität abzuleiten. Gehler wendet jedoch hiergegen ein, dafs die Irrlichter eigentlich nur leuchten, ohne zu brennen, und ist daher geneigt, sie für Wir-

1 Wörterb. T. II. S. 692.

2 Gilbert in seinen Ann. LXX. S. 225. klagt, dafs er nirgends glaubhafte neuere Beobachtungen über diese Phänomene finde, weswegen er geneigt sey, ihre Exsistenz ganz zu leugnen.

3 Lettere sull' aria inflammabile nativa delle paludi. Como 1776. 8.

kungen einer durch Fäulniſs erzeugten phosphorescirenden Materie zu halten, um so mehr, als man sonst die das Gas entzündenden elektrischen Funken hinzudenken müſste. G. Bischof[1], welcher gleichfalls nur einmal in seinem Leben Irrlichter gesehen zu haben erzählt, bezweifelt die von Volta aufgestellte Erklärung, weil die Irrlichter weder bei Tage gesehen werden, noch auch ein Verpuffen hören lassen, welches beides beim Phosphorwasserstoffgas eintritt, Kastner dagegen versichert, sie oft und anhaltend an einem sumpfigen Orte neben Heidelberg beobachtet zu haben, und theilt eine Beschreibung mit, welche kaum eine andere Erklärung, als diese gewöhnliche, zuläſst. Er sah dieselben einige Fuſs über der Erde, dem etwas verstärkten Leuchten der Johanniswürmchen ähnlich, und wie eine in Kohlensäure getauchte Flamme verlöschend. Die hüpfende Bewegung schien bei einigen auf einer optischen Täuschung zu beruhen und von mehreren in ungleichen Entfernungen schnell entstehenden und erlöschenden Flämmchen herzurühren, bei andern dagegen eine bogenförmige Bewegung unverkennbar vorhanden zu seyn[2].

Die Hypothese einer Entzündung der aufsteigenden Gasblasen durch die Elektricität ist allerdings ganz unhaltbar; nach allen übereinstimmenden Beschreibungen aber müssen die eigentlichen Irrlichter aus Gasblasen bestehen, und da sie bloſs bei Nacht gesehen werden, so kann ihr Leuchten nur ein schwaches phosphorisches seyn. Berücksichtigt man ferner die Beschaffenheit der Oerter, wo sie überhaupt oder am zahlreichsten beobachtet werden, an denen Moderung thierischer und vegetabilischer Körper in einem hohen Grade statt findet, so

1 Kastner Archiv. V. 178.

2 Kastner's Hypothese, wonach die Irrlichter zur Classe der Sternschnuppen, fliegenden Drachen und Kometen gehören, s. a. a. O. und dessen Meteorol. I. 416, verdient wohl keine eigentliche Widerlegung, da die kleinsten Meteore dieser Art, die Sternschnuppen, nach den neuesten Untersuchungen von Brandes, s. dessen Unterhaltungen für Freunde d. Physik u. Astronom. Hft. I. Leipz. 1826, bloſs in so bedeutenden Höhen und von auſserordentlich schneller Bewegung gesehen werden. Keine der zahlreich beobachteten war niedriger als eine geographische Meile, und die ältere Erklärung, wonach sie aus schwefligen Dünsten bestehen sollten, ist hiernach ganz unzulässig.

liegt es sehr nahe, phosphorhaltiges Wasserstoffgas als die Ursache ihres Entstehens anzunehmen, ohne daſs dieses gerade das eigentliche, beim Zutritt der atmosphärischen Luft mit vielem Lichte verbrennende Phosphorwasserstoffgas seyn muſs. Zugleich ist es immerhin leicht möglich, daſs sie in der neuern Zeit seltener beobachtet wurden, als dieses in früheren der Fall war, weil man Kirchhöfe und sonstige zu ihrer Erzeugung geeignete Orte mehr aus dem Bereiche der Wohnungen entfernt, überhaupt auch mehr auf die Reinheit der Luft gesehen hat; manche Beobachtungen derselben mögen auſserdem aber einer Bekanntmachung nicht werth geschienen haben.

So leicht und natürlich es übrigens ist, Irrlichter der genannten Art anzunehmen, eben so groſs ist auf der andern Seite die Wahrscheinlichkeit, daſs bei manchen Erzählungen dieser Erscheinungen Furcht und Aberglaube das wirklich Beobachtete vergröſsert haben. Hierauf beruhen ohne Zweifel die Sagen, daſs die Irrlichter entfliehen sollen, wenn man sich ihnen nähert, wovon der Name derselben herrührt, insofern sie den Wanderer irre führen, den Fliehenden dagegen verfolgen. Der Aberglaube machte sie sogar zu bösen Geistern oder zu Seelen verstorbener Menschen, welchen Vorurtheilen selbst Physiker, wie Cardanus[1], Sennert[2] und andere huldigten. Unglaublich ist es auch, was Beccaria[3] erzählt, daſs ein Irrlicht eine Italiänische Meile weit vor einem Reisenden hergegangen sey.

Wenn man berücksichtigt, wie oberflächlich und ganz ohne das Bestreben nach gründlicher Erforschung der Sache gröſstentheils alle die Irrlichter beobachtet wurden, worüber Nachrichten mitgetheilt sind, so dringt sich die Vermuthung auf, daſs der phosphorische Schein in Zersetzung begriffener vegetabilischer Substanzen wohl nicht selten damit verwechselt worden sey. So erzählt Derham[4], er habe einst ein solches gesehen, welches um eine modernde Distel zu hüpfen geschienen, es sey indeſs vor ihm geflohen, als er sich genähert habe. In nicht seltenen Fällen mag auch bloſs ein leuchtendes Insect, ein hell scheinendes Johanniswürmchen (*Lampyris noctiluca*) oder eine sonstige

1 De varietate rerum L. XIV. c. 69.

2 Epitome natur. scient. Amst. 1651. 12. L. II. cap. 2.

3 Hakow Physica dogmatica. T. II. p. 233.

4 Phil. Trans. XXXVI. n. 411.

Gattung mit jenem Phänomene verwechselt worden seyn, wenn auch Willoughby, Ray und Vallisneri[1] vermuthlich zu weit gehen, insofern nach diesen alle Irrlichter von leuchtenden Insecten herrühren sollen. Hiermit stimmt sehr gut überein, daſs sie vorzüglich häufig in Italien und in Spanien beobachtet worden sind, wo jene Insecten in groſser Menge und stark leuchtend gefunden werden, obgleich wärmeren Gegenden auch stärkere Moderung und Gasentbindung eigen ist. Gehler leitet manche derselben von der Elektricität ab, und rechnet unter sie daher auch die durch v. Trebra[2] beobachtete nordlichtartige elektrische Erleuchtung. Dieses specielle Phänomen kann indeſs nicht füglich unter die Classe der Irrlichter gezählt werden, mit desto gröſserer Wahrscheinlichkeit aber läſst sich annehmen, daſs die nicht selten sich zeigenden elektrischen Flämmchen an spitzen Gegenständen, das sogenannte Elmsfeuer, für Irrlichter gehalten worden sind. Reimarus[3] hält die Irrlichter nicht für elektrisch, weil ihr Licht zu wenig hell sey. Da sich diese Aeuſserung wenigstens zum Theil auf eigene Beobachtungen gründet, so geht hieraus deutlich hervor, daſs jene nur aus einem schwachen phosphorischen Schimmer bestehen können, indem das elektrische Leuchten selbst nicht auſserordentlich hell ist, und dieses bestätigt um so mehr die Vermuthung, daſs das ganze Phänomen aus dem Leuchten einzelner phosphorescirender Theile aus dem Thier- und Pflanzenreiche und zugleich aus schwach phosphorescirenden Gasen erklärbar sey. Solche Körper, namentlich phosphorescirende Pflanzentheile und animalische Substanzen, sind in Menge vorhanden, und wenn man voraussetzen darf, daſs die Beobachter derselben statt näherer Untersuchung von Furcht ergriffen sich entfernten und das wirklich Gesehene vergröſserten, so wird leicht begreiflich, warum früher so viele und groſse, die vielfachsten Bewegungen zeigende Irrlichter gesehen worden seyn sollen, da sie doch gegenwärtig nur selten beobachtet werden.

Vorzügliche Aufmerksamkeit verdienen noch die Aussagen glaubhafter Augenzeugen über eine hiermit auf allen Fall sehr nahe verwandte Erscheinung. Dechales[4] nämlich erzählt,

1 Opp. T. I. p. 85.

2 Teutscher Merkur. 1783. Oct.

3 S. die Schrift: Vom Blitze. Hamb. 1788. §. 100 u. 168.

4 Mundus mathem. T. IV.

Robert Fludd habe einst ein Irrlicht verfolgt, zu Boden geschlagen und eine schleimige Substanz wie Froschlaich gefunden. Eine ganz gleiche Beobachtung erzählt Chladni[1]. Dieser sah 1781 an einem warmen Sommerabende in der Dämmerung kurz nach einem Regen im Garten bei Dresden viele leuchtende Puncte im nassen Grase hüpfen, welche sich nach der Richtung des Windes bewegten und deren einige sich an die Räder des Wagens setzten. Sie flohen bei der Annäherung, und es war schwer, sie zu erhaschen; diejenigen aber, welche Chladni fing, zeigten sich als kleine gallertartige Massen, dem Froschlaich oder gekochten Sagokörnern ähnlich. Sie hatten weder einen kenntlichen Geruch, noch Geschmack, und schienen modernde Pflanzentheile zu seyn; möglich bleibt es indeſs immer, daſs sie aus dem Thierreiche entsprungen seyn konnten. Auch diese Beobachtung bestätigt die Richtigkeit der oben gegebenen Erklärung über den Ursprung der eigentlichen Irrlichter, diejenigen Erscheinungen aber, welche Musschenbroek [2] unter dem Namen *ambulones incendiarii* zu den Irrlichtern oder Irrwischen zu zählen scheint, gehören nicht hierher und sollen im Artikel *Vulcan*, *Gasvulcan* erwähnt werden. Gewisse noch räthselhafte Meteore, welche den eigentlichen Irrlichtern am meisten gleichen, aus der Erde aufsteigende gröſsere Flammen, die sich momentan entzünden und wieder erlöschen, auch ihren Ort schnell wechseln, finden sich in Italien, namentlich auf einigen dürren Hügeln in der Gegend um Nizza[3]. Sie werden Irrlichter genannt, und das Volk knüpft viele abergläubige Vorstellungen an ihr Erscheinen. Sie sollen sich nach älteren Nachrichten in den morastigen Wiesen am Po und um Bologna häufig zeigen, und mögen wohl aus phosphorhaltigen, aus den modernden Substanzen aufsteigenden, nicht eigentlich brennenden, sondern nur leuchtenden Gasarten und Dämpfen bestehen. Von dieser Art muſs dann auch das leuchtende Meteor gewesen seyn, welches sich dem Dr. Doé in einer moorigen Gegend unweit Brienne zeigte[4], eine Höhe von 10 bis 12 Fuſs hatte, in einer Viertelstunde aber bis etwa 3 Fuſs herabsank, und

1 Ueber den Ursprung einiger Eisenmassen. Leipz. 1794. 4. S. 334.

2 Introd. T. II. §. 2508.

3 Histoire naturelle des principales productions de l'Europe meridionale cet. Par A. Risso. Par. 1826. p. 296.

4 G. LXX. 225.

in der Dunkelheit einer sternhellen Nacht so hell leuchtete, daſs man dabei lesen konnte. Kein eigentliches Brennen, sondern nur ein Leuchten will der Beobachter selbst wahrgenommen haben. *M.*

Irradiation.

Irradiatio; irradiation; *irradiation*, ist eine durch die Stärke des Lichtes hervorgebrachte scheinbare Vergröſserung des glänzenden Gegenstandes. Sie entsteht wegen der Reizbarkeit unserer Sehenerven vorzüglich daraus, daſs nicht bloſs im strengsten Sinne diejenigen Theile der Netzhaut im Auge von dem Lichteindrucke eines sehr hellen Gegenstandes afficirt werden, auf welche das hauptsächlich durch die Krystalllinse des Auges hervorgebrachte Bild fällt, sondern auch die benachbarten den Eindruck des Lichtes mit empfangen. Die bekannteste Wirkung der Irradiation des Lichtes ist die Täuschung, daſs uns der noch wenig erleuchtete, sichelförmige Mond die matt erleuchtete, im aschfarbigen Lichte sichtbare Scheibe des Mondes zu umfassen, jene Sichel einem gröſsern Kreise als die matt erleuchtete Mondscheibe anzugehören scheint.

Ob alle Augen wegen Irradiation die Himmelskörper um gleich viel vergröſsert sehen, ist wohl ungewiſs, indeſs nimmt man an, daſs der Sonnendurchmesser uns um 6 bis 7 Sec. gröſser erscheint, als es ohne Irradiation der Fall seyn würde. Caturegli berechnete [1] bei der Sonnenfinsterniſs vom 7. Dec. 1820, daſs die Dauer derselben um 19 Sec. verschieden ausfiele, wenn man den Sonnendurchmesser als um 7 Sec. durch Irradiation vergröſsert ansähe. Ihre Dauer müſste etwas kürzer seyn; denn wenn keine Irradiation statt fände, so wäre für den Halbmesser $= r$ der Sonne der Eintritt des Mondes dann, wenn der scheinbare Abstand des nächsten Mondrandes vom Mittelpuncte der Sonne $= r$ ist; wäre aber jener Halbmesser aus dem eigentlichen Halbmesser $= r - 3''$ und der Irradiation $= 3''$ zusammengesetzt, so muſs der Mondrand bis auf $r - 3''$ dem Sonnenmittelpuncte nahe gekommen seyn, wenn die Bedeckung des Mondes von der Sonne anfangen soll. Bürg machte bei der auf die Beobachtung eben dieser Sonnenfinsterniſs gegründeten Rech-

1 De Zach corr. astr. IV. 174.

nung die Bemerkung, daſs die Beobachtung des Eintrittes und Austrittes des Mondes eine Verminderung der Summe der Halbmesser, die Beobachtung des Ringes eine Verminderung der Differenz der Halbmesser beider Himmelskörper ergebe. Das erstere ist das, was ich vorhin bemerkte; was aber die Bildung des Ringes betrifft, so fängt dieser an zu entstehen, wenn die Entfernung der Mittelpuncte der Differenz der eigentlichen scheinbaren Halbmesser gleich ist. Sein Entstehen tritt also später ein, wenn wir, durch Irradiation getäuscht, der Sonne einen zu groſsen Halbmesser beilegten. Die Beobachtungen deuteten an, daſs man den Halbmesser der Sonne 3",9 kleiner, als ihn Delambre's Tafeln geben, und den Halbmesser des Mondes 2",3 kleiner, als ihn Bürg's Tafeln geben, ansetzen müsse. Ob dieses als Wirkung der Irradiation, verbunden mit der Wirkung der Beugung des Lichts, anzusehen sey, glaubt Bürg nicht mit Gewiſsheit entscheiden zu können [1].

Diese Irradiation ist es, die uns die Fixsterne so zeigt, als hätten sie einen scheinbaren Durchmesser. Auf diese Täuschung beziehen sich Herschel's Untersuchungen über den richtig oder unrichtig angegebenen scheinbaren Durchmesser kleiner Gegenstände. Findet sich nämlich bei verstärkter Vergröſserung, daſs der scheinbare Sehewinkel in dem genau richtigen Verhältnisse wächst, wie die Vergröſserung es fordert, so darf man die Messung als den wirklichen scheinbaren Durchmesser angebend ansehen, dagegen fällt die Abmessung des undeutlichen Bildes solcher Gegenstände, deren Halbmesser sehr klein ist, bei stärkeren Vergröſserungen nicht so groſs aus, als das Verhältniſs der Vergröſserung fordert [2]. Schröter bemerkt in Beziehung auf die von Herschel bei diesen Bestimmungen angewandten Vergleichungen, daſs jeder leuchtende Körper, in gröſsere Entfernung gestellt, nicht so an scheinbarem Durchmesser abnehme, wie es die Entfernung fordre, weil die Irradiation den schon sehr klein gewordenen scheinbaren Durchmesser nach Verhältniſs mehr vergröſsert, als es in Vergleichung gegen den gröſsern scheinbaren Halbmesser der Fall war [3]. *B.*

1 Astr. Jahrb. 1824. S. 129.

2 Phil. Transact. for 1804.

3 Schröter's Beobachtungen über die drei neuen Planeten. S. 130.

Bayerische Staatsbibliothek München

Isolatorium.

Isolirendes Stativ; *Isolatorium;* Isolatoire; *Isolatory.* Diesen Namen führt eine Vorrichtung, um bei elektrischen Versuchen Körper, denen man Elektricität mittheilen und in denselben anhäufen will, zu isoliren. Dazu gebraucht man Pech- oder Harzkuchen, auch wohl Schwefelkuchen, auf kurzen Füſsen stehende Rahmen, die mit seidenen Stricken dnrchflochten sind, vorzüglich aber Bretchen, die auf Glasfüſsen stehen. Bei der medicinischen Anwendung der Elektricität kommt man öfters in den Fall, den Kranken isoliren zu müssen. Ein starkes Gestell von gedörrtem und in Oel gesottenem Holze auf starken Glasfüſsen, die wenigstens 3 Zolle hoch seyn müssen, ist dazu dienlich, und führt im engern Sinne den Namen eines Isolirschemels. Im Falle der Kranke auf einem Stuhle sitzend darauf gebracht werden soll, muſs es von zureichender Ausdehnung seyn. Da das Glas an und für sich nicht zu den vollkommensten Nichtleitern gehört, besonders weil es sich leicht durch Anziehung der Feuchtigkeit mit einer dünnen Wasserhaut überzieht, so ist es nothwendig, diese Glasfüſse wohl zu überfirnissen, entweder durch wiederholtes Ueberstreichen mit einer Siegellackauflösung in Weingeist, wodurch ein Siegellacküberzug zurückbleibt, oder noch besser durch Ueberstreichen mit Bernsteinfirniſs, den man gehörig austrocknen läſst. Auch kann man zu noch vollkommnerer Isolirung die Breter selbst überfirnissen. Dabei müssen alle Kanten und Ecken des Gestells wohl abgerundet seyn. Nollet wandte zum Isoliren von Menschen schon mit hinlänglichem Erfolge Schuhe von gedörrtem und in Oel gesottenem Holze an. Um kleinere Körper bei elektrischen Versuchen zu isoliren, kann man sich auch im Nothfalle eines umgekehrten Trinkglases, einer Porzellantasse u. s. w. bedienen. Man muſs aber wohl darauf sehen, daſs diese Unterlagen, so wie auch jene eigentlichen Isolatorien recht trocken seyen, weswegen man sie besonders bei feuchter Witterung vorher zu erwärmen pflegt. Harzkuchen, auf jene mit seidenen Schnüren durchzogenen Rahmen gelegt, welche zur Unterlage der zu isolirenden Körper dienen, haben in dieser Hinsicht Vorzüge vor Glas und Porzellan, da sie die Feuchtigkeit weniger anziehen und an und für sich schon vollkommnere Nichtleiter sind. *P.*

Bayerische Staatsbibliothek München

Isoliren.

Insulare; Isoler; *Insulate.* Einen Körper isoliren heiſst, ihn mit lauter Nichtleitern der Elektricität umringen und von aller leitenden Verbindung mit dem Erdboden ausschlieſsen. Nur dadurch wird es möglich, Elektricität bis zu einer merklichen Spannung in einem Körper anzuhäufen und zur sichtbaren Thätigkeit zu bringen. Wenn die Luft kein Nichtleiter wäre, so würde für uns das groſse und interessante Gebiet der Elektricitätserscheinungen, die wir durch die gewöhnlichen elektrischen Werkzeuge hervorrufen, wohl gar nicht exsistiren. Eine Metallstange, die in reiner und trockner Luft an seidenen Schnüren hängt, auf einem gläsernen Fuſse steht und dergl., ist isolirt, weil sie nichts als Luft und Seide oder Glas, mithin lauter Nichtleiter berührt. So wird ein Mensch isolirt, wenn er sich auf einen Harz- oder Pechkuchen stellt. In einer Luft, welche mit Wasserdünsten überladen ist, so daſs wegen des Ueberschreitens des Maximum von Feuchtigkeit für die gegebene Temperatur bereits ein Niederschlag von Wasser auch nur in ganz unmerklichen Theilchen statt findet, kann man daher keinen Körper gehörig isoliren, daher auch in einer solchen Luft, namentlich also in einem Zimmer, in welchem sich viele Menschen befinden, die durch das Ausathmen und ihre Ausdünstung die Luft mit Feuchtigkeit übersättigen, elektrische Versuche, deren Erfolg von der gehörigen Isolirung, z. B. des Leiters der Elektrisirmaschine u. s. w., abhängt, sehr schlecht von Statten gehen. Aber auch durch Verdünnung hört die Luft auf, ein Nichtleiter zu seyn, und daher gelingen auch die elektrischen Versuche an sehr heiſsen Sommertagen weniger gut, wobei die Wärme an und für sich, auch ohne Rücksicht auf die von ihr abhängige Verdünnung der Luft, das Moment der Isolirung durch dieselbe zu vermindern scheint. Die Absicht der Isolirung ist, zu verhindern, daſs der Körper die Elektricität, die er schon hat, oder die man ihm erst mittheilen will, nicht wieder abgebe, welches geschehen würde, wenn er mit mehreren Leitern und durch diese mit dem Erdboden zusammenhinge. Daher muſs z. B. der erste Leiter oder Hauptleiter, an welchem man die durch eine Maschine erregte Elektricität sammeln will, jederzeit isolirt seyn.

Gewisse Absichten bei den elektrischen Versuchen erfor-

dern, dafs man nicht isolire, oder dafs die Isolirung, wenn sie schon veranstaltet ist, wieder aufgehoben werde. Eine Flasche z. B., welche man laden will, darf nicht isolirt seyn. Wenn eine Glasmaschine den Conductor stark positiv elektrisiren soll, so darf das Reibzeug nicht isolirt seyn, so wie im Gegentheile, wenn die negative Elektricität im Conductor des Reibzeugs angehäuft werden soll, dieser isolirt seyn und dagegen die Isolirung des ersten Leiters aufgehoben werden mufs. Um nun eine solche vorher statt gehabte Isolirung sogleich aufzuheben, darf man nur eine metallene Kette von dünnem Drahte um den Körper schlingen und ihr Ende auf den Fufsboden fallen lassen. So wird ein Körper, z. B. der metallene Conductor, durch eine leitende Verbindung mit dem Fufsboden, welcher stets Feuchtigkeit genug hat, um bei seiner grofsen Oberfläche sehr gut zu leiten, und durch diesen mit den übrigen Theilen des Gebäudes und mit der Erde selbst verbunden. Um die Isolirung wieder herzustellen ist nichts weiter nöthig, als die Kette entweder ganz abzunehmen, oder nur zu verhindern, dafs ihr Ende den Boden und andere Leiter, die zu demselben führen, berühre. Unter dem Artikel *Leiter* wird übrigens noch näher von dem Einflusse, welchen die verschiedenen Grade des Leitungs- und Isolirungs-Vermögens der Körper auf mehr oder weniger vollkommene Aufhebung und Wiederherstellung der Isolirung haben, die Rede seyn.

P.

Juno.

Der Name eines der neu entdeckten kleinen Planeten. Harding entdeckte ihn am 1. Sept. 1804 in den Fischen, und trug diesen kleinen Stern als Fixstern in seine Charte ein, fand ihn aber am 4. Sept. fortgerückt, und versicherte sich nun bald, dafs es ein beweglicher Stern sey, der, ohne allen Nebel, mit Ceres und Pallas zu einer Classe zu gehören schien[1]. Die fortgesetzten Beobachtungen bestätigten, dafs dieser kleine Stern, der im Ansehen ganz einem Fixsterne 8ter Gröfse glich, ein Planet sey. Gauss berechnete schon aus 16tägigen Beobachtungen seine Bahn. Aus den länger fortgesetzten Beobachtungen haben sich folgende Elemente der Bahn ergeben:

1 Berlin. Jahrb. 1807. 244.

Halbe grofse Axe = 2,668676 = 55154000 Meilen
Excentricität = 0,259875 = 14333000 Meilen
Umlaufszeit = 1592,1 Tage = 4 J. 131,1 Tage.
Tägl. mittl. trop. Beweg. = 814″,022.
Neigung der Bahn = 13° 3′ 28″.
Länge des aufst. Knoten = 171° 11′ 2″.
Länge des Perihelii = 53° 25′ 18″.
Mittlere Länge 1826, Oct. 31. 0^h Mannh. 44° 55′ 23″.

Diese Elemente sind von Nicolai aus den Beobachtungen bis 1826 berechnet[1].

Schröter giebt von den Bemühungen, ihre Gröfse zu bestimmen, folgende Nachrichten[2]. Der Planet erschien mit 136maliger Vergröfserung des 13fufsigen Reflectors mit weifsem, ruhigem Lichte und unterschied sich von den benachbarten kleinen Fixsternen, die in seiner Nähe, ihrer Irradiation zum Theil beraubt, nur als Puncte erschienen, statt dafs der Planet einen, wenn gleich kleinen, doch mefsbaren Durchmesser zeigte. Nach Schröter's und Harding's Beobachtungen war das Licht der Juno in Vergleichung gegen die umstehenden Sterne nicht allemal gleich, aber eine regelmäfsige Periode dieser Ungleichheiten liefs sich nicht entdecken. Messungen des Durchmessers vermittelst Projectionsscheiben gaben bei verschiedenen Vergröfserungen im September 1804 den scheinbaren Durchmesser 2″,4 bis 2″,6. Die Messungen sowohl damals als im December, bei gröfserer Entfernung der Erde vom Planeten angestellt, gaben übereinstimmend den wahren Durchmesser der Juno = 309 geogr. Meilen. Eine dichtere, sie nebelähnlich umgebende Atmosphäre, wie Schröter bei Ceres und Pallas fand, hat Juno nicht.

Herschel's Beobachtungen stimmen hiermit nicht ganz überein. So wie er alle diese kleinen Planeten, die beinahe in gleicher Entfernung von der Sonne ihre Umläufe vollenden, kleiner findet, so ist es auch mit Juno der Fall[3]. Da sie bei allen Vergröfserungen bis zur 879maligen noch kein regelmäfsiges Gröfserwerden des scheinbaren Durchmessers zeigte, und nie

1 Schumacher's astr. Nachr. V. 129. Littrow giebt in d. popul. Astron. Elemente an, die etwas hiervon verschieden sind.

2 Lilienthal, Beob. der drei neu entdeckten Planeten Ceres, Pallas, Juno. (Göttingen 1805.)

3 Vgl. Art. *Ceres*. Phil. Tr. 1807.

mit hinreichender Deutlichkeit als Scheibe erschien, so glaubt Herschel ihren scheinbaren Durchmesser nicht über 0,3 Sec. ansetzen zu können, wonach ihr wahrer Durchmesser, dem der Pallas ungefähr gleich, noch keine 30 Meilen betragen würde. Olbers bestimmt aus der Lichtstärke, welche die Planeten Ceres und Juno bei ihrer sehr nahen Zusammenkunft im December 1804 zeigten, den Durchmesser der Juno als nicht einmal gleich der Hälfte des Ceresdurchmessers [1].

Das für die Juno eingeführte Zeichen ist ⚵. *B.*

Jupiter.

Name eines Planeten, für den das Zeichen ♃ eingeführt ist. Er zeichnet sich durch ein schönes weifses Licht aus und steht einzig der Venus an Glanz nach. Die Elemente seiner Bahn sind folgende für 1801:

Halbe grofse Axe = 5,2027911 = 107525000 Meilen.
Excentricität = 0,0481784 = 5180000 Meilen.
Sider. Umlaufszeit = 11 J. 314 T. 20 St. 13′ 40″.
Neigung der Bahn = 1° 18′ 52″.
Länge des aufsteig. Knotens = 98° 25′ 34″.
Länge des Perihelii = 11° 8′ 35″.

Hiernach ist die kleinste Entfernung von der Sonne
= 102345000 geogr. Meilen,
die gröfste = 112705000 geogr. Meilen *).

Was die scheinbare Bewegung betrifft, so ist diese, wie bei allen obern Planeten, um die Zeit der Opposition rückläufig, und diese rückläufige Bewegung dauert ungefähr $3\frac{1}{2}$ Monate; in dieser Zeit geht er durch ungefähr 10 Grade zurück. Seine scheinbare Gröfse beträgt bei der Opposition $\frac{3}{4}$ Min., dagegen beinahe $\frac{1}{2}$ Min., wenn er nahe bei der Sonne steht.

Jupiter zeichnet sich durch eine sehr von der Kugelgestalt abweichende Figur aus, indem bei seiner mittlern Entfernung von der Erde sein Aequatorialdurchmesser 38″,442, sein Polardurchmesser 35″,645 nach Struve's Messungen beträgt [2]. Seine Abplattung ist daher $\frac{1}{13,7}$ des Aequatorialdurchmessers. Schon

1 Berl. Jahrb. 1808. 179.

*) Den Abstand der Erde von der Sonne = 20667000 M. gerechnet.

2 Schumach. astr. Nachr. V. 13.

aus dieser Gestalt läfst sich auf eine schnelle Rotation schliefsen, die sich auch durch Beobachtung seiner Flecken bestätigt hat. Die Umdrehungs-Axe des Jupiter steht beinahe senkrecht auf der Ebene seiner Bahn und weicht nur etwa 3 Grade von der senkrechten Lage ab, daher kann von einem Wechsel der Jahreszeiten auf diesem Planeten vermuthlich wenig bemerkt werden. Wollten wir nach der Analogie unsrer geographischen Bestimmungen ihm eine wärmere Zone, zwei gemäfsigte und zwei kalte Zonen zuschreiben, so würde die wärmere Zone sich nur bis zu 3 Gr. Breite an jeder Seite des Aequators erstrecken, die Polarzonen würden nur drei Grade Halbmesser haben. Auf den Polen des Jupiter erlangt die Sonne nur eine Höhe von 3 Graden über dem Horizonte, und da Jupiter eine ziemlich dichte Atmosphäre zu haben scheint, so mufs selbst auf dem Pole eine sehr helle Dämmerung die Polarnacht unaufhörlich erhellen. Berechnet man die Erleuchtung, welche dieser 107500000 Meilen von der Sonne entfernte Planet von der Sonne erhält, so ist diese ungefähr $\frac{1}{27}$ so grofs als auf der Erde. Die Sonne hat dort einen scheinbaren Durchmesser von nicht mehr als 6 Minuten.

Den mittlern Durchmesser des Jupiter findet man = 11,23 Erddurchmesser = 19300 geogr. Meilen. Seine Oberfläche ist daher 126mal so grofs, als die der Erde, sein körperlicher Inhalt über 1400mal so grofs als der der Erde. Nicht ganz dieser Gröfse angemessen findet man die Masse dieses Planeten, die nur $\frac{1}{1070,5}$ der Sonnenmasse oder = 312,9 der Erdmasse angegeben wird. Diese Massen-Bestimmung, die Bouvard aus den Perturbationen hergeleitet hat, stimmt nicht ganz mit derjenigen überein, die man sonst aus den Elongationen der Trabanten $= \frac{1}{1067,09}$ ansetzte, indefs hat Laplace sich für jene erklärt[1]. Diese Vergleichung von Gröfse und Masse zeigt, dafs die Dichtigkeit nicht einmal ein Viertel der Dichtigkeit der Erde beträgt. Der Fall der Körper an seiner Oberfläche, der übrigens am Aequator erheblich langsamer als am Pole seyn mufs, beträgt 38 Fufs in der ersten Secunde.

Wenn man den Jupiter mit Fernröhren beobachtet, so bemerkt man nach der Richtung seines Aequators mehrere Streifen,

1 In d. 5. Ausg. d. Exposit. du syst. du monde.

die abwechselnd hellere und dunklere Gürtel bilden. Schon Hook beobachtete 1664 drei dunkle Gürtel und einen Fleck, der die Rotation des Jupiter zeigte[1]; er und besonders Cassini beobachtete einen Fleck, der die Umdrehungszeit 9 St. 56′ angab. Die Streifen gehen meistens so gleichförmig, dem Aequator parallel, um den Jupiter, daſs sie nicht wohl zur Beobachtung der Rotationszeit dienen können; zuweilen aber sind sie unterbrochen, so daſs man das eine Ende in die scheinbare Scheibe des Jupiter eintreten und sich über sie fortbewegen sieht. Solcher Fälle, wo das Ende eines kenntlichen Streifes bei der Rotation des Jupiter beobachtet wurde, giebt Cassini mehrere an[2], und auch Schröter hat[3] einen der grauen Streifen als abgebrochen gesehen, wo dann sein Fortrücken auf der Jupitersscheibe zur Bestimmung der Rotation dienen konnte.

Unter den Flecken, die sich zuweilen auf dem Jupiter zeigen, haben sich einige, die von Cassini beobachtet wurden, durch sehr langes Bestehen ausgezeichnet. Der 1665 beobachtete Fleck, der an dem südlichen Streifen lag, ward damals 6 Monate beobachtet, er verschwand alsdann und erschien in derselben Gegend des Jupiter von 1672 bis 1674 wieder; damals gaben seine oft wiederholten Umläufe die Rotationszeit $= 9^h\ 55'\ 51''$ bis $52''$; seine folgenden mehrmals unterbrochenen Erscheinungen gaben immer fast genau dieselbe Umdrehungszeit des Jupiter. Cassini bemerkt, daſs er einen Fleck, den er für eben denselben alten hält, noch im Nov. und Dec. 1689 immer in derselben Lage, anhängend an dem südlichen Streifen, beobachtet habe. Im Jahre 1686 wurde ein neuer langer Fleck beobachtet, der $\frac{1}{6}$ des Jupitersdurchmessers einnahm, und einen Umlauf in $9^h\ 55'$ vollendete. 1690 zeigte sich ein neuer Fleck, der mehrere Umläufe, jeden in $9^h\ 51'$, vollendete, und auch seine Gestalt veränderte[4]. Am 1. März 1672 beobachtete Cassini einen ganzen Umlauf des einen Flecks in einer Nacht. 1699 erschienen drei neue Flecken in dem hellen Streifen, der zwischen den beiden dunkeln liegt, wo auch sonst schon Flecken

1 Phil. Transact. 1665. p. 3. 245.

2 Mém. de Paris. T. II. p. 105.

3 Schröter's Beiträge zu den neuesten astron. Entdeck. Erster Th. Berlin 1788. S. 52.

4 Mém. de l'acad. de Paris. Tome II. p. 12. 107. X. 513.

beobachtet waren. Aber auch die Streifen hatten sich verändert, der nördlichere, welcher 40 Jahre lang der breitere gewesen war, hatte in den beiden letzten Jahren an Breite verloren, der Zwischenraum war breiter geworden, und auch der südliche Streif war breiter geworden [1].

Aehnliche Beobachtungen theilt Maraldi mit [2]. Im Jahre 1708 ward ein Fleck zwischen den beiden südlichern dunkeln Streifen anhängend an dem südlichen und ziemlich ebenso dunkel als jene beobachtet; aber im Januar 1709, als der Planet wieder aus den Sonnenstrahlen hervorging, war der Fleck verschwunden und die Streifen hatten sich verändert. In den nächsten folgenden Jahren sah man zuweilen nur einen Streifen, zuweilen vier. Im Jahre 1712 waren wieder zwei breite dunkle Streifen zu sehen, denen ähnlich, die 1708 am nächsten am Mittelpuncte beobachtet wurden. Im Jahre 1713 zeigte sich aufser diesen noch ein dritter Streif, der auf der einen Hälfte des Jupiter sehr deutlich und breit, auf der andern, fünf Stunden später sichtbar werdenden Hälfte, schmal und undeutlich, kaum zu erkennen war. Maraldi bemerkt dabei, dafs dieses Mal, und auch sonst es so scheine, als ob das Entstehen einer solchen neuen Zone mit einer Abnahme oder selbst mit einem gänzlichen Verschwinden der früher vorhandenen verbunden sey. Mit diesen Veränderungen war abermals die Erscheinung des Fleckes verbunden, den man nach seiner Lage für einerlei mit dem ehemals beobachteten halten konnte.

Diese Beobachtungen zeigen wohl deutlich, dafs die Streifen nicht feste Gegenstände auf der Oberfläche des Jupiter sind, dafs aber gewisse Gegenden vorzüglich geeignet seyn müssen, ihr Entstehen zu begünstigen. Ob dieser Fleck, den man immer sehr nahe in derselben Entfernung vom Aequator des Planeten beobachtete, und der auch, wenn man die Zeit der Umdrehung auf $9^h\,56'$ setzt, ziemlich gut mit den frühern Erscheinungen zusammenstimmend in Rücksicht der Zeit seiner Sichtbarkeit auf der uns zugekehrten Seite erschien, ein fester Körper auf dem Jupiter sey, bleibt wegen der Unmöglichkeit einer ganz genauen Bestimmung der Rotationszeit und wegen der Veränderlichkeit anderer Flecken immer zweifelhaft.

1 Mém. de Paris pour 1699. mém. p. 103.

2 Mém. de Paris pour 1708. p. 235; 1714. p. 23.

Selbst Schröter's lange fortgesetzte Beobachtungen haben über die veränderliche Bewegung der Flecken keine ganz genügenden Aufschlüsse gegeben; aber merkwürdige Thatsachen bieten sie viele dar. Zwischen dem 12. Nov. 1785 und dem 18. Jan. 1786 sah Schröter gleichsam unter seinen Augen einen neuen Streifen entstehen, von welchem am 12. Nov. nur erst ein kleines, am 14. Nov. ein längeres, mit den übrigen Streifen paralleles Stück sichtbar war, und der sich, während trübes Wetter keine Beobachtung gestattete, am 18. Jan. zu einem über die ganze Halbkugel des Jupiter gehenden Streifen ausgebildet hatte, doch aber sich nicht um die ganze Kugel herum erstreckte. Auch in den übrigen Streifen zeigten sich Veränderungen, die sich über weit ausgedehnte Gegenden erstreckten. Ein den Jupiter nicht ganz umgebender dunkler Streif wurde im November 1785 anhaltend beobachtet, und die Wiederkehr seines, freilich etwas verwaschenen, Endpunctes erfolgte beinahe genau der Cassinischen Rotationsperiode gemäfs; aber am 2. Dec. hatte sich eben der Streif so sehr verlängert, dafs er schon durch die ganze Scheibe des Jupiter sich erstreckte, als er noch lange nicht so weit vorgerückt seyn konnte; er mufste eine Verlängerung von 20000 Meilen erhalten haben, die aber wenige Tage nachher wieder verschwunden war. Auch in den hellen Zonen scheinen abwechselnde Zustände statt zu finden, indem ihr Licht zuweilen minder hell ist, und die Breite der Zonen nicht immer genau dieselbe bleibt. Die graue Farbe der dunkleren Zonen rührt nach Schröter's Beobachtungen davon her, dafs sie mit sehr feinen, dem Aequator des Jupiter parallelen Streifchen bedeckt sind, und mit eben solchen kleinen streifigen Erscheinungen sind auch die Polarzonen des Jupiter bedeckt. Obgleich die Streifen nicht ganz genau immer über einerlei Gegend des Jupiter sich befinden, sondern, wie sich aus dem abwechselnden Breiterwerden und Schmälerwerden schliefsen läfst, nicht ganz strenge in gleichen Abständen vom Aequator des Planeten bleiben, so glaubt doch auch Schröter, dafs gewisse Gegenden vorzugsweise geneigt sind, die Erscheinungen der grauen Streifen darzubieten.

Die seltner erscheinenden Flecken zeigen mannigfaltige Verschiedenheiten. Einige unter ihnen sind dunkel und andere heller, als die übrige Fläche des Jupiter, einige sind sehr veränderlich und von kurzer Dauer, während andere viele Rotationen

durch sich ziemlich gleich bleiben. Beispiele von dunkeln Flecken, die schon am nächsten Tage wieder verschwunden waren, führt Schröter viele an, und unter diesen mehrere, welche sich so schnell durch die scheinbare Scheibe des Jupiter fortbewegten, daſs man aus ihrer Bewegung eine viel schnellere Rotation, als die von Cassini bestimmte, hätte schlieſsen müssen. Einige solche Flecken zeigten sich mit geringer Aenderung der Gestalt und in so übereinstimmender Entfernung vom Aequator des Jupiter nach mehreren Tagen wieder (z. B. am 26. Oct., 31. Oct., 5. Nov.), daſs man Grund hatte, sie für einerlei zu halten, dann aber auch genöthigt war, ihnen eine Umlaufszeit von nur etwa 7 Stunden (bei einem Flecken waren es $6^h\ 57'$, bei einem andern $7^h\ 7'$, u. s. w.) beizulegen. Diese dunkeln Flecke waren also in Rücksicht auf die Bewegung sehr von den, ebenfalls dunkeln, Flecken, welche Cassini beobachtete, verschieden; denn wenn es gleich bei den von Cassini und Maraldi beobachteten Flecken nicht gewiſs ist, ob der damals so genannte *alte* Fleck wirklich immer an einer genau gleichen Stelle wieder erschien, so hat doch Cassini ihn so lange Zeit ununterbrochen erscheinend und regelmäſsig wiederkehrend beobachtet, daſs die Rotationsperiode als $9^h\ 55'$ bis $56'$ betragend mit Sicherheit angenommen werden durfte. Die von Schröter beobachteten, vorhin erwähnten Flecken zeigten aber ihre schnellere Bewegung schon merklich, während man sie die sichtbare Hälfte des Jupiter *einmal* durchlaufen sah.

Diese Beobachtungen können indeſs die eigentliche Rotationszeit des Jupiter nicht ergeben, indem das Ende des den Jupiter nicht ganz umgebenden Streifes und mehrere helle Flecke eine nur wenig von Cassini's Bestimmung abweichende Periode angeben. Die an den Streifen wahrgenommenen Erscheinungen gaben nicht ganz gleiche, aber doch nur wenig unter sich verschiedene Perioden, indem im December 1786 eine Zeit lang die Wiederkehr derselben Erscheinung auf eine Periode von nicht völlig $9^h\ 55'$ paſste, später dagegen diese Periode zu $9^h\ 56',5$ angenommen werden muſste, dann wieder $9^h\ 54',5$, und aus noch spätern Beobachtungen $9^h\ 55',75$; $9^h\ 53',5$; $9^h\ 56'$ gefolgert würde. Nicht viel von diesen Bestimmungen verschieden fallen die aus, welche aus dem öftern Wiedererscheinen eines Lichtflecks hervorgehen, der an der Grenze des hellen Aequatorialstreifs lag. Die Periode dieses hellen Fleckes wurde zuerst

zu $9^h\ 50',5$ bestimmt, während der südliche Streif in eben den Tagen 9^h 55 bis 56′ gab; nachher schien er seine Bewegung zu ändern. Ein anderer heller Fleck in der nördlichern hellen Zone gab die Umdrehungszeit fast genau der Cassinischen Bestimmung gemäfs zu $9^h\ 55'$ bis 56′, doch auch mit kleinen Ungleichheiten.

Aus allen diesen Beobachtungen folgt, dafs atmosphärische Veränderungen an den Erscheinungen dieser Flecken einen bedeutenden Antheil haben mögen. Da das Ende des Streifes sehr bedeutenden Veränderungen unterworfen war, so kann man, auch da, wo diese nicht so in die Augen fallend waren, wohl annehmen, dafs sie dennoch durch eine Aenderung in der Periode der Wiederkehr sich zeigten, und dafs eine Verlängerung von Osten nach Westen statt fand, die nach den Beobachtungen vom 1. Dec. 1786 bis 14. März 1787 über 10000 Meilen, oder in jeder Secunde etwa 32 Fufs betragen mochte, aber bald schneller, bald langsamer fortschritt[1]. Auf ähnliche Weise lassen sich die nur wenig ungleichen Perioden erklären, welche die lichten Flecken ergaben. Nimmt man nämlich an, dafs diese durch eine Aufheiterung der Atmosphäre entstanden, und dafs man da, wo sie erschienen, die feste Oberfläche des Planeten sah, so konnten gar wohl diese Aufheiterungen der Atmosphäre, während sie ziemlich eben die Ausdehnung behielten, nach und nach zu andern Gegenden fortrücken. Nach den Beobachtungen vom 6. bis 13. Jan. mufste dieses Fortrücken 350 bis 400 Fufs in jeder Secunde, oder in 1 Min. etwa 1 Meile betragen. Schröter glaubt diese Bewegungen, die man in den atmosphärischen Erscheinungen bemerkt, einem Winde zuschreiben zu dürfen, der also nach unserer Vorstellung sehr heftig seyn müfste; denn ein Sturm von 350 bis 400 Fufs Geschwindigkeit würde über dreimal so schnell, als die heftigsten Orkane auf der Erde seyn. Man kann aber vielleicht folgende Erklärung, auch nach Analogie irdischer Erscheinungen, eben so gut annehmen. Wir bemerken nicht selten, dafs in sehr kurzer Zeit sich der ganze uns sichtbare Himmel mit Wolken belegt, und dafs also auf einem Raume, dem wir 30 Meilen Durchmesser beilegen können, eine Verdunkelung, in andern Fällen ebenso eine Aufheiterung statt findet. Ob diese Veränderung fortschreitend, zum Beispiel von Westen nach Osten, sich immer weiter verbreitet, wissen

1 Schröter S. 66. 124.

wir nicht, aber wir können es uns wenigstens gar wohl als möglich denken; und wenn sie so statt findet, so würde der erhellte Fleck auf der Erde, bei fortrückender Aufheiterung, mit einer Geschwindigkeit von mehr als 1 Meile in der Minute fortrücken können, obgleich völlige Ruhe auf der Oberfläche der Erde herrschte. So ließsen sich vielleicht auch die noch schnellern eigenen Bewegungen der dunkeln Flecken erklären, denen SCHRÖTER eine ungefähr 3 Stunden kürzere Rotationsperiode zuschreibt, als wir dem Planeten selbst beilegen. Wir haben zwar in der Meteorologie der Erde schwerlich etwas, das wir mit einer so schnell und zugleich ziemlich regelmäſsig fortschreitenden Erscheinung vergleichen könnten; aber denkbar wenigstens ist es, daſs eine über uns entstehende Verdunkelung der Atmosphäre sehr schnell zu östlichern Gegenden überginge, ohne gerade die ganze Luftmasse mit fortzuführen. Der Gipfel der Fluthwelle rückt auf der Oberfläche unserer Meere mit sehr groſser Schnelligkeit fort, ohne daſs der Schiffer einen Strom, der ihn fortrisse, empfindet; wenn also durch irgend eine Einwirkung eine Verdichtung der Atmosphäre in einer Gegend entstände und sich der nächsten mittheilte, während in jener der Himmel sich wieder aufheitert, so könnte uns das den Anschein einer mit Sturmes Eile fortbewegten Masse darstellen. Fälle, wo in einem Nachmittage halb Europa mit Gewitterwolken umhüllt wurde, Fälle, wo die gestern in Frankreich und am Rhein trübe gewordene Luft heute auch im östlichen Deutschland trübe wird, lassen sich nachweisen; es fehlte also nur, daſs diese Niederschläge schneller und um die ganze Erde fortschreitend wären, so hätten wir eine jenen schnell bewegten Flecken ganz ähnliche Erscheinung. Nach SCHRÖTER's Berechnung rückten einige jener dunkeln Flecken, die am öftersten an der Grenze eines hellen und eines dunkeln Streifes beobachtet wurden, 11000 Fuſs in 1 Sec. oder 30 Meilen in 1 Minute fort, und das ist freilich noch weit schneller, als die Entstehung einer Wolkendecke, die sich in denselben Nachmittagsstunden über ganz Europa ausbreitet; indeſs wird auch niemand Gleichheit der Erscheinungen unter ganz verschiedenen Umständen erwarten.

Warum die atmosphärischen Verdichtungen auf dem Jupiter so sehr geneigt sind, sich als Streifen, dem Aequator parallel, niederzuschlagen, davon können wir auch die Ursache nicht angeben. Doch verdient es als Vergleichung berücksichtigt zu

werden, dafs die tropischen Regen in einerlei Parallelkreise der Erde ziemlich gleichzeitig entstehen und also auch dem entfernten Beobachter als dunkle Gürtel um die Erde erscheinen mögen; mit den Nebeln der Polarzonen mag es, wenigstens über der Oberfläche der Meere, ziemlich ebenso seyn.

Dafs Jupiter eine Atmosphäre hat, ist schon aus dem Vorigen gewifs; es erhellet überdiefs aus der minder deutlichen Sichtbarkeit der Streifen und Flecken in der Nähe des Randes, wo die Gesichtslinie länger durch die Atmosphäre fortgeht, und aus der Veränderung der Gestalt der hinter den Jupiter tretenden Monde, wo die Refraction in der Atmosphäre des Planeten sie abgeplattet zeigt[1]. *B.*

Kadmium.

Cadmium; Cadmium; *Cadmium.* Dieses 1818 von Stromeyer und Hermann entdeckte Metall findet sich in vielen Zinkerzen, jedoch nur in kleiner Menge.

Es krystallisirt leicht in Oktaedern, ist weich, jedoch härter als Zinn, läfst sich in dünne Platten ausbreiten und zu Draht ziehen; es zeigt einen hakigen Bruch und nach dem Schmelzen ein specifisches Gewicht von 8,6 bis 8,7, nach dem Hämmern von 8,7 bis 9,0; es schmilzt unter der Rothglühhitze und verdampft etwas über 360°, ohne dabei einen besondern Geruch zu verbreiten.

Die einzige Verbindung des Kadmiums mit Sauerstoff ist das *Kadmiumoxyd* (56 Kadmium auf 8 Sauerstoff). Es ist braungelb oder rothbraun und in der heftigsten Weifsglühhitze weder schmelz- noch verdampfbar. Mit Wasser bildet es ein weifses Hydrat. Seine Verbindungen mit Säuren sind meistens farblos und zeigen brechenerregende Wirkung; Zink fället aus ihnen metallisches Kadmium; Hydrothionsäure fället daraus das Schwefelkadmium. Das salpetersaure, salzsaure und schwefelsaure Kadmiumoxyd schiefst in wasserhellen Säulen an, Krystallwas-

1 Berl. Jahrb. 1817. S. 186. Zur Berechnung der Stellungen des Jupiter dienen die Tables astronomiques publiées par le bureau des long. de France, contenans les Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus, construites d'après la théorie de la mécanique céleste par M. A. Bouvard. Paris 1821.

ser haltend; leicht in Wasser löslich; das Kadmiumoxyd ist in Ammoniak löslich.

Das *Chlorkadmium* (56 Kadmium auf 35,4 Chlor) ist farblos, durchsichtig, stark glänzend, blättrig-krystallisirt, leicht schmelzbar und verdampfbar. — Das *Iodkadmium* (56 Kadmium auf 125 Iod) schiefst in grofsen, wasserhellen, sechsseitigen Tafeln an, schmilzt äufserst leicht und verliert beim Glühen an der Luft Iod. — Das *Schwefelkadmium* (56 Kadmium auf 16 Schwefel), durch Fällen eines Kadmiumsalzes mittelst der Hydrothionsäure erhalten, ist ein pomeranzengelbes, eine vorzügliche Malerfarbe abgebendes Pulver, erst in anfangender Weifsglühhitze schmelzend, ohne zu verdampfen, und beim Erkalten blättrig-krystallisirend. *G.*

Kaleidophon

oder **Phonisches Kaleidoskop** (von καλὸς schön, εἶδος die Gestalt, der Anblick, und φωνέω ich töne) ist eine von Wheatstone erfundene akustische und zugleich optische Spielerei, wozu Th. Young die Veranlassung gab. Dieser rieth nämlich[1], die Schallschwingungen einer grofsen, mit Silberdraht übersponnenen Claviersaite dadurch sichtbar zu machen, dafs man auf irgend einen glänzenden Fleck des Drahtes einen Lichtstrahl durch eine Oeffnung im Fensterladen fallen liefse, und die von dem hell erleuchteten Flecke beschriebenen Curven vermittelst des reflectirten Lichtes in dem verdunkelten Zimmer wahrnähme. Wheatstone kam hiernach auf den zwar nahe liegenden, aber dennoch allerdings glücklichen Gedanken, statt der Saiten elastische Stäbe mit facettirten und polirten, das Licht daher stark reflectirenden, Knöpfchen zu nehmen, woraus dann sein interessanter Apparat hervorging[2]. Dieser besteht aus einem runden, etwa 9 Z. im Durchmesser haltenden Brete, auf Fig.
welchem die lothrechten Stäbe a, b, c in gleichem Abstande vom 191.
Rande und von einander befestigt sind. Der eine a dieser etwa einen Fufs langen Stäbe ist rund, 0,1 Z. dick, und trägt oben ein Knöpfchen, welches am besten aus einer in Messing ge-

1 Phil. Trans. 1800.

2 Quarterly Journal of Science. New Ser. N. II. p. 344. Vergl. Poggendorff Ann. X. 470.

fafsten und aufgeschrobenen, inwendig foliirten, 0,4 Z. Durchmesser haltenden Glasperle besteht, deren eine Oeffnung in der Fassung steckt, die andere aber verschlossen oder geschwärzt wird, um die Regelmäfsigkeit der Lichtreflexion nicht zu stören. Sollen sie farbiges Licht reflectiren, so müssen undurchsichtige Farben auswärts auf der Perle aufgetragen werden. Auf dem zweiten ähnlichen Stabe b befindet sich eine bewegliche Platte, deren Ebene horizontal, schief oder lothrecht gestellt werden kann und auf geschwärzter Fläche verschiedenfarbige, symmetrisch geordnete Knöpfe trägt. Der dritte Stab c ist vierkantig und oben mit einer ähnlichen Platte, als die eben beschriebene, versehen. Hierzu kommt noch ein vierter, in der Mitte rechtwinklig umgebogener d, mit einem ähnlichen Knöpfchen, als auf dem ersten. Aufserdem befindet sich in dem Brete neben dem ersten Stabe noch eine Nufs, mit einer Schraube befestigt, um die Rigidität desselben zu reguliren; alle Stäbchen aber werden vermittelst eines mit Leder überzogenen Hammers und eines Violinbogens in Schwingungen versetzt, vermöge deren die Knöpfchen verschiedene Curven in so kurzer Zeit beschreiben, dafs der Eindruck des reflectirten Lichtes auf das Auge längere Zeit dauert, als ihre Vollendung erfordert, weswegen man dieselben ganz wahrnimmt, wie die Kreise einer umgeschwungenen glühenden Kohle.

Aus dieser blofsen Beschreibung ergiebt sich schon, dafs die Knöpfe auf den Stäbchen je nach Verschiedenheit der Länge und Dicke der letzteren und dem Orte, wo sie geschlagen oder gestrichen werden, also nach der verschiedenen Art der erzeugten Schwingungen sehr mannigfaltige Curven beschreiben müssen. Der einfachste Versuch ist, wenn einer der Stäbe nach seiner ganzen Länge schwingt (wobei also sein Schwingungsknoten im Puncte seiner Befestigung, das Ende des Schwingungsbogens im leuchtenden Knopfe liegt), in welchem Falle das leuchtende Knöpfchen eine Ellipse beschreibt, deren grofse Axe stets abnimmt, während die kleine wächst, bis letztere zur grofsen wird, und auf diese Weise in verschiedenen Wechseln. Ungleich zusammengesetztere Curven werden erhalten, wenn das Licht von mehreren leuchtenden Puncten auf einer horizontalen, noch mehr auf einer schrägen Fläche reflectirt wird, und der Stab nicht blofs nach seiner ganzen Länge, sondern auch nach kürzeren

Abtheilungen schwingt. Weber bemerkt [1], daſs man die Mannigfaltigkeit der Figuren schon dadurch vermehren kann, wenn man verschiedene leuchtende Puncte, zwischen dunkeln Stellen hervorragend, symmetrisch ordnet, wodurch an sich schon Symmetrie gegeben wird, sobald diese durch den schwingenden Stab in Bewegung gesetzt werden. Ein tönender Körper kann zugleich einen Grundton und einen höheren Flageolett-Ton geben. Werden beide gleichzeitig durch die Schwingungen eines Stabes hervorgebracht, so muſs das leuchtende Knöpfchen in sich selbst zurückkehrende cykloidische Curven beschreiben. Wenn es darauf abgesehen ist, die Erscheinungen möglichst brillant zu machen, was doch eigentlich der ganze Apparat bezweckt, so muſs man hauptsächlich darauf sehen, daſs das Auge durch kein anderes Licht, als durch dasjenige afficirt wird, was mit möglichster Intensität, am besten von der hellscheinenden Sonne kommend, durch die blanken Stellen der Knöpfchen reflectirt wird. Der wissenschaftliche Nutzen des Apparates beruhet allein darauf, daſs vermittelst desselben die Schwingungen, welche zur Erzeugung der Töne erforderlich sind, dem Auge sichtbar gemacht werden.

M.

Kaleidoskop.

Caleidoscopium; caleidoscope, multiplicateur, transfigurateur; *caleidoscope* (von καλὸς schön, εἶδος die Gestalt und σκοπέω ich sehe, beobachte). Der Name zeigt ein Instrument an, welches bestimmt ist, etwas Schönes zu betrachten, und ist dem hier zu beschreibenden Instrumente deswegen ertheilt worden, weil sich so mannigfaltige und oft recht schöne, allemal symmetrische Bilder darin darstellen.

Das Kaleidoskop besteht aus zwei ebenen Spiegeln, die, parallelogrammisch geschnitten, unter einem Winkel, der ein Sechstel, oder ein Achtel, oder ein Zehntel u. s. w. von vier Rechten seyn muſs, gegen einander geneigt sind. Diese schmalen und ziemlich langen Spiegel sind unter jenem Winkel an einander befestigt, in eine Röhre eingeschlossen, an deren einem Ende sich ein nur mit einer kleinen Oeffnung, zum Hineinsehen mit *einem* Auge, versehener Boden befindet; am an-

1 Schweigg. Journ. L. 490.

dern Ende ist die Röhre mit zwei Gläsern geschlossen, welche parallel, beide gegen die Axe der Röhre senkrecht sind, und zwischen welchen sich bunte Körper, am besten durchsichtige oder durchscheinende, befinden, welche beim Drehen der Röhre sich in immer neue Stellungen legen. Damit das Auge beim Hindurchsehen nicht durch die aufser der Röhre liegenden Gegenstände gestört werde, mufs das äufsere Glas ein wenig matt geschliffen seyn, das innere ist dagegen vollkommen durchsichtig.

Der im Kaleidoskop befindliche Winkelspiegel, in welchen das Auge durch die Oeffnung hineinsieht, zeigt die zwischen den beiden vordern Gläsern liegenden Gegenstände vervielfacht, und wenn dieser Gegenstände viele mit mannigfaltigen Farben sind, so bilden die vervielfältigten Bilder bunte, sternartig oder vieleckig geordnete Figuren. Wegen der Beweglichkeit jener Gegenstände erhält man es leicht, dafs ihre Lage sich ändert, wodurch ein ganz neues Bild hervorgeht, und dieser beständige Wechsel, der mit fast unendlicher Mannigfaltigkeit neue Erscheinungen gewährt, ist es vorzüglich, wodurch das Auge sich so angenehm angezogen und unterhalten findet.

Fig. 192. Um die Entstehung der vervielfältigten Bilder zu übersehen, stelle A C den einen, B C den andern Spiegel vor, die hier einen Winkel von 60 Graden mit einander machen; β sey ein Gegenstand zwischen beiden Spiegeln, einer der bunten Körper, die sich zwischen den parallelen Gläsern am Ende der Röhre befinden. Bekanntlich sieht man im Spiegel allemal die Gegenstände so, als ob ihr Bild in dem Perpendikel ebenso weit hinter dem Spiegel läge, als der Gegenstand vor demselben liegt, und für einen zweiten Spiegel ist die Abspiegelung dieses Bildes genau so, als ob das Bild selbst ein Gegenstand wäre. Sind also βm, βn auf beide Spiegel senkrecht gezogen und so verlängert, dafs $b'm = \beta m$, $b''n = \beta n$ ist, so sind b', b'' die beiden ersten Bilder des Gegenstandes β. Zieht man von b' auf den zweiten Spiegel b'p senkrecht und nimmt $'b'p = b'p$, so ist 'b' das eine durch zweimalige Reflexion erscheinende Bild, und ebenso giebt b''q senkrecht auf den ersten Spiegel und $''b''q = b''q$ den Ort des andern durch zweimalige Spiegelung entstandenen Bildes ''b''. Zieht man von 'b' die Senkrechte 'b'r auf den ersten Spiegel und nimmt $b'''r = 'b'r$, so ist b''' das durch drei Zurückwerfungen entstandene Bild; aber wenn man ''b''s auf den zweiten Spiegel senkrecht zieht, und $b'''s = ''b''s$ nimmt, so fällt dieses

Bild b''' mit dem vorigen b''' zusammen und die Zahl der Bilder Fig.
ist damit vollendet. Ebenso würde, wenn der Winkel A C B, 193.
welchen die Spiegel mit einander machen, $= 45°$ ist, ein achtfaches Bild gesehen werden; $\alpha a'$ ist nämlich senkrecht auf den ersten Spiegel, $a'\,'a'$ auf den zweiten, $'a'\,'a'_{1}$ auf den ersten, und $'a'_{1}\, a'''$ auf den zweiten; es sind also $'a'$, $'a'_{1}$ und a''' die durch mehrmalige Reflexion entstehenden Bilder des Bildes a', und genau so lassen sich die des Bildes a'' bestimmen.

Wollte man den Kreis in 7 oder 9 gleiche Theile eintheilen und die Neigung der Spiegel $= \frac{360°}{7}$ oder $= 40°$ nehmen, so fallen die Bilder nicht sobald zusammen. Im Allgemeinen nämlich, wenn $ACB = \frac{1}{n} . 360°$ und $\beta CB = a$ ist, hat man für Fig. 192.
das Bild b' den Winkel $BCb' = a$ und für die von diesem Bilde ausgehenden Reflexionen $AC'b' = ACb' = \frac{1}{n} . 360° + a$, $BC'b = \frac{2}{n} . 360° + a$. Bezeichne ich die folgenden mit $''b', '''b', {}^{\text{IV}}b'$, so ist $BC'b' = \frac{2}{n} . 360° + a$, $BC''b' = \frac{2}{n} . 360° + a$,

$$AC''b' = \frac{3}{n} . 360° + a = AC'''b',$$

$$BC'''b' = \frac{4}{n} . 360° + a = BC^{\text{IV}}b'$$ und so ferner; und

wenn ich die vom zweiten Bilde b'' herkommenden Bilder mit $'b'', ''b'', '''b'', {}^{\text{IV}}b''$ bezeichne, so ist $AC\beta = ACb'' = \frac{1}{n} . 360° - a$,

$$BCb'' = \frac{2}{n} . 360° - a = BC'b'',$$

$$AC'b'' = \frac{3}{n} . 360° - a = AC''b'',$$

$$BC''b'' = \frac{4}{n} . 360° - a = BC'''b'',$$ und so weiter.

Ist also $n = 6$, so ist $\frac{3}{6} . 360° + a + \frac{3}{6} . 360° - a = 360°$ und die dritten Wiederholungen beider Bilder fallen zusammen; wäre dagegen $n = 7$, so geschähe dieses erst für $\frac{7}{n} . 360° + a$

und $\frac{7}{n} \cdot 360^{\circ} - a$, und die letzten durch fünf- und sechsmalige Zurückwerfung entstandenen Bilder würden zu matt werden.

Bei dem Kaleidoskop hat man es am besten gefunden, statt belegter Spiegelgläser nur unbelegte, aber hinten schwarz lackirte Gläser (von reinem, wohl geschliffenen Glase) zu nehmen. Jene nämlich zeigen, besonders dann, wenn Auge und Gegenstand dem Glase sehr nahe stehen, doppelte Bilder, welche die Schönheit der vervielfachten Bilder, indem sie jedes als verdoppelt undeutlich machen, vermindern. Sind die Gläser hinten schwarz, so ist es nur die vordere Spiegelfläche, welche Spiegelbilder giebt, und die hintere Fläche des Glases reflectirt keine Strahlen. Die Bilder sind bei dieser Art von Spiegeln allerdings matter, als bei gewöhnlichen Spiegeln, aber die Reinheit jedes Bildes giebt ihnen, wenn man nicht zu viele wiederholte Zurückwerfungen fordert, dennoch den Vorzug.

Etwas von der Einrichtung des Kaleidoskops verschieden ist das *Nürnberger Strahlenkästchen*. Hier bilden nämlich drei Spiegel eine gleichseitige abgekürzte Pyramide; die Spiegelflächen sind gegen das Innere der Pyramide gekehrt, und man bringt vor die kleinere offene Grundfläche ein durchscheinendes, dieser Dreiecksfläche gleiches Bild; vor der Mitte der gröſsern Grundfläche wird eine Oeffnung zum Hineinsehen angebracht. Faſst man nun eine Ecke jenes dreiseitigen Bildes ins Auge, so sieht man sogleich, daſs sich diese und mit ihr das ganze Bild, sechsmal an einander gefügt, darstellt; eben diese Versechsfachung findet an jeder der drei Ecken statt. Aber da jedes dieser an der einen Ecke entstehenden Bilder sich als eine Erweiterung des Hauptbildes an dieses anfügt, so geben die an der zweiten und dritten Ecke entstehenden Bilder an der ersten Ecke neue Bilder, und das ganze Gesichtsfeld ist in sehr breiter Ausdehnung mit diesen Bildern erfüllt. Da das Auge sich in der gröſsern Grundfläche der Pyramide befindet, so treten die Bilder etwas hinter die Ebene der andern Grundfläche zurück. Uebrigens werden hier, wo die aus den Vervielfachungen um einen Eckpunct entstehenden neuen Bilder durch sehr vielmalige Reflexion hervorgebracht werden, diese Bilder matter. In dem Strahlenkästchen, welches ich hier beschrieben habe, eben dem, welches Gilbert erwähnt[1], sind

1 G. LIX. 347.

mehrere dreieckige Bilder, die, durchscheinend und gegen das Licht betrachtet, die beschriebenen Wiederholungen geben; wenn man, wie bei dem Kaleidoskop, bewegliche Körper statt eines solchen Bildes anbrächte, so würden die Erscheinungen noch weit mannigfaltiger seyn.

Das eigentlich sogenannte Kaleidoskop wurde von Brewster zuerst bekannt gemacht und ihm im Jahre 1817 in England ein Patent darauf ertheilt; es wurde bald so allgemein, als angenehmes Spielwerk, nachgemacht, dafs es fast in aller Menschen Händen war. Indefs machte man sehr bald die Bemerkung, dafs die Erfindung nicht ganz neu sey, und führt aufser dem Nürnberger Strahlenkästchen auch Rich. Bradley's ähnliche Anordnung von Spiegeln an [1].

Wie man auch aus vier rechtwinklicht gegen einander gestellten Spiegeln ein ähnliches Instrument bilden könne, ist in den von Gilbert mitgetheilten Abhandlungen angegeben, wo auch über die grofse Verbreitung dieses Instruments und die Vortheile, die es dem mit einem Patente bevorrechteten Erfinder, Brewster, brachte, Nachrichten vorkommen [2]. *B.*

Kalender.

Calendarium; Calendrier; *Calendar.* Unter Kalender versteht man theils die bei irgend einem Volke eingeführte Zeiteintheilung nach bestimmten Jahren, Monaten u.s.w., theils auch das Verzeichnifs der einzelnen Tage, wie sie nach einer solchen Zeiteintheilung einem bestimmten Jahre entsprechen. Im ersten Sinne sagen wir z.B., der Julianische Kalender weicht jetzt um 12 Tage vom Gregorianischen ab, im zweiten Sinne reden wir von dem Kalender für ein bestimmtes Jahr. Der Name stammt von den Calenden (*Calendae*) der Römer her, welches in jedem Monate der Name des ersten Tages war, und von welchem an die Tage des vorigen Monats rückwärts als *dies ante Calendas* gezählt wurden; und der Name *Calendae* kam von dem Ausrufen (*καλῶ*) her, indem einer der Priester zugleich den beobachteten Neumond und die Zahl der bis zu den Nonen noch zu rechnenden Tage verkündigte.

1 New improvements of planting and gardening by R. Bradley. 1710.

2 G. LIX. 365. 369.

dern Ende ist die Röhre mit zwei Gläsern geschlossen, welche parallel, beide gegen die Axe der Röhre senkrecht sind, und zwischen welchen sich bunte Körper, am besten durchsichtige oder durchscheinende, befinden, welche beim Drehen der Röhre sich in immer neue Stellungen legen. Damit das Auge beim Hindurchsehen nicht durch die aufser der Röhre liegenden Gegenstände gestört werde, mufs das äufsere Glas ein wenig matt geschliffen seyn, das innere ist dagegen vollkommen durchsichtig.

Der im Kaleidoskop befindliche Winkelspiegel, in welchen das Auge durch die Oeffnung hineinsieht, zeigt die zwischen den beiden vordern Gläsern liegenden Gegenstände vervielfacht, und wenn dieser Gegenstände viele mit mannigfaltigen Farben sind, so bilden die vervielfältigten Bilder bunte, sternartig oder vieleckig geordnete Figuren. Wegen der Beweglichkeit jener Gegenstände erhält man es leicht, dafs ihre Lage sich ändert, wodurch ein ganz neues Bild hervorgeht, und dieser beständige Wechsel, der mit fast unendlicher Mannigfaltigkeit neue Erscheinungen gewährt, ist es vorzüglich, wodurch das Auge sich so angenehm angezogen und unterhalten findet.

Fig. 192. Um die Entstehung der vervielfältigten Bilder zu übersehen, stelle A C den einen, B C den andern Spiegel vor, die hier einen Winkel von 60 Graden mit einander machen; β sey ein Gegenstand zwischen beiden Spiegeln, einer der bunten Körper, die sich zwischen den parallelen Gläsern am Ende der Röhre befinden. Bekanntlich sieht man im Spiegel allemal die Gegenstände so, als ob ihr Bild in dem Perpendikel ebenso weit hinter dem Spiegel läge, als der Gegenstand vor demselben liegt, und für einen zweiten Spiegel ist die Abspiegelung dieses Bildes genau so, als ob das Bild selbst ein Gegenstand wäre. Sind also βm, βn auf beide Spiegel senkrecht gezogen und so verlängert, dafs $b'm = \beta m$, $b''n = \beta n$ ist, so sind b', b'' die beiden ersten Bilder des Gegenstandes β. Zieht man von b' auf den zweiten Spiegel $b'p$ senkrecht und nimmt $'b'p = b'p$, so ist $'b'$ das eine durch zweimalige Reflexion erscheinende Bild, und ebenso giebt $b''q$ senkrecht auf den ersten Spiegel und $''b''q = b''q$ den Ort des andern durch zweimalige Spiegelung entstandenen Bildes $''b''$. Zieht man von $'b'$ die Senkrechte $'b'r$ auf den ersten Spiegel und nimmt $b'''r = {}'b'r$, so ist b''' das durch drei Zurückwerfungen entstandene Bild; aber wenn man $''b''s$ auf den zweiten Spiegel senkrecht zieht, und $b'''s = {}''b''s$ nimmt, so fällt dieses

Bild b‴ mit dem vorigen b‴ zusammen und die Zahl der Bilder ist damit vollendet. Ebenso würde, wenn der Winkel ACB, welchen die Spiegel mit einander machen, = 45° ist, ein achtfaches Bild gesehen werden; αa′ ist nämlich senkrecht auf den ersten Spiegel, a′ ′a′ auf den zweiten, ′a′ ′a′$_1$ auf den ersten, und ′a′$_1$ a‴ auf den zweiten; es sind also ′a′, ′a′$_1$ und a‴ die durch mehrmalige Reflexion entstehenden Bilder des Bildes a′, und genau so lassen sich die des Bildes a″ bestimmen. Fig. 193.

Wollte man den Kreis in 7 oder 9 gleiche Theile eintheilen und die Neigung der Spiegel $= \frac{360°}{7}$ oder = 40° nehmen, so fallen die Bilder nicht sobald zusammen. Im Allgemeinen nämlich, wenn $ACB = \frac{1}{n}.360°$ und $\beta CB = a$ ist, hat man für Fig. 192. das Bild b′ den Winkel BCb′ = a und für die von diesem Bilde ausgehenden Reflexionen $AC'b' = ACb' = \frac{1}{n}.360° + a$, $BC'b = \frac{2}{n}.360° + a$. Bezeichne ich die folgenden mit ″b′, ‴b′, ^{IV}b′, so ist $BC'b' = \frac{2}{n}.360° + a$, $BC''b' = \frac{2}{n}.360° + a$,

$$AC''b' = \frac{3}{n}.360° + a = AC'''b',$$

$$BC'''b' = \frac{4}{n}.360° + a = BC^{IV}b'$$ und so ferner; und

wenn ich die vom zweiten Bilde b″ herkommenden Bilder mit ′b″, ″b″, ‴b″, ^{IV}b″ bezeichne, so ist $AC\beta = ACb'' = \frac{1}{n}.360° - a$,

$$BCb'' = \frac{2}{n}.360° - a = BC'b'',$$

$$AC'b'' = \frac{3}{n}.360° - a = AC''b'',$$

$$BC''b'' = \frac{4}{n}.360° - a = BC'''b'',$$ und so weiter.

Ist also n = 6, so ist $\frac{3}{6}.360° + a + \frac{3}{6}.360° - a = 360°$ und die dritten Wiederholungen beider Bilder fallen zusammen; wäre dagegen n = 7, so geschähe dieses erst für $\frac{7}{n}.360° + a$

und $\frac{7}{n} \cdot 360^{\circ} - a$, und die letzten durch fünf- und sechsmalige Zurückwerfung entstandenen Bilder würden zu matt werden.

Bei dem Kaleidoskop hat man es am besten gefunden, statt belegter Spiegelgläser nur unbelegte, aber hinten schwarz lackirte Gläser (von reinem, wohl geschliffenen Glase) zu nehmen. Jene nämlich zeigen, besonders dann, wenn Auge und Gegenstand dem Glase sehr nahe stehen, doppelte Bilder, welche die Schönheit der vervielfachten Bilder, indem sie jedes als verdoppelt undeutlich machen, vermindern. Sind die Gläser hinten schwarz, so ist es nur die vordere Spiegelfläche, welche Spiegelbilder giebt, und die hintere Fläche des Glases reflectirt keine Strahlen. Die Bilder sind bei dieser Art von Spiegeln allerdings matter, als bei gewöhnlichen Spiegeln, aber die Reinheit jedes Bildes giebt ihnen, wenn man nicht zu viele wiederholte Zurückwerfungen fordert, dennoch den Vorzug.

Etwas von der Einrichtung des Kaleidoskops verschieden ist das *Nürnberger Strahlenkästchen*. Hier bilden nämlich drei Spiegel eine gleichseitige abgekürzte Pyramide; die Spiegelflächen sind gegen das Innere der Pyramide gekehrt, und man bringt vor die kleinere offene Grundfläche ein durchscheinendes, dieser Dreiecksfläche gleiches Bild; vor der Mitte der gröſsern Grundfläche wird eine Oeffnung zum Hineinsehen angebracht. Faſst man nun eine Ecke jenes dreiseitigen Bildes ins Auge, so sieht man sogleich, daſs sich diese und mit ihr das ganze Bild, sechsmal an einander gefügt, darstellt; eben diese Versechsfachung findet an jeder der drei Ecken statt. Aber da jedes dieser an der einen Ecke entstehenden Bilder sich als eine Erweiterung des Hauptbildes an dieses anfügt, so geben die an der zweiten und dritten Ecke entstehenden Bilder an der ersten Ecke neue Bilder, und das ganze Gesichtsfeld ist in sehr breiter Ausdehnung mit diesen Bildern erfüllt. Da das Auge sich in der gröſsern Grundfläche der Pyramide befindet, so treten die Bilder etwas hinter die Ebene der andern Grundfläche zurück. Uebrigens werden hier, wo die aus den Vervielfachungen um einen Eckpunct entstehenden neuen Bilder durch sehr vielmalige Reflexion hervorgebracht werden, diese Bilder matter. In dem Strahlenkästchen, welches ich hier beschrieben habe, eben dem, welches Gilbert erwähnt[1], sind

1 G. LIX. 347.

mehrere dreieckige Bilder, die, durchscheinend und gegen das Licht betrachtet, die beschriebenen Wiederholungen geben; wenn man, wie bei dem Kaleidoskop, bewegliche Körper statt eines solchen Bildes anbrächte, so würden die Erscheinungen noch weit mannigfaltiger seyn.

Das eigentlich sogenannte Kaleidoskop wurde von Brewster zuerst bekannt gemacht und ihm im Jahre 1817 in England ein Patent darauf ertheilt; es wurde bald so allgemein, als angenehmes Spielwerk, nachgemacht, dafs es fast in aller Menschen Händen war. Indefs machte man sehr bald die Bemerkung, dafs die Erfindung nicht ganz neu sey, und führt aufser dem Nürnberger Strahlenkästchen auch Rich. Bradley's ähnliche Anordnung von Spiegeln an [1].

Wie man auch aus vier rechtwinklicht gegen einander gestellten Spiegeln ein ähnliches Instrument bilden könne, ist in den von Gilbert mitgetheilten Abhandlungen angegeben, wo auch über die grofse Verbreitung dieses Instruments und die Vortheile, die es dem mit einem Patente bevorrechteten Erfinder, Brewster, brachte, Nachrichten vorkommen [2]. *B.*

Kalender.

Calendarium; Calendrier; *Calendar.* Unter Kalender versteht man theils die bei irgend einem Volke eingeführte Zeiteintheilung nach bestimmten Jahren, Monaten u.s.w., theils auch das Verzeichnifs der einzelnen Tage, wie sie nach einer solchen Zeiteintheilung einem bestimmten Jahre entsprechen. Im ersten Sinne sagen wir z.B., der Julianische Kalender weicht jetzt um 12 Tage vom Gregorianischen ab, im zweiten Sinne reden wir von dem Kalender für ein bestimmtes Jahr. Der Name stammt von den Calenden (*Calendae*) der Römer her, welches in jedem Monate der Name des ersten Tages war, und von welchem an die Tage des vorigen Monats rückwärts als *dies ante Calendas* gezählt wurden; und der Name *Calendae* kam von dem Ausrufen (καλῶ) her, indem einer der Priester zugleich den beobachteten Neumond und die Zahl der bis zu den Nonen noch zu rechnenden Tage verkündigte.

1 New improvements of planting and gardening by R. Bradley. 1710.
2 G. LIX. 365. 369.

Der Kalender ordnet die Tage in gewisse Abtheilungen von Wochen, Monaten und Jahren; er umfaſst gewöhnlich ein ganzes Jahr, von dessen verschiedener Anordnung der Art. *Jahr* handelt. Was zuerst unsern Kalender betrifft, so ist die Eintheilung in Wochen von 7 Tagen bekanntlich bei den Hebräern seit den ältesten Zeiten eingeführt gewesen; sie wurde bei den Römern um die Zeit des Anfangs unserer jetzigen Zeitrechnung so bekannt, daſs man anfing, sich häufig nach dieser Eintheilung von 7 Tagen zu richten, obgleich früher die nundinae bei ihnen jedesmal am achten Tage, nach siebentägiger Arbeit, einen Feiertag dargeboten hatten [1]. Die Benennung der Wochentage knüpfte sich an die astrologischen Meinungen von der Herrschaft der einzelnen Planeten über die Stunden, wo nach der Ordnung der sieben Planeten Saturn 1, Jupiter 2, Mars 3, Sonne 4, Venus 5, Mercurius 6, Mond 7, am einen Tage (dies Saturni) der Saturn die erste, achte, funfzehnte und zwei und zwanzigste Stunde beherrschte, also Jupiter die 23ste, Mars die 24ste, die Sonne die erste Stunde des folgenden Tages, der also dies Solis, Sonntag, war. Wenn man so fortrechnet, so erhält man nach der Ordnung dies Lunae, Martis, Mercurii, Jovis, Veneris, Saturni u. s. w.

Unsere Monate haben ihre Länge noch jetzt nach CAESAR's Anordnung beibehalten, welcher die elf Tage, um welche das Sonnenjahr länger ist, als 12 Mondenmonate, so austheilte, daſs er den Monaten Januarius, Sextilis (nachher August genannt) und December, welche sonst 29 Tage hatten, zwei Tage zulegte, wodurch sie 31 Tage erhielten, der März, Mai, Quintilis (nachher Julius genannt) und October hatten schon in dem ältern römischen Kalender 31 Tage, Aprilis, Junius, September, November, die 29 Tage gehabt hatten, erhielten jetzt 30 Tage, der Februar behielt in den Gemeinjahren 28 Tage, um die Festtage nicht zu ändern, die den Verstorbenen gewidmet waren, und Februalia hieſsen [2].

Ueber die Anordnung der Länge unserer Jahre und der Einschaltungen enthält der Artikel *Jahr* alles hieher Gehörige, und es ist daher nur noch übrig, von der Berechnung derjenigen Tage unsers Kalenders, die von astronomischen Bestimmungen abhängen, etwas zu sagen.

1 Ideler II. 136. 177.

2 Adam's röm. Alterth. S. 584.

Was zuerst die Bestimmung betrifft, welcher Tag unsers Kalenders ein Sonntag ist, so hängt dieses vom Sonnencirkel und dem Sonntagsbuchstaben ab. Man bezeichnet nämlich in dem Julianischen und Gregorianischen Kalender [1] die Tage aller Jahre vom 1. Januar an fortlaufend mit A, B, C, D, E, F, G, und fängt dann mit A wieder an [2]; ist nun zum Beispiel in einem Jahre der 3. Januar ein Sonntag, so heifst C in diesem Jahre der Sonntagsbuchstabe, und der 10. Januar, der 7. Februar und alle mit C bezeichneten Tage sind Sonntage. In den Gemeinjahren geht dieses ohne Anstofs fort, aber da in den Schaltjahren der Schalttag, 24. Februar, mit eben dem Buchstaben F bezeichnet wird, den jetzt auch (so als ob der 24ste nicht da wäre) der 25. Februar erhält, so hat nun 26. Febr. G, 27. Febr. A, 28. Febr. B, 29. Febr. C, 1. März ebenso wie in andern Jahren D. War nun aber im Anfange des Jahres C der Sonntagsbuchstabe, also der 21. Febr. ein Sonntag, so ist auch der 28. Febr. ein Sonntag, obgleich er den Buchstaben B hat, und der Sonntagsbuchstabe ist nach dem Schalttage B, wenn er vor dem Schalttage C war. Aus diesem Grunde hat jedes Schaltjahr zwei Sonntagsbuchstaben, von welchen der eine vor, der andere nach dem Schalttage gilt. Kennt man also den Sonntagsbuchstaben, so lehrt ein Blick in den immerwährenden Kalender alle Sonntage des Jahres kennen, und zeigt also zugleich, welchen Wochentag man an jedem Monatstage hat.

Um den Sonntagsbuchstaben zu finden, reicht im Julianischen Kalender eine höchst einfache Rechnung hin. Der Sonnencirkel fängt mit einem Schaltjahre an und hat die Sonntagsbuchstaben G, F; in diesem ersten Jahre des Sonnencirkels ist also der Neujahrstag ein Montag und der letzte December ein Dienstag, der erste Sonntag des nächsten Jahres ist also am 5. Januar, einem mit E bezeichneten Tage, und E ist also der Sonntagsbuchstabe im zweiten Jahre des Sonnencirkels. Da der letzte December den Buchstaben A hat, so ist dieser ein Mittwoch, wie der Neujahrstag, und der erste Sonntag im dritten Jahre des Sonnencirkels ist am 4. Januar, also der Sonntagsbuchstabe D. So entsteht folgendes Täfelchen der Sonntagsbuchstaben im Julianischen Kalender:

1 Vergl. Art. *Jahr.*

2 S. den diesem Art. beigefügten *immerwährenden Kalender.*

1. G. F.	8. E.	15. C.	22. A.
2. E.	9. D. C.	16. B.	23. G.
3. D.	10. B.	17. A. G.	24. F.
4. C.	11. A.	18. F.	25. E. D.
5. B. A.	12. G.	19. E.	26. C.
6. G.	13. F. E.	20. D.	27. B.
7. F.	14. D.	21. C. B.	28. A.

Das Jahr 29 ist wieder das erste des Cyklus. Ein solches erstes Jahr des Sonnencirkels war das Jahr 9 vor unserer Zeitrechnung (nämlich 9 ein Schaltjahr, 8, 7, 6 Gemeinjahre, 5 ein Schaltjahr, 4, 3, 2 Gemeinjahre, 1 ein Schaltjahr, und nun die Jahre unserer Zeitrechnung 1, 2, 3 Gemeinjahre, 4 ein Schaltjahr und so ferner). Daher entsteht die Regel, die im Artikel *Cyklus* angegeben ist, daſs man z. B. für 1829 setzt, $\frac{1829 + 9}{28}$ läſst 18 zum Rest, also ist 1829 das 18te des Sonnencirkels und hat folglich im Julianischen Kalender F zum Sonntagsbuchstaben.

Im Gregorianischen Kalender ist es nicht so einfach. Da, wie im Art. *Jahr* bemerkt worden ist, dieser sich im Jahre 1582 um 10 Tage vom Julianischen entfernte, so waren auch die Sonntage um 10 Monatstage fortgerückt, und also wurden von 1583 bis zum Februar 1700 die Wochentage, die im Julianischen Kalender auf Tage mit A bezeichnet fielen, auf Tage mit D bezeichnet versetzt, und der Sonntagsbuchstabe A in jenem forderte D in diesem, B im Julianischen stimmte mit E im Gregorianischen überein. Da im Jahre 1700 eine Einschaltung im Gregorianischen Kalender ausfiel, so stimmte bis zu 1800 der Sonntagsbuchstabe A im Julianischen mit E im Gregorianischen Kalender überein, und endlich in unserem Jahrhundert stimmt A im Julianischen mit F im Gregorianischen Kalender zusammen. Wir haben daher für unser Jahrhundert folgende Tafel der Gregorianischen Sonntagsbuchstaben für alle Jahre des Sonnencirkels:

1. E. D.	8. C.	15. A.	22. F.
2. C.	9. B. A.	16. G.	23. E.
3. B.	10. G.	17. F. E.	24. D.
4. A.	11. F.	18. D.	25. C. B.
5. G. F.	12. E.	19. C.	26. A.
6. E.	13. D. C.	20. B.	27. G.
7. D.	14. B.	21. A. G.	28. F.

Demnach hat das Jahr 1829 in unserm Gregorianischen Kalender als 18tes Jahr des Sonnencirkels den Sonntagsbuchstaben D,

und es sind der 4. Januar, der 1. Februar, der 1. März, der 5. April u. s. w. Sonntage.

Unter den Festtagen unsers Kalenders giebt es bekanntlich viele, die an bestimmte Monatstage geknüpft sind und daher unbewegliche Feste heifsen; andere sind bewegliche Feste, und diese hängen alle von der veränderlichen Zeit des Osterfestes ab. Da dieses nach dem Mondlaufe bestimmt wird, so entstand schon früh in der christlichen Kirche das Bedürfnifs, nach Regeln, die mit astronomischen Bestimmungen in Verbindung stehen, das Osterfest zu berechnen.

Die Juden feierten ihr Passah am 14. Nisan, das ist, an dem Tage desjenigen Vollmondes, der um die Zeit der Nachtgleiche zunächst nach derselben eintritt; der 1. Nisan ist nämlich der Neumond, welcher der Nachtgleiche zunächst fällt. An diese Osterfeier der Juden knüpften die Christen von jüdischer Abkunft ihr christliches Osterfest, als Erinnerungstag der Auferstehung Christi, und in den frühesten Zeiten des Christenthums behielten sie ganz jenen Tag, 14. Nisan, als den dem Passahmahle bestimmten Tag bei, machten aber meistens den 16. Nisan zum eigentlichen Gedächtnifstage der Auferstehung. Die von Nichtjuden abstammenden Christen gaben dagegen einem Freitage und Sonntage in dieser Jahreszeit, um die Nachtgleiche, die besondere Beziehung auf diese Erinnerung. Eine allgemeine Vereinigung aller Christen zu einer gleichzeitigen Osterfeier wurde schon früher, namentlich von Eusebius, als wünschenswerth dargestellt und auf der Kirchenversammlung zu Nicaea 325, und nachdrücklicher auf der zu Antiochia 341 versucht. Es wurde festgesetzt, dafs dieses Fest am Sonntage und nicht mehr an dem, auf jeden andern Wochentag fallenden, jüdischen Osterfeste gefeiert werden solle.

Die Regel, das Osterfest an dem Sonntage zu feiern, welcher dem Frühlingsvollmonde folgte, war nicht so bestimmt festgesetzt, aber sie war schon früher von vielen Christen befolgt worden, und da die Frühlings-Nachtgleiche um jene Zeit am 21. März fiel und man daran, dafs sie nicht immer so falle, nicht dachte, so setzte man den am 21. März oder zunächst nach dem 21. März fallenden Vollmond als Ostervollmond fest, nach welchem am nächsten Sonntage das Osterfest gefeiert werden sollte; fiel der Ostervollmond oder die Ostergrenze auf einen Sonntag,

so verschob man die Feier bis zum nächsten Sonntage [1]. Diese nach und nach angenommene Regel hat schon früh zu Bemühungen, den Ostervollmond voraus zu bestimmen, geführt [2], und der 19jährige Cyklus, nach welchem die Vollmonde zu demselben Tage des Jahres zurückkehren, scheint [3] von den Alexandrinern schon zu Diocletian's Zeit gegen das Ende des 3. Jahrh. angewandt worden zu seyn. Man befolgte dabei das Verfahren, daſs man von einer einmal bekannten Ostergrenze des einen Jahres 11 Tage zurückging, um die Ostergrenze des zweiten Jahres zu finden, und daſs man dieses Zurückgehen um 11 Tage nur dann in ein Vorwärtsgehen um 19 Tage verwandelte, wenn jenes die Zeit des Vollmonds *vor* dem 21. März angab, wohin die Ostergrenze nicht fallen durfte. Diese Regel blieb richtig bis zum letzten Jahre des 19jährigen Cyklus; um aber dann wieder auf den Anfangstag zurückzukommen, muſste man zwölf Tage zurückgehen, welches man den *saltus lunae* nannte. Wenn man den 5. April zum Anfangstage oder zur Ostergrenze des ersten Jahres macht, so hat man 5. April, 25. März, 13. April, 2. Apr., 22. März, 10. Apr., 30. März, 18. Apr., 7. Apr., 27. März, 15. Apr., 4. Apr., 24. März, 12. Apr., 1. Apr., 20. Apr., 9. Apr., 29. März, 17. Apr. als Ostergrenzen oder Vollmondstage für alle 19 Jahre, und nun sollte nach der Abzugsregel von 11 Tagen der 6. April folgen, aber der vollendete 19jährige Cyklus fordert den 5. April, also eben jenen schon angeführten Sprung. Diese 19jährige Periode enthielt nach der Lage der Schaltjahre 6939 oder 6940 Tage, jede vier Perioden aber enthielten 27759 Tage, welches mit der von Kalippus herrührenden Verbesserung des *Metonschen Cyklus* übereinstimmt. Nach dieser Regel wurde schon früh und ziemlich regelmäſsig das Osterfest in den morgenländischen Kirchen gefeiert, bei den abendländischen Kirchen galten theils andere Berechnungsmethoden, zum Beispiel der *Oster-Kanon* des Victorius, theils wollte die abendländische Kirche die Fälle, wo das Osterfest nach jener Anordnung sehr spät gefeiert werden sollte, nicht gelten lassen, und man sah dann den Märzvollmond für

1 Ideler a. a. O. II. 207.

2 Von den frühesten Bemühungen, die Ostergrenze zu berechnen, s. Ideler II. 215.

3 Nach Ideler II. 232.

die Ostergrenze an, obgleich er *vor* der Nachtgleiche eintrat. Als einen wahrscheinlichen Grund für die Regel der römischen Kirche, das Osterfest nicht später als am 21. April zu feiern, giebt Ideler nach einer sich darauf beziehenden Stelle aus Prosper's Chronikon an, dafs die Circensischen Spiele am 11. ante Calendas Maji, an dem angeblichen Tage der ersten Gründung Roms, noch immer gefeiert wurden, und dafs diese unmöglich in der Charwoche gefeiert werden konnten.

Erst dem Bischof Dionysius Exiguus gelang es, ums Jahr 525, die Anordnung der Osterberechnung nach dem 19jährigen Cyklus allmälig auch in den abendländischen Kirchen einzuführen, so dafs endlich, nachdem bei den Britten Beda um 710 die Einführung derselben Berechnung befördert hatte, die sämmtlichen christlichen Kirchen gegen das Ende des achten Jahrhunderts in diesem Puncte einig waren.

Man glaubte mit dieser Dionysischen Anordnung nun für immer auszureichen, bedachte aber nicht, dafs weder die Julianische Einschaltung, noch die Osterperiode im strengsten Sinne genau sey. Den Fehler, welchen die um $11'\ 10''$ vom wahren Jahre abweichende Länge des Julianischen Jahres hervorbrachte, habe ich im Art. *Jahr* näher betrachtet; aber hier kommt auch der zweite Umstand, dafs der 19jährige Cyklus von 235 synodischen Monaten um 1 St. $28\frac{1}{4}$ Min. zu kurz ist, in Betrachtung. Wegen des ersten Umstandes traten die Nachtgleichen alle 128 Jahre um 1 Tag früher ein, wegen des letzten mufsten die Neumonde alle 310 Jahre um 1 Tag (indem $\frac{88\frac{1}{4} \times 310}{19} = 23^h\, 59'\, 52''$) früher kommen. Jene Regel zur Bestimmung des Osterfestes ward daher immer minder richtig, und nachdem schon früher mehrere Gelehrte hierauf aufmerksam gemacht hatten, suchte der Papst Gregorius XIII. durch seine Kalenderverbesserung auch dieser Unsicherheit abzuhelfen. Hierzu diente diejenige allmälige Abänderung des Epakten-Cyklus, welche Lilius in Vorschlag brachte. Die Epakte sollte jedesmal das Alter des Mondes am Neujahrstage angeben, und man setzt sie daher I, wenn der Neumond am 31. Dec. statt gefunden hat. In diesem Falle kommt nach der Abwechselung der Monate von 30 und 29 Tagen auf den 30. Jan., 28. Febr., 30. März, 28. April u. s. w. ein Neumond und alle diese Tage sind im immerwährenden

Gregorianischen Kalender mit I bezeichnet[1]; im nächsten Jahre ist der Mond am 1. Jan. 12 Tage alt, die Epakte ist XII, und am 19. Jan, 17. Febr. u. s. w. treten Neumonde ein; diese Tage sind mit XII bezeichnet, und alle mit XII bezeichneten Tage geben durchs ganze Jahr die Neumonde des Jahres an, dessen Epakte XII ist. So findet es für alle Epakten statt. Indem nämlich vom 1. Jan., der mit * bezeichnet ist, an, die Zahlen XXIX am 2. Januar, XXVIII am 3. Jan. geschrieben werden und so fortgefahren wird, erhält man zum Beispiel für die Epakte IV den ersten Neumond am 27. Januar und so ferner. Bei diesem Rückwärtszählen hat der 31. Jan. wieder *, der 1. Febr. XXIX, aber da im Mondenwechsel Monate von 30 und 29 Tagen wechseln, so mufs in dieser zweiten Zahlenfolge ein Tag ausfallen, daher setzt man auf den 5. Febr. XXV. XXIV, auf den 6. Febr. XXIII und so ferner. So erhält der 1. März und der 31. März *, der 5. Apr. XXV. XXIV, der 29. April *, der 29. Mai *, der 3. Juni XXV. XXIV, der 27. Jun. und 27. Jul. *, der 1. Aug. XXV. XXIV, der 25. Aug. und 24. Sept. *, der 29. Sept. XXV. XXIV, der 23. Oct. und 22. Nov. *, der 27. Nov. XXV. XXIV, der 21. Dec. *, und mit XX am 31. Dec. schliefst sich das Jahr[2], das ist in demjenigen Jahre, welches am 31. Dec. einen Neumond hat, war die Epakte XX, sie ist also im nächsten Jahre (statt XXXI, wie ihr Wachsen um elf fordern würde) = I, oder der Mond am Neujahrstage 1 Tag alt. Dafs für jene Doppelzahl, die an irgend einem Tage zu setzen war, gerade XXV. XXIV gewählt worden, ist willkürlich. Mit dieser Epakten-Anordnung wäre jedoch nicht viel gewonnen, wenn man sie immerfort nach dem 19jährigen Cyklus gleichmäfsig wechseln liefse; aber die Rücksicht auf die Abweichung des wahren Mondlaufes von dem 19-jährigen Cyklus macht, so wie die Veränderung der Einschaltung an den Secularjahren, das eigentliche Verdienst der von Lilius angegebenen und von Gregorius XIII. angenommenen Verbesserung aus. In dem früher geltenden Mondcirkel traf für das erste Jahr des Cyklus ein Neumond auf den 23. Jan., also für das zweite auf den 12. Jan., für das dritte auf den 1. Jan. und so ferner. Da durch die Weglassung von 10 Tagen im Jahre

1 S. den immerwähr. Kal. am Schlusse dieses Art.

2 Der diesem Art. angehängte immerwährende Gregorianische Kalender zeigt dieses noch besser.

1582 der Neumond des ersten Jahres vom 23. Jan. auf den 2. Febr. überging (oder mit andern Worten der Julianische 23. Januar mit dem Gregorianischen 2. Febr. einerlei war), so fiel im ersten Jahre des Cyklus auf den 2. Febr. der zweite, auf den 3. Jan. der erste nach dem Cyklus berechnete Neumond; aber der Cyklus hatte sich um etwa 3 Tage vom wahren Mondlaufe entfernt, und Lilius nahm daher den vorhergehenden 31. Dec. als Neumondstag an, so daſs mit dem ersten Jahre des Cyklus oder mit der *güldenen Zahl* 1 die Epakte I im Gregorianischen Kalender zusammentraf. Die Epakte nimmt dann mit jedem Jahre um XI zu, und macht nur vom 19ten Jahre bis zum ersten des neuen Cyklus den schon erwähnten Sprung, nämlich von XIX auf I.

Diese Anordnung konnte nur so lange bestehen, als die Schaltjahre alle 4 Jahre ordentlich wiederkehrten, und bedurfte einer Aenderung, wenn am Ende des Jahrhunderts ein Schalttag ausfiel. Diese Aenderung nannte man die *Sonnengleichung*. Aber noch eine zweite Aenderung war nöthig, weil in 310 Jahren oder, wie Lilius rechnet, in 312½ Jahren der Mondcyklus um 1 Tag vom wahren Mondlaufe abwich, und dieses wurde die *Mondgleichung* genannt. Wegen der Sonnengleichung nimmt die Abweichung des Gregorianischen Kalenders vom Julianischen am Ende derjenigen Jahrhunderte, die sich mit einem Gemeinjahre endigen, um einen Tag zu, und die Epakten vermindern sich um 1. Es ist nämlich offenbar, daſs bei regelmäſsiger Einschaltung, nach dem Julianischen Kalender, der erste Januar im ersten Jahre des Cyklus I als Mondesalter bekommen hätte, aber wegen des weggelassenen einen Tages bei dem Uebergange in ein neues Jahrhundert der Mond am 1. Januar erst 0 Tage alt ist. Dieser Fall trat mit dem Jahre 1700 ein, und statt daſs die Epakten I, XII, XXIII u. s. w. für die Anfangsjahre des Cirkels gehörten, so gingen sie nun in *, XI, XXII, III und so weiter über. Mit dem Jahre 1800 sollte eine gleiche Aenderung in Beziehung auf die Einschaltung eintreten, aber da alle 300 Jahre der Neumond einen Tag zurück rücket, so hat man für 1800 zum ersten Male diesen der Mondgleichung entsprechenden Tag in Rechnung gebracht und so jene Aenderung aufgehoben. Bis zum Jahre 1900 gilt daher die Epaktentabelle, wo der güldenen Zahl 1. * entspricht,

mit 2. XI, 3. XXII, 4. III,
5. XIV, 6. XXV, 7. VI,

mit 8. XVII, 9. XXVIII, 10. IX,
11. XX, 12. I, 13. XII,
14. XXIII, 15. IV, 16. XV,
17. XXVI, 18. VII, 19. XVIII

zusammengehören. Im Jahre 1900 rückt, wegen der Einschaltung oder Sonnengleichung, der Gregorianische Kalender um 1 Tag zurück und der güldenen Zahl 1 entspricht die Epakte XXIX. So bleibt es bis 2200, weil 2000 ein Schaltjahr ist und also keine Sonnengleichung statt findet, 2100 dagegen wegen der seit 1800 verlaufenen drei Jahrhunderte eine Mondgleichung fordert, welche die Sonnengleichung aufhebt. Nach 2200 kommt zur güldenen Zahl 1 die Epakte XXVIII, nach 2300 zur güldenen Zahl 1 die Epakte XXVII; aber im Jahre 2400, wo die Einschaltung so wie im Julianischen Kalender statt findet, dagegen die 300jährige Periode der Mondgleichung um ist, erhält das erste Jahr des Mondcirkels wieder die Epakte XXVIII, die mit dem Jahre 2500 in XXVII übergeht. Ebenso ist für die fernere Zukunft zu rechnen, wobei nur das zu bemerken ist, dafs die Mondgleichung, da sie eigentlich nach 310 Jahren, oder, wie Lilius annahm, nach $312\frac{1}{2}$ Jahren erst eintreten sollte, nicht unbedingt am Ende jedes dritten Jahrhunderts berechnet werden mufs, sondern nach sieben solchen Perioden einmal um ein Jahrhundert hinausgerückt wird; sie wird also zwar in den Jahren 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900 in Rechnung gebracht, dann aber erst 4300, 4600 und so ferner. Diese Mondgleichung ist zwar auf eine Länge des synodischen Monats berechnet, die nicht genau richtig ist, aber der Unterschied ist auf lange Zeiten hinaus von keiner Erheblichkeit.

Das Osterfest läfst sich mit Hülfe dieser Bestimmungen für alle Zeiten finden. Die güldene Zahl erhält man nämlich, indem man die Jahrszahl zu 1 addirt und die Summe mit 19 dividirt, der Rest ist die güldene Zahl; z. B. für 1829 ist, da $\frac{1830}{19}$ zum Reste 6 läfst, der Mondcirkel = 6. Damit gehört in unserm Jahrhundert die Epakte XXV zusammen, und diese Zahl steht in dem vorhin beschriebenen immerwährenden Gregorianischen Kalender neben dem 6. Januar, neben dem 5. Februar, neben dem 6. März und 5. April; diese Tage sind die Neumondstage, und wenn man 13 zulegt, so hat man für 19. März und 18. April des Mondes Alter, welches man sonst Luna XIV benannte, und

diese Tage geben die Ostergrenze. Da der 19. März vor der Nachtgleiche fällt, so ist nicht dieser Vollmond, sondern der folgende am 18. April der Ostervollmond. Da nun der Sonntagsbuchstabe 1829 D ist, so haben wir am 19. April einen Sonntag und dieses ist der Ostersonntag[1].

Im Julianischen Kalender ist im 6. Jahre des Mondcirkels der Neumond am 28. Januar, 26. Februar, 28. März, also der Ostervollmond am 10. April, und da F der Sonntagsbuchstabe ist, also der 14. April ein Sonntag, so ist dieses der Ostertag des Julianischen Kalenders. Dabei ist zu bemerken, dafs ihr 10. April unser 22. April ist, ihr Cyklus also den Vollmond irrig angiebt, aber dennoch findet die Festrechnung so statt.

Unter den Mängeln, die bei der Gregorianischen Einschaltung und Festrechnung übrig bleiben, mufs ich hier noch zwei bemerken: 1. dafs die Nachtgleiche nicht genau am 21. März bleibt, sondern wegen der am Ende der Jahrhunderte auf einmal eintretenden Ausgleichung um diese Zeit am meisten abweicht; 2. dafs die von Lilius angenommenen Neumonde zur Zeit der Kalenderverbesserung selbst nicht genau sind. Er nahm nämlich die Abweichung des Cyklus bis zu seiner Zeit um etwas zu geringe an und hätte statt 3 Tagen 4 Tage ansetzen sollen. — Das Erstere ist nicht anders möglich, da die Einschaltung nach ganzen Tagen geschehen mufs und auch die Ausgleichung am Ende der Jahrhunderte am bequemsten geschieht. Das zweite entschuldigt Clavius dadurch, dafs so der 14. Tag des Mondalters, wie die Kirche es annimmt, nie vor dem wahren Vollmond falle; eine Entschuldigung, die nicht ganz genügt.

Zur Geschichte des Kalenders gehört nun noch Folgendes. Der Gregorianische Kalender wurde in dem gröfsten Theile Italiens, in Spanien und Portugal der Anordnung des Papstes gemäfs sogleich eingeführt. In Frankreich wurden erst im December die zehn Tage ausgelassen, welche dort schon zwei Monate früher weggefallen waren. Auch die katholischen Cantons der Schweiz traten 1583, Polen 1586, Ungarn 1587 der Verbesserung bei. In Deutschland thaten es nur die katholischen Stände,

1 Andere Regeln der Berechnung von Gauss und Ciccolini s. in v. Zach Monatl. Corr. II. 121. und Corresp. astr. VI. 514. XIV. 248. 546. X. 417. Ueber einzelne hierher gehörige Fragen s. Corresp. astr. XI. 597. XIII. 21. X. 549. und Astron. Jahrb. 1818. 277.

Gregorianischen Kalender mit I bezeichnet[1]; im nächsten Jahre ist der Mond am 1. Jan. 12 Tage alt, die Epakte ist XII, und am 19. Jan, 17. Febr. u. s. w. treten Neumonde ein; diese Tage sind mit XII bezeichnet, und alle mit XII bezeichneten Tage geben durchs ganze Jahr die Neumonde des Jahres an, dessen Epakte XII ist. So findet es für alle Epakten statt. Indem nämlich vom 1. Jan., der mit * bezeichnet ist, an, die Zahlen XXIX am 2. Januar, XXVIII am 3. Jan. geschrieben werden und so fortgefahren wird, erhält man zum Beispiel für die Epakte IV den ersten Neumond am 27. Januar und so ferner. Bei diesem Rückwärtszählen hat der 31. Jan. wieder *, der 1. Febr. XXIX, aber da im Mondenwechsel Monate von 30 und 29 Tagen wechseln, so mufs in dieser zweiten Zahlenfolge ein Tag ausfallen, daher setzt man auf den 5. Febr. XXV. XXIV, auf den 6. Febr. XXIII und so ferner. So erhält der 1. März und der 31. März *, der 5. Apr. XXV. XXIV, der 29. April *, der 29. Mai *, der 3. Juni XXV. XXIV, der 27. Jun. und 27. Jul. *, der 1. Aug. XXV. XXIV, der 25. Aug. und 24. Sept. *, der 29. Sept. XXV. XXIV, der 23. Oct. und 22. Nov. *, der 27. Nov. XXV. XXIV, der 21. Dec. *, und mit XX am 31. Dec. schliefst sich das Jahr[2], das ist in demjenigen Jahre, welches am 31. Dec. einen Neumond hat, war die Epakte XX, sie ist also im nächsten Jahre (statt XXXI, wie ihr Wachsen um elf fordern würde) = I, oder der Mond am Neujahrstage 1 Tag alt. Dafs für jene Doppelzahl, die an irgend einem Tage zu setzen war, gerade XXV. XXIV gewählt worden, ist willkürlich. Mit dieser Epakten-Anordnung wäre jedoch nicht viel gewonnen, wenn man sie immerfort nach dem 19jährigen Cyklus gleichmäfsig wechseln liefse; aber die Rücksicht auf die Abweichung des wahren Mondlaufes von dem 19jährigen Cyklus macht, so wie die Veränderung der Einschaltung an den Secularjahren, das eigentliche Verdienst der von Lilius angegebenen und von Gregorius XIII. angenommenen Verbesserung aus. In dem früher geltenden Mondcirkel traf für das erste Jahr des Cyklus ein Neumond auf den 23. Jan., also für das zweite auf den 12. Jan., für das dritte auf den 1. Jan. und so ferner. Da durch die Weglassung von 10 Tagen im Jahre

1 S. den immerwähr. Kal. am Schlusse dieses Art.

2 Der diesem Art. angehängte immerwährende Gregorianische Kalender zeigt dieses noch besser.

1582 der Neumond des ersten Jahres vom 23. Jan. auf den 2. Febr. überging (oder mit andern Worten der Julianische 23. Januar mit dem Gregorianischen 2. Febr. einerlei war), so fiel im ersten Jahre des Cyklus auf den 2. Febr. der zweite, auf den 3. Jan. der erste nach dem Cyklus berechnete Neumond; aber der Cyklus hatte sich um etwa 3 Tage vom wahren Mondlaufe entfernt, und Lilius nahm daher den vorhergehenden 31. Dec. als Neumondstag an, so daſs mit dem ersten Jahre des Cyklus oder mit der *güldenen Zahl* 1 die Epakte I im Gregorianischen Kalender zusammentraf. Die Epakte nimmt dann mit jedem Jahre um XI zu, und macht nur vom 19ten Jahre bis zum ersten des neuen Cyklus den schon erwähnten Sprung, nämlich von XIX auf I.

Diese Anordnung konnte nur so lange bestehen, als die Schaltjahre alle 4 Jahre ordentlich wiederkehrten, und bedurfte einer Aenderung, wenn am Ende des Jahrhunderts ein Schalttag ausfiel. Diese Aenderung nannte man die *Sonnengleichung*. Aber noch eine zweite Aenderung war nöthig, weil in 310 Jahren oder, wie Lilius rechnet, in 312½ Jahren der Mondcyklus um 1 Tag vom wahren Mondlaufe abwich, und dieses wurde die *Mondgleichung* genannt. Wegen der Sonnengleichung nimmt die Abweichung des Gregorianischen Kalenders vom Julianischen am Ende derjenigen Jahrhunderte, die sich mit einem Gemeinjahre endigen, um einen Tag zu, und die Epakten vermindern sich um 1. Es ist nämlich offenbar, daſs bei regelmäſsiger Einschaltung, nach dem Julianischen Kalender, der erste Januar im ersten Jahre des Cyklus I als Mondesalter bekommen hätte, aber wegen des weggelassenen einen Tages bei dem Uebergange in ein neues Jahrhundert der Mond am 1. Januar erst 0 Tage alt ist. Dieser Fall trat mit dem Jahre 1700 ein, und statt daſs die Epakten I, XII, XXIII u. s. w. für die Anfangsjahre des Cirkels gehörten, so gingen sie nun in *, XI, XXII, III und so weiter über. Mit dem Jahre 1800 sollte eine gleiche Aenderung in Beziehung auf die Einschaltung eintreten, aber da alle 300 Jahre der Neumond einen Tag zurück rücket, so hat man für 1800 zum ersten Male diesen der Mondgleichung entsprechenden Tag in Rechnung gebracht und so jene Aenderung aufgehoben. Bis zum Jahre 1900 gilt daher die Epaktentabelle, wo der güldenen Zahl 1. * entspricht,

mit 2. XI, 3. XXII, 4. III,
5. XIV, 6. XXV, 7. VI,

mit	8. XVII,	9. XXVIII,	10. IX,
	11. XX,	12. I,	13. XII,
	14. XXIII,	15. IV,	16. XV,
	17. XXVI,	18. VII,	19. XVIII

zusammengehören. Im Jahre 1900 rückt, wegen der Einschaltung oder Sonnengleichung, der Gregorianische Kalender um 1 Tag zurück und der güldenen Zahl 1 entspricht die Epakte XXIX. So bleibt es bis 2200, weil 2000 ein Schaltjahr ist und also keine Sonnengleichung statt findet, 2100 dagegen wegen der seit 1800 verlaufenen drei Jahrhunderte eine Mondgleichung fordert, welche die Sonnengleichung aufhebt. Nach 2200 kommt zur güldenen Zahl 1 die Epakte XXVIII, nach 2300 zur güldenen Zahl 1 die Epakte XXVII; aber im Jahre 2400, wo die Einschaltung so wie im Julianischen Kalender statt findet, dagegen die 300jährige Periode der Mondgleichung um ist, erhält das erste Jahr des Mondcirkels wieder die Epakte XXVIII, die mit dem Jahre 2500 in XXVII übergeht. Ebenso ist für die fernere Zukunft zu rechnen, wobei nur das zu bemerken ist, dafs die Mondgleichung, da sie eigentlich nach 310 Jahren, oder, wie Lilius annahm, nach 312½ Jahren erst eintreten sollte, nicht unbedingt am Ende jedes dritten Jahrhunderts berechnet werden mufs, sondern nach sieben solchen Perioden einmal um ein Jahrhundert hinausgerückt wird; sie wird also zwar in den Jahren 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 3300, 3600, 3900 in Rechnung gebracht, dann aber erst 4300, 4600 und so ferner. Diese Mondgleichung ist zwar auf eine Länge des synodischen Monats berechnet, die nicht genau richtig ist, aber der Unterschied ist auf lange Zeiten hinaus von keiner Erheblichkeit.

Das Osterfest läfst sich mit Hülfe dieser Bestimmungen für alle Zeiten finden. Die güldene Zahl erhält man nämlich, indem man die Jahrszahl zu 1 addirt und die Summe mit 19 dividirt, der Rest ist die güldene Zahl; z. B. für 1829 ist, da $\frac{1830}{19}$ zum Reste 6 läfst, der Mondcirkel = 6. Damit gehört in unserm Jahrhundert die Epakte XXV zusammen, und diese Zahl steht in dem vorhin beschriebenen immerwährenden Gregorianischen Kalender neben dem 6. Januar, neben dem 5. Februar, neben dem 6. März und 5. April; diese Tage sind die Neumondstage, und wenn man 13 zulegt, so hat man für 19. März und 18. April des Mondes Alter, welches man sonst Luna XIV benannte, und

diese Tage geben die Ostergrenze. Da der 19. März vor der Nachtgleiche fällt, so ist nicht dieser Vollmond, sondern der folgende am 18. April der Ostervollmond. Da nun der Sonntagsbuchstabe 1829 D ist, so haben wir am 19. April einen Sonntag und dieses ist der Ostersonntag[1].

Im Julianischen Kalender ist im 6. Jahre des Mondcirkels der Neumond am 28. Januar, 26. Februar, 28. März, also der Ostervollmond am 10. April, und da F der Sonntagsbuchstabe ist, also der 14. April ein Sonntag, so ist dieses der Ostertag des Julianischen Kalenders. Dabei ist zu bemerken, daſs ihr 10. April unser 22. April ist, ihr Cyklus also den Vollmond irrig angiebt, aber dennoch findet die Festrechnung so statt.

Unter den Mängeln, die bei der Gregorianischen Einschaltung und Festrechnung übrig bleiben, muſs ich hier noch zwei bemerken: 1. daſs die Nachtgleiche nicht genau am 21. März bleibt, sondern wegen der am Ende der Jahrhunderte auf einmal eintretenden Ausgleichung um diese Zeit am meisten abweicht; 2. daſs die von Lilius angenommenen Neumonde zur Zeit der Kalenderverbesserung selbst nicht genau sind. Er nahm nämlich die Abweichung des Cyklus bis zu seiner Zeit um etwas zu geringe an und hätte statt 3 Tagen 4 Tage ansetzen sollen. — Das Erstere ist nicht anders möglich, da die Einschaltung nach ganzen Tagen geschehen muſs und auch die Ausgleichung am Ende der Jahrhunderte am bequemsten geschieht. Das zweite entschuldigt Clavius dadurch, daſs so der 14. Tag des Mondalters, wie die Kirche es annimmt, nie vor dem wahren Vollmond falle; eine Entschuldigung, die nicht ganz genügt.

Zur Geschichte des Kalenders gehört nun noch Folgendes. Der Gregorianische Kalender wurde in dem gröſsten Theile Italiens, in Spanien und Portugal der Anordnung des Papstes gemäſs sogleich eingeführt. In Frankreich wurden erst im December die zehn Tage ausgelassen, welche dort schon zwei Monate früher weggefallen waren. Auch die katholischen Cantons der Schweiz traten 1583, Polen 1586, Ungarn 1587 der Verbesserung bei. In Deutschland thaten es nur die katholischen Stände,

1 Andere Regeln der Berechnung von Gauss und Ciccolini s. in v. Zach Monatl. Corr. II. 121. und Corresp. astr. VI. 514. XIV. 248. 546. X. 417. Ueber einzelne hierher gehörige Fragen s. Corresp. astr. XI. 597. XIII. 21. X. 549. und Astron. Jahrb. 1818. 277.

die protestantischen hingegen blieben dem jetzt so genannten alten Style treu. Die Weigerung, den Gregorianischen Kalender anzunehmen, setzten die protestantischen Stände Deutschlands bis zum Jahre 1699 fort, und da erst entschlossen sie sich, unter dem Namen des verbesserten Kalenders einen neuen Kalender einzuführen. Es wurden dem zu Folge im Jahre 1700 im Februar elf Tage ausgelassen, so dafs nach dem 18. Februar sogleich der 1. März folgte. Weil man aber in Rücksicht des Osterfestes Einiges an der Gregorianischen Anordnung zu tadeln fand, so setzte man fest, dafs der Vollmond nach den Rudolphinischen Tafeln astronomisch und zwar auf den Uraniburger Meridian berechnet werden sollte, damit so das Osterfest seine genau richtige Bestimmung erhalte. Diesem Beschlusse traten die Vereinigten Niederlande und Dänemark sogleich, die protestantischen Cantons der Schweiz ein Jahr später bei. In England dagegen wurde erst im Jahre 1752 der alte Kalender abgeschafft, und durch ein Auslassen von elf Tagen im September, wo nach dem 2. Sept. sogleich der 14. Sept. folgte, die Ausgleichung zu Stande gebracht. In Schweden geschah dieses 1753 im Februar. In Rufsland und bei der Griechischen Kirche besteht noch ein im Wesentlichen mit dem Julianischen übereinstimmender Kalender[1], und man unterscheidet daher dort alten und neuen Styl.

Jener verbesserte Kalender stimmte in den meisten Fällen mit dem Gregorianischen auch in Hinsicht des Osterfestes überein, aber da die cyklische Rechnung nicht allemal mit der astronomischen zusammenstimmen kann, so kamen Fälle vor, wo die eine Rechnung den Sonnabend, die andere den Sonntag zur Ostergrenze machte, und wo der letzteren zufolge dann das Fest erst acht Tage später gefeiert wurde. Da 1778 ein solcher Fall wieder bevorstand, so bewirkte Friedrich II., dafs die evangelischen Stände der cyklischen Rechnung beitraten, und unter dem Namen des allgemeinen Reichskalenders wurde nun ein gleichförmiger Kalender im ganzen deutschen Reiche eingeführt, dem auch die übrigen evangelischen Staaten beigetreten sind[2].

1 Ueber einige Eigenthümlichkeiten des Russ. Kal. s. Littrow's Kalendariographie.

2 Im Art. *Epakte* Bd. III. S. 795. Z. 12. ist in Beziehung hierauf ein Fehler, welchen man hiernach leicht verbessern kann.

Ich kann diesen Artikel nicht schliefsen, ohne noch einige Worte über die Epoche unserer Zeitrechnung zu sagen. Es ist bekannt genug, dafs erst Dionysius Exiguus diese Zeitrechnung einführte, und dafs er in einem viel zu späten Zeitalter lebte, um als eine sichere Autorität für die Richtigkeit des von ihm angenommenen Geburtsjahres Christi zu gelten. Dionysius scheint, da man allgemein den 25. Dec. als den Tag der Geburt Christi anzusehen pflegte, diesen Tag im ersten Jahre unserer Zeitrechnung oder im 754sten der Stadt Rom dafür angenommen zu haben. Die Angaben früherer Kirchenväter haben schon lange Veranlassung gegeben, das Jahr der Geburt Christi als drei Jahre früher fallend anzusehen, aber Ideler zeigt, dafs man es noch früher und zwar mit grofser Wahrscheinlichkeit auf das Jahr 747 der Stadt Rom setzen mufs. Der Grund hierfür liegt vorzüglich in der Zeitbestimmung, die wir für den Tod des Herodes besitzen, in dessen letzter Krankheit, nach Josephus Erzählung, eine Mondfinsternifs bei einem kurz vor dem Passah eintretenden Vollmonde statt fand. Eine solche hat sich aber nach Ideler's Berechnung im Jahre Roms 750 in der Nacht vom 12. zum 13. März ereignet, und *vor* diesem Zeitpuncte ist also die Geburt Christi anzusetzen, aber sehr wahrscheinlich auch über zwei Jahre früher, da Herodes alle zweijährigen Kinder tödten liefs. Dieses würde ungefähr schon auf das Jahr 747 führen, zumal wenn man den alten Traditionen gemäfs die Geburt Christi an das Ende des Jahres setzt. Hiermit vereinigt sich nun eine Stelle des Tertullian, welcher den Sentius Saturninus als denjenigen eigentlichen Präses von Syrien nennt, unter welchem die Schatzung statt fand, deren der Evangelist Lucas gedenkt; dieser Sentius Saturninus war aber nur bis zum Sommer 748 im Besitze dieser Stelle. Nach diesen Gründen hält Ideler mit grofser Wahrscheinlichkeit 747 der Stadt für das wahre Geburtsjahr Christi[1]. Hiermit verbindet sich auf eine in der That überraschende Weise ein astronomisches Ereignifs. Schon Kepler hat darauf aufmerksam gemacht, dafs die Erscheinung am Himmel, welche die Magier nach Jerusalem führte, wohl die Conjunction des Jupiter und Saturn gewesen seyn mö-

1 Hiermit sind auch die historischen Untersuchungen zu vergleichen, die Münter anstellt in seiner Schrift: Der Stern der Weisen, Copenhagen 1827. S. 96.

ge, die um diese Zeit statt fand. Münter hat diesen Gedanken mit neuen Gründen unterstützt, indem er aus einem rabbinischen Schriftsteller späterer Zeit zeigt, dafs man dieser Conjunction eine wichtige Bedeutung beilegte, besonders wenn sie sich im Sternbilde der Fische ereignete, und dafs man die Ankunft des Messias damit in Verbindung setzte. Eine solche Conjunction des Jupiter und Saturn im Sternbilde der Fische hat nun allerdings im Jahre 747 nach Erbauung der Stadt Rom statt gefunden. Nach Ideler's genauer Berechnung[1] waren beide Planeten am 20. Mai dieses Jahres zum ersten Male in Conjunction und nur 1 Grad von einander entfernt; bei ihrem Rückgange fand am 27. Oct. eine zweite Conjunction statt und am 12. Nov. eine dritte im 15. Grade der Fische, bei welcher abermals die beiden Planeten nur 1 Grad von einander abstanden. Die Planeten zeigten sich also mehrere Monate durch einander so nahe, dafs die Conjunction den auf diese Aspecten achtenden Astronomen allerdings als merkwürdig erscheinen mufste.

Von der Einrichtung des Kalenders anderer Völker zu reden scheint mir hier nicht der Ort, zumal da das, was die Anordnung der Jahre, der Schaltjahre u. s. w. betrifft, schon oben vorgekommen ist. Wer sich über den Kalender der Russen, Juden und Türken belehren will, findet alles Erforderliche in Littrow's Kalendariographie. Wien 1828[2].

Als das wichtigste diesen Gegenstand betreffende Buch habe ich schon oft genannt: Ideler's Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, aus den Quellen bearbeitet. 2 Thle. Berlin 1825—26.

Von ältern Schriften nenne ich nur einige der wichtigsten:

Censorinus de die natali, ein Buch, das, im Jahre 238 unserer Zeitrechnung geschrieben, in den ersten Capiteln ziemlich unbedeutende Gegenstände enthält, welche sich auf den Geburtstag im Allgemeinen beziehen, in dessen zweiter Hälfte aber die wichtigsten Nachrichten über die ältern Zeiteintheilungen und chronologischen Bestimmungen zu finden sind.

Gemin. isagoge in Arati phaenomena.

1 Ideler II. 406.

2 Ueber die Berechnung des jüdischen Osterfestes nach Gaufs's Anleitung s. v. Zach Mon. Corr. II. 121. und dessen Corresp. astronomique I. 556. II. 458.

Dionysii epistola ad Petronium.
Dionysii epistola ad Bonifacium.
Beda de temporum ratione.
Clavii explicatio romani calendarii a Gregorio XIII. restituti, Clementis VIII. jussu edita.

Immerwährender Julianischer Kalender.

Januar.

1. A. III.	11. D. XIII.	21. G.
2. B.	12. E. II.	22. A. XII.
3. C. XI.	13. F.	23. B. I.
4. D.	14. G. X.	24. C.
5. E. XIX.	15. A.	25. D. IX.
6. F. VIII.	16. B. XVIII.	26. E.
7. G.	17. C. VII.	27. F. XVII.
8. A. XVI.	18. D.	28. G. VI.
9. B. V.	19. E. XV.	29. A.
10. C.	20. F. IV.	30. B. XIV.
		31. C. III.

Februar.

1. D.	11. G.	21. C. I.
2. E. XI.	12. A. X.	22. D.
3. F. XIX.	13. B.	23. E. IX.
4. G. VIII.	14. C. XVIII.	24. F.
5. A.	15. D. VII.	25. G. XVII.
6. B. XVI.	16. E.	26. A. VI.
7. C. V.	17. F. XV.	27. B.
8. D.	18. G. IV.	28. C. XIV.
9. E. XIII.	19. A.	
10. F. II.	20. B. XII.	

März.

1. D. III.	11. G. XIII.	21. C.
2. E.	12. A. II.	22. D. XII.
3. F. XI.	13. B.	23. E. I.
4. G.	14. C. X.	24. F.
5. A. XIX.	15. D.	25. G. IX.
6. B. VIII.	16. E. XVIII.	26. A.
7. C.	17. F. VII.	27. B. XVII.
8. D. XVI.	18. G.	28. C. VI.
9. E. V.	19. A. XV.	29. D.
10. F.	20. B. IV.	30. E. XIV.
		31. F. III.

April.

1. G.	11. C.	21. F. I.
2. A. XI.	12. D. X.	22. G.
3. B.	13. E.	23. A. IX.
4. C. XIX.	14. F. XVIII.	24. B.
5. D. VIII.	15. G. VII.	25. C. XVII.
6. E. XVI.	16. A.	26. D. VI.
7. F. V.	17. B. XV.	27. E.
8. G.	18. C. IV.	28. F. XIV.
9. A. XIII.	19. D.	29. G. III.
10. B. II.	20. E. XII.	30. A.

Mai.

1. B. XI.	11. E.	21. A. I.
2. C.	12. F. X.	22. B.
3. D. XIX.	13. G.	23. C. IX.
4. E. VIII.	14. A. XVIII.	24. D.
5. F.	15. B. VII.	25. E. XVII.
6. G. XVI.	16. C.	26. F. VI.
7. A. V.	17. D. XV.	27. G.
8. B.	18. E. IV.	28. A. XIV.
9. C. XIII.	19. F.	29. B. III.
10. D. II.	20. G. XII.	30. C.
		31. D. XI.

Junius.

1. E.	11. A.	21. D. IX.
2. F. XIX.	12. B. XVIII.	22. E.
3. G. VIII.	13. C. VII.	23. F. XVII.
4. A. XVI.	14. D.	24. G. VI.
5. B. V.	15. E. XV.	25. A.
6. C.	16. F. IV.	26. B. XIV.
7. D. XIII.	17. G.	27. C. III.
8. E. II.	18. A. XII.	28. D.
9. F.	19. B. I.	29. E. XI.
10. G. X.	20. C.	30. F.

Julius.

1. G. XIX.	11. C.	21. F. IX.
2. A. VIII.	12. D. XVIII.	22. G.
3. B.	13. E. VII.	23. A. XVII.
4. C. XVI.	14. F.	24. B. VI.
5. D. V.	15. G. XV.	25. C.
6. E.	16. A. IV.	26. D. XIV.
7. F. XIII.	17. B.	27. E. III.
8. G. II.	18. C. XII.	28. F.
9. A.	19. D. I.	29. G. XI.
10. B. X.	20. E.	30. A.
		31. B. XIX.

August.

1. C. VIII.	11. F. VII.	21. B. XVII.
2. D. XVI.	12. G.	22. C. VI.
3. E. V.	13. A. XV.	23. D.
4. F.	14. B. IV.	24. E. XIV.
5. G. XIII.	15. C.	25. F. III.
6. A. II.	16. D. XII.	26. G.
7. B.	17. E. I.	27. A. XI.
8. C. X.	18. F.	28. B.
9. D.	19. G. IX.	29. C. XIX.
10. E. XVIII.	20. A.	30. D. VIII.
		31. E.

September.

1. F. XVI.	11. B.	21. E. VI.
2. G. V.	12. C. XV.	22. F.
3. A.	13. D. IV.	23. G. XIV.
4. B. XIII.	14. E.	24. A. III.
5. C. II.	15. F. XII.	25. B.
6. D.	16. G. I.	26. C. XI.
7. E. X.	17. A.	27. D.
8. F.	18. B. IX.	28. E. XIX.
9. G. XVIII.	19. C.	29. F. VIII.
10. A. VII.	20. D. XVII.	30. G.

October.

1. A. XVI.	11. D. XV.	21. G.
2. B. V.	12. E. IV.	22. A. XIV.
3. C. XIII.	13. F.	23. B. III.
4. D. II.	14. G. XII.	24. C.
5. E.	15. A. I.	25. D. XI.
6. F. X.	16. B.	26. E.
7. G.	17. C. IX.	27. F. XIX.
8. A. XVIII.	18. D.	28. G. VIII.
9. B. VII.	19. E. XVII.	29. A.
10. C.	20. F. VI.	30. B. XVI.
		31. C. V.

November.

1. D.	11. G. IV.	21. C. XIV.
2. E. XIII.	12. A.	22. D. III.
3. F. II.	13. B. XII.	23. E.
4. G.	14. C. I.	24. F. XI.
5. A. X.	15. D.	25. G.
6. B.	16. E. IX.	26. A. XIX.
7. C. XVIII.	17. F.	27. B. VIII.
8. D. VII.	18. G. XVII.	28. C.
9. E.	19. A. VI.	29. D. XVI.
10. F. XV.	20. B.	30. E. V.

December.

1. F. XIII.	11. B.	21. E. III.
2. G. II.	12. C. XII.	22. F.
3. A.	13. D. I.	23. G. XI.
4. B. X.	14. E.	24. A.
5. C.	15. F. IX.	25. B. XIX.
6. D. XVIII.	16. G.	26. C. VIII.
7. E. VII.	17. A. XVII.	27. D.
8. F.	18. B. VI.	28. E. XVI.
9. G. XV.	19. C.	29. F. V.
10. A. IV.	20. D. XIV.	30. G.
		31. A. XIII.

Immerwährender Gregorianischer Kalender.

Januar.

1. A. *.	11. D. XX.	21. G. X.
2. B. XXIX.	12. E. XIX.	22. A. IX.
3. C. XXVIII.	13. F. XVIII.	23. B. VIII.
4. D. XXVII.	14. G. XVII.	24. C. VII.
5. E. XXVI.	15. A. XVI.	25. D. VI.
6. F. XXV.	16. B. XV.	26. E. V.
7. G. XXIV.	17. C. XIV.	27. F. IV.
8. A. XXIII.	18. D. XIII.	28. G. III.
9. B. XXII.	19. E. XII.	29. A. II.
10. C. XXI.	20. F. XI.	30. B. I.
		31. C. *.

Februar.

1. D. XXIX.	11. G. XVIII.	21. C. VIII.
2. E. XXVIII.	12. A. XVII.	22. D. VII.
3. F. XXVII.	13. B. XVI.	23. E. VI.
4. G. XXVI.	14. C. XV.	24. F. V.
5. A. XXV. XXIV.	15. D. XIV.	25. G. IV.
6. B. XXIII.	16. E. XIII.	26. A. III.
7. C. XXII.	17. F. XII.	27. B. II.
8. D. XXI.	18. G. XI.	28. C. I.
9. E. XX.	19. A. X.	
10. F. XIX.	20. B. IX.	

März.

1. D. *.	11. G. XX.	21. C. X.
2. E. XXIX.	12. A. XIX.	22. D. IX.
3. F. XXVIII.	13. B. XVIII.	23. E. VIII.
4. G. XXVII.	14. C. XVII.	24. F. VII.
5. A. XXVI.	15. D. XVI.	25. G. VI.
6. B. XXV.	16. E. XV.	26. A. V.
7. C. XXIV.	17. F. XIV.	27. B. IV.
8. D. XXIII.	18. G. XIII.	28. C. III.
9. E. XXII.	19. A. XII.	29. D. II.
10. F. XXI.	20. B. XI.	30. E. I.
		31. F. *.

April.

1. G. XXIX.	11. C. XVIII.	21. F. VIII
2. A. XXVIII.	12. D. XVII.	22. G. VII.
3. B. XXVII.	13. E. XVI.	23. A. VI.
4. C. XXVI.	14. F. XV.	24. B. V.
5. D. XXV. XXIV.	15. G. XIV.	25. C. IV.
6. E. XXIII.	16. A. XIII.	26. D. III.
7. F. XXII.	17. B. XII.	27. E. II.
8. G. XXI.	18. C. XI.	28. F. I.
9. A. XX.	19. D. X.	29. G. *.
10. B. XIX.	20. E. IX.	30. A. XXIX.

Mai.

1. B. XXVIII.	11. E. XVIII.	21. A. VIII.
2. C. XXVII.	12. F. XVII.	22. B. VII.
3. D. XXVI.	13. G. XVI.	23. C. VI.
4. E. XXV.	14. A. XV.	24. D. V.
5. F. XXIV.	15. B. XIV.	25. E. IV.
6. G. XXIII.	16. C. XIII.	26. F. III.
7. A. XXII.	17. D. XII.	27. G. II.
8. B. XXI.	18. E. XI.	28. A. I.
9. C. XX.	19. F. X.	29. B. *.
10. D. XIX.	20. G. IX.	30. C. XXIX.
		31. D. XXVIII.

Junius.

1. E. XXVII.	11. A. XVI.	21. D. VI.
2. F. XXVI.	12. B. XV.	22. E. V.
3. G. XXV. XXIV.	13. C. XIV.	23. F. IV.
4. A. XXIII.	14. D. XIII.	24. G. III.
5. B. XXII.	15. E. XII.	25. A. II.
6. C. XXI.	16. F. XI.	26. B. I.
7. D. XX.	17. G. X.	27. C. *.
8. E. XIX.	18. A. IX.	28. D. XXIX.
9. F. XVIII.	19. B. VIII.	29. E. XXVIII.
10. G. XVII.	20. C. VII.	30. F. XXVII.

Julius.

1. G. XXVI.	11. C. XVI.	21. F. VI.
2. A. XXV.	12. D. XV.	22. G. V.
3. B. XXIV.	13. E. XIV.	23. A. IV.
4. C. XXIII.	14. F. XIII.	24. B. III.
5. D. XXII.	15. G. XII.	25. C. II.
6. E. XXI.	16. A. XI.	26. D. I.
7. F. XX.	17. B. X.	27. E. *.
8. G. XIX.	18. C. IX.	28. F. XXIX.
9. A. XVIII.	19. D. VIII.	29. G. XXVIII.
10. B. XVII.	20. E. VII.	30. A. XXVII.
		31. B. XXVI.

August.

1. C. XXV. XXIV.	11. F. XIV.	21. B. IV.
2. D. XXIII.	12. G. XIII.	22. C. III.
3. E. XXII.	13. A. XII.	23. D. II.
4. F. XXI.	14. B. XI.	24. E. I.
5. G. XX.	15. C. X.	25. F. *.
6. A. XIX.	16. D. IX.	26. G. XXIX.
7. B. XVIII.	17. E. VIII.	27. A. XXVIII.
8. C. XVII.	18. F. VII.	28. B. XXVII.
9. D. XVI.	19. G. VI.	29. C. XXVI.
10. E. XV.	20. A. V.	30. D. XXV.
		31. E. XXIV.

September.

1. F. XXIII.	11. B. XIII.	21. E. III.
2. G. XXII.	12. C. XII.	22. F. II.
3. A. XXI.	13. D. XI.	23. G. I.
4. B. XX.	14. E. X.	24. A. *.
5. C. XIX.	15. F. IX.	25. B. XXIX.
6. D. XVIII.	16. G. VIII.	26. C. XXVIII.
7. E. XVII.	17. A. VII.	27. D. XXVII.
8. F. XVI.	18. B. VI.	28. E. XXVI.
9. G. XV.	19. C. V.	29. F. XXV. XXIV.
10. A. XIV.	20. D. IV.	30. G. XXIII.

October.

1. A. XXII.	11. D. XII.	21. G. II.
2. B. XXI.	12. E. XI.	22. A. I.
3. C. XX.	13. F. X.	23. B. *.
4. D. XIX.	14. G. IX.	24. C. XXIX.
5. E. XVIII.	15. A. VIII.	25. D. XXVIII.
6. F. XVII.	16. B. VII.	26. E. XXVII.
7. G. XVI.	17. C. VI.	27. F. XXVI.
8. A. XV.	18. D. V.	28. G. XXV.
9. B. XIV.	19. E. IV.	29. A. XXIV.
10. C. XIII.	20. F. III.	30. B. XXIII.
		31. C. XXII.

November.

1. D. XXI.	11. G. XI.	21. C. I.
2. E. XX.	12. A. X.	22. D. *.
3. F. XIX.	13. B. IX.	23. E. XXIX.
4. G. XVIII.	14. C. VIII.	24. F. XXVIII.
5. A. XVII.	15. D. VII.	25. G. XXVII.
6. B. XVI.	16. E. VI.	26. A. XXVI.
7. C. XV.	17. F. V.	27. B. XXV. XXIV.
8. D. XIV.	18. G. IV.	28. C. XXIII.
9. E. XIII.	19. A. III.	29. D. XXII.
10. F. XII.	20. B. II.	30. E. XXI.

December.

1. F. XX.	11. B. X.	21. E. *.
2. G. XIX.	12. C. IX.	22. F. XXIX.
3. A. XVIII.	13. D. VIII.	23. G. XXVIII.
4. B. XVII.	14. E. VII.	24. A. XXVII.
5. C. XVI.	15. F. VI.	25. B. XXVI.
6. D. XV.	16. G. V.	26. C. XXV.
7. E. XIV.	17. A. IV.	27. D. XXIV.
8. F. XIII.	18. B. III.	28. E. XXIII.
9. G. XII.	19. C. II.	29. F. XXII.
10. A. XI.	20. D. I.	30. G. XXI.
		31. A. XX.

B.

Kalium.

Calium; Potassium; *Potassium.*

Davy zeigte 1807, daſs die fixen Alkalien und Erden, welche bis dahin den Zerlegungsversuchen widerstanden hatten, Verbindungen von Metallen mit Sauerstoff seyen, und zerlegte zuerst das Kali in Kalium und Sauerstoff. Dieses Metall findet sich als Kali in sehr vielen weit verbreiteten Steinen, wie Feldspath, Glimmer u. s. w., in allen auf dem Binnenlande wachsenden Pflanzen und in kleiner Menge in den meisten Thieren.

Man erhält das Kalium entweder, nach Davy, indem man schwach befeuchtetes Kalihydrat in den Kreis einer starken Voltaschen Säule bringt, wo es sich an den negativen Leiter in kleinen Kügelchen absetzt, die jedoch, wenn sie nicht schnell unter Steinöl gesammelt werden, sogleich wieder verbrennen; oder, nach Gay-Lussac und Thénard, indem man Kalihydrat allmälig durch einen beschlagenen Flintenlauf leitet, in welchem sich fein vertheiltes Eisen in heftiger Weiſsglühhitze befindet,

welches durch Aufnahme des Sauerstoffes den Wasserstoff des Wassers und das Kalium des Kali's frei macht; oder, nach Curaudeau, Brunner u. A., indem man kohlensaures Kali mit Kohle in Gefäſsen aus Schmiedeeisen weiſs glüht, wobei sich Kohlenoxydgas und Kaliumdampf entwickelt.

Das Kalium ist das leichteste Metall, indem sein specifisches Gewicht nur 0,865 beträgt. Es ist zinnweiſs, bei 0° C. brüchig, bei 19° weich wie Wachs, bei 25° unvollkommen, bei 58° vollkommen flüssig; es verwandelt sich etwas unter der Rothglühhitze in einen grünen Dampf. Es leitet gleich andern Metallen die Wärme und Elektricität.

Seine Verbindungen mit Sauerstoff sind das Kaliumsuboxyd, das Kali und das Kaliumhyperoxyd.

1) Das *Kaliumsuboxyd* bildet sich, wenn fein zertheiltes Kalium mit viel weniger Luft oder Sauerstoffgas in Berührung steht, als zu seiner Umwandlung in Kali nöthig ist, oder wenn es mit Kali erhitzt wird. Es ist grau, nicht metallglänzend, sehr schmelzbar und spröde und entzündet sich an der Luft schon bei 20° bis 25° C. Vielleicht ist es bloſs ein Gemenge von Kalium und Kali.

2) Das *Kali*, *Kaliumoxyd* oder *vegetabilische Alkali* (39,2 Kalium auf 8 Sauerstoff) bildet sich bei vollständigerer Oxydation des Kaliums. Die Affinität dieses Metalls zum Sauerstoff ist so groſs, daſs es sich nicht bloſs bei gewöhnlicher Temperatur an feuchter Luft allmälig in Kalihydrat verwandelt, sondern es zersetzt auch bei gewöhnlicher Temperatur das Wasser und bei etwas erhöhter die sämmtlichen Sauerstoffsäuren und die meisten Metalloxyde und ihre Salze, immer unter Wärme- und meistens auch unter Feuerentwickelung; auf Wasser geworfen entwickelt es Wasserstoffgas, welches beim Zutritt von Luft sich entzündet und seine Entzündung dem Kalium mittheilt. In allen diesen Fällen bildet sich Kali. Man erhält dieses in reinem Zustande, wenn man das durch Verbrennen von Kalium in trocknem Sauerstoffgas erhaltene Kaliumhyperoxyd durch heftiges Glühen vom überschüssigen Sauerstoff befreiet, oder wenn man Kalihydrat mit so viel Kalium erhitzt, als zur Zersetzung des Hydratwassers nöthig ist. Das reine Kali ist grau und spröde, schmilzt in mäſsiger Glühhitze und verdampft erst in viel stärkerer; es ist geruchlos, aber von sehr ätzendem Geschmack, so wie es von allen Alkalien die stärkste ätzende Wirkung besitzt.

Das Kali bildet mit wenig Wasser das *Kalihydrat* (den *Aetzstein* oder *Lapis causticus*), welches viel länger bekannt ist, als das reine Kali, und durch Digestion von kohlensaurem Kali mit Kalk und Wasser und Abdampfen der so erhaltenen Aetzlauge, bis sich kein Wasser mehr entwickelt, erhalten wird. Es unterscheidet sich vom wasserfreien Kali durch weiſse Farbe und leichtere Schmelzbarkeit und Verdampfbarkeit. Aus einer concentrirten Lösung des Kali's in warmem Wasser schieſsen in der Kälte Krystalle an, welche viel mehr Wasser enthalten, als das Hydrat. — Das Kali zerflieſst schnell an der Luft und löst sich in Wasser, von dem es nur etwas über $\frac{1}{2}$ nöthig hat, unter Wärmeentwickelung. Die als Aetzlauge bekannte Lösung ist um so specifisch schwerer und um so schwieriger gefrierbar, je concentrirter sie ist.

Das Kali neutralisirt die Säuren sehr vollständig, so daſs bei schwachen Säuren seine alkalische Reaction überwiegend bleibt, und bildet damit die Kalisalze. Alle Kalisalze sind im Wasser löslich, jedoch einige schwierig, wie der Weinstein und der Kalialaun, und hierauf, so wie auf die Fällung derselben durch salzsaures Platinoxyd gründet sich die Unterscheidung des Kali's und seiner Salze von Natron und den Natronsalzen. Als wichtigere Salze des Kali's sind zu nennen *salpetersaures Kali* oder *Salpeter*. Man bereitet ihn im Groſsen, indem man stickstoffhaltende organische Materien in Berührung mit kalk- und kalihaltenden Stoffen an der Luft verwesen läſst, die dadurch gebildeten salpetersauren Salze mit Wasser auszieht, aus der Lösung den Kalk und die Bittererde durch kohlensaures Kali fället, sie hierauf weiter abdampft, das dabei krystallisirende Kochsalz herausnimmt und die Flüssigkeit in Gefäſsen erkältet, wo der *rohe Salpeter* anschieſst. Dieser wird durch Auflösen in heiſsem Wasser, Klären und Krystallisiren in *gereinigten* oder *raffinirten* Salpeter verwandelt, welcher jedoch nur durch wiederholtes Krystallisiren gänzlich vom Kochsalz befreiet werden kann. Der Salpeter schieſst in Rectangulär-Oktaedern und unregelmäſsig sechsseitigen Säulen an, welche bald mit 2, bald mit 6 Flächen beendigt sind und kein Wasser halten. Er schmeckt kühlend-scharf. Er schmilzt unter der Glühhitze ohne Zersezzung zu einer klaren Flüssigkeit; beim Glühen entwickelt er unter Aufschäumen Sauerstoffgas nebst etwas Stickgas. Mit brennbaren Körpern verpufft er heftig in der Hitze, indem der Sauer-

stoff seiner Salpetersäure sich unter Feuerentwickelung mit dem brennbaren Körper vereinigt und der Stickstoff als Gas in Freiheit gesetzt wird.

Der Salpeter braucht bei 0° C. 8 Theile und bei 100° weniger als ½ Theil Wasser zur Auflösung. Von seinen Gemengen mit andern Körpern sind am wichtigsten das *Schiefspulver* (s. diesen Artikel), das *Knallpulver* und das *Schmelzpulver*. Das *Knallpulver* besteht aus 1 Theil Schwefel, 2 Th. kohlensaures Kali und 3 Salpeter, welche in möglichst trockenem Zustande innig gemengt werden. Berührt man dieses Gemenge mit einer glühenden Kohle, so erfolgt allmälige Verbrennung, von schwachem Verpuffen begleitet; erhitzt man es dagegen in einem eisernen oder andern Gefäfse allmälig immer stärker, so wird es vom Rande aus braun und teigig und verpufft dann mit äufserst heftigem Knalle und unter Zerschmetterung des Gefäfses, sobald es nicht stark genug ist. Wahrscheinlich bildet sich beim allmäligen Erhitzen aus dem Schwefel und kohlensaurem Kali Schwefelleber, also ein Gemisch aus Schwefelkalium und schwefelsaurem Kali; mit dieser mischt sich der Salpeter innig; sobald aber die Temperatur einen gewissen Grad erreicht, reifst das Kalium nebst dem Schwefel den Sauerstoff der Salpetersäure unter Feuerentwickelung an sich und setzt den Stickstoff der Salpetersäure als Gas in Freiheit, welches denn die Explosion veranlafst. Die ehemalige Theorie, nach welcher sich aus dem Salpeter Sauerstoffgas und aus dem Schwefel und kohlensauren Kali hydrothionsaures Gas entwickeln sollten, die dann gemengt eine sich entzündende Knallluft bildeten, ist unrichtig, 1) weil die Hitze zu gering ist, als dafs der Salpeter Sauerstoff entwickelte; 2) weil bei trockenen Ingredienzien, welche gerade die stärkste Wirkung zeigen, kein Wasserstoff gegeben ist, also an die Entwickelung von Hydrothionsäure nicht gedacht werden kann; 3) weil diese zwei Gase, wenn sie sich auch entwickelten, sich nicht in grofser Menge über dem Knallpulver ansammeln, sondern mit dem Zuge des Feuers aufsteigen und in der umgebenden Luft verlieren würden; und 4) weil die explodirende Wirkung vom Knallpulver selbst ausgeht und nicht von einem oberhalb des Knallpulvers befindlichen Raume.

Das *Schmelzpulver* oder Baumé's *Schnellflufs* ist ein Gemenge aus 1 Theil Schwefel, 1 Sägspäne und 3 Salpeter; füllt man hiermit eine Nufsschale oder einen kleinen Tiegel, bringt

in die Mitte eine kleine Silber- oder Kupfermünze und entzündet das Pulver, so reicht die hierdurch erzeugte Hitze zur Schmelzung des Metalls hin, während die Nufsschale, weil die Feuerentwickelung bald beendigt ist, wenig verbrannt erscheint.

Das *chlorsaure Kali* oder *hyperoxygenirt-salzsaure Kali* krystallisirt in meist sehr kurzen, tafelförmigen, schiefen, rhombischen Säulen von salpeterähnlichem Geschmack, die kein Krystallwasser halten, beim Reiben im Dunkeln Funken entwickeln, in gelinder Wärme ohne Zersetzung schmelzen, sich bei schwacher Glühhitze unter Entwickelung von Sauerstoffgas in Chlorkalium verwandeln, mit brennbaren Körpern, wie Kohle, Schwefel, Phosphor, Zucker u.s.w. theils in der Hitze, theils schon beim Drücken unter lebhafter Feuerentwickelung verpuffen und mit Vitriolöl Chloroxydgas erzeugen, welches theils vom Vitriolöl mit braungelber Farbe absorbirt bleibt, theils sich entwickelt, und durch theilweise Zersetzung lebhaftes Verpuffen veranlafst. Dieses Salz dient, mit Schwefel, Hexenmehl, Holzstaub und Salpeter gemengt, als *Zündpulver* oder *Percussionspulver* zum Entzünden von Gewehren durch den Schlag; mit Schwefel, Harz, Zucker, Taganthschleim und Zinnober gemengt, zur Verfertigung der rothen oder chemischen Schwefelhölzer oder Eupyrions, welche sich in Vitriolöl entzünden. Berthollet versuchte auch, Schiefspulver aus chlorsaurem Kali, Kohle und Schwefel darzustellen; da jedoch dieses Gemenge sich schon durch den Druck entzündet, so ist sowohl die Bereitung als auch die Versendung dieses Pulvers mit Lebensgefahr verbunden und aufserdem müfsten die Gewehre für dasselbe stärker gemacht werden, da es sonst sie leicht zerschmettert.

Leitet man durch wasserfreies kohlensaures Kali nicht so viel Chlorgas, als zur Austreibung sämmtlicher Kohlensäure nöthig ist, so erhält man eine Flüssigkeit von stark bleichender Kraft, in welcher von einigen Chlorkali als vorhanden angenommen wird, von andern eine Verbindung des Kali's, einerseits mit Salzsäure, andererseits mit Chloroxyd, welche letztere Substanz eine bleichende Kraft besitze.

Das *einfach schwefelsaure Kali* schiefst in kleinen, harten, rhombischen und 6seitigen Säulen, mit 4 oder 6 Flächen zugespitzt, an, welche kein Krystallwasser enthalten, in der Hitze verknistern und schmelzen, schwach bitterlich schmecken, gegen Pflanzenfarben neutral sind und sich in 12 Th. kaltem Wasser

lösen. — Das *doppelt schwefelsaure Kali* ist leicht schmelzbar, sehr sauer, schmilzt unter der Glühhitze, verliert erst in heftiger das zweite Mischungsgewicht Schwefelsäure, löst sich leicht in Wasser und schiefst daraus in wasserhaltenden Säulen und Nadeln an.

Das *einfach kohlensaure Kali* wird durch Ausziehen der Holzasche mit Wasser und Abdampfen im unreineren Zustande als *Potasche*, durch Ausziehen des geglühten Weinsteins mit Wasser im reineren Zustande als *Weinsteinsalz* dargestellt. Es ist weifs, fest, in starker Rothglühhitze schmelzend, von alkalischer Reaction und geringer Aetzkraft, zerfliefst schnell an der Luft und braucht nur gleichviel Wasser zur Lösung. Die gesättigtere Lösung, das *Weinsteinöl*, hat Oelconsistenz; sie liefert in der Kälte wasserhaltende Krystalle. — Das *doppelt kohlensaure Kali* krystallisirt leicht in Verbindung mit Wasser, schmeckt und reagirt sehr schwach alkalisch und verliert bei mäfsigem Erhitzen die Hälfte der Kohlensäure, so dafs einfach kohlensaures Kali bleibt, und zerfliefst nicht an der Luft.

Das *mangansaure Kali* ist bereits erwähnt[1].

Mit der Kleesäure bildet das Kali ein einfach-, doppelt- und vierfach-saures Salz. Das *doppelt kleesaure Kali* ist als *Sauerkleesalz* bekannt.

Das *doppelt weinsaure Kali* setzt sich als *Weinstein* aus dem Weine ab. Es ist eins der am wenigsten im Wasser löslichen Kalisalze. Durch völlige Neutralisirung mit Kali geht es in das *einfach weinsaure Kali* oder in den *tartarisirten Weinstein* über, der sehr leicht in Wasser löslich ist, in rhombischen Säulen anschiefst, und aus dessen wässeriger Lösung selbst schwache Säuren, durch Entziehung der Hälfte des Kali's, wieder Weinstein fällen, so dafs die Flüssigkeit bei hinreichender Concentration fast ganz gesteht. Das *essigsaure Kali* oder die *geblätterte Weinsteinerde*, durch Sättigen des kohlensauren Kali's mit destillirtem Essig und Abdampfen erhalten, krystallisirt schwierig und ist besonders durch schnelle Zerfliefslichkeit an der Luft ausgezeichnet.

Als wichtigere Doppelsalze, welche Kali enthalten, sind zu nennen: das *schwefelsaure Alaunerde-Kali* (*Kali-Alaun*),

1 S. Mineralisches Chamaeleon Th. II. S. 91.

das *weinsaure Natron-Kali* (*Seignette-Salz*) und das *weinsaure Antimonoxyd-Kali* (*Brechweinstein*).

Das Kali ist endlich noch mit vielen schwächern Salzbasen zu in Wasser theils unauflöslichen, theils löslichen Verbindungen vereinbar. So läſst es sich mit der Alaunerde, Süſserde und Kieselerde zusammenschmelzen und macht sie, sobald es vorwaltet, im Wasser löslich; die Verbindung mit Kieselerde ist glasartig; bei geringem Kaligehalt, wo sie unauflöslich ist, stellt sie das *Kaliglas* dar, zu welchem das meiste *Kronglas* und *Spiegelglas* zu zählen ist; die Verbindung der Kieselerde mit mehr Kali ist zwar auch glasartig, löst sich jedoch in Wasser auf und bildet damit die *Kieselfeuchtigkeit, Liquor Silicum*, aus welcher sich, so wie sie nicht sehr verdünnt ist, durch Säure die Kieselerde in gallertartigen Flocken fällen läſst. Auch mit mehreren schweren Metalloxyden, wie Titanoxyd, Tantaloxyd, Telluroxyd, Wismuthoxyd, Zinkoxyd, Zinnoxyd und Bleioxyd, läſst sich das Kali theils auf trockenem, theils auf nassem Wege vereinigen, und durch seine Vermittelung werden mehrere dieser Oxyde in Wasser löslich.

3) Das *Kaliumhyperoxyd* (39,2 Kalium auf 24 Sauerstoff) entsteht beim Verbrennen des Kaliums in trocknem Sauerstoffgas. Dieses erfolgt bei gewöhnlicher Temperatur langsam, ohne Feuerentwickelung, dagegen bei 60 bis 80° rasch unter Entwickelung einer lebhaften, röthlich weiſsen Flamme. Es ist pomeranzengelb und schmilzt noch unter der Glühhitze zu einem gelblichen Oele, das beim Erkalten blättrig gesteht. Es verwandelt sich in Kali durch Verlust des überschüssigen Sauerstoffs, sowohl bei heftigem Glühen, als auch beim Zusammenbringen mit Wasser, in welchem es sich unter Aufbrausen als Kali löst, und beim Zusammenbringen mit brennbaren Stoffen, an welche es den Sauerstoff meistens unter Feuerentwickelung abgiebt.

Das Kalium ist ferner verbindbar mit Fluor, Chlor, Brom, Iod, Selen, Schwefel, Phosphor, Cyan und Schwefel-Cyan. Die Verbindungen mit den zuerst genannten 4 Stoffen krystallisiren alle in farblosen Würfeln.

Das *Fluorkalium* (39,2 Kalium auf 18,6 Fluor) schmilzt unter der Glühhitze, reagirt alkalisch und zerflieſst an der Luft; in seiner wässerigen Lösung kann es als fluſssaures Kali betrachtet werden. Es ist sowohl mit Fluſssäure als auch mit Fluorboron vereinbar.

Das *Chlorkalium* oder *Digestivsalz* (39,2 Kalium auf 35,4 Chlor) bildet sich sowohl, wenn man Kalium in Chlorgas bringt, wo es bei gewöhnlicher Temperatur unter lebhafter Feuerentwickelung verbrennt, als auch beim Vermischen von Kali mit wässeriger Salzsäure und Abdampfen, sofern hierbei Wasserbildung erfolgt und die entstehenden Krystalle weder Wasserstoff noch Sauerstoff enthalten. Die Verbindung ist in der Glühhitze schmelzbar und verdampfbar; sie schmeckt salzig und reagirt weder alkalisch noch sauer; in Wasser gelöst kann sie als *salzsaures Kali* betrachtet werden.

Vom *Schwefel-Kalium* sind wenigstens 5 Arten zu unterscheiden, sofern 39,2 Kalium mit 16, 32, 48, 64 und 80 Schwefel verbindbar sind. Die Verbindung des Kaliums mit Schwefel erfolgt bei mäſsiger Wärme unter heftiger Feuerentwickelung. Gewöhnlich stellt man das Schwefelkalium dar als *Kalischwefelleber*, indem man ein Gemenge von 1 kohlensaurem Kali und $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Schwefel in einem irdenen oder gläsernen Gefäſse bis zum Schmelzen und zur Austreibung der Kohlensäure erhitzt. Hierbei bildet sich ein Gemenge von Vielfach-, Dreifach-, Vierfach- oder Fünffach-Schwefelkalium mit wenig schwefelsaurem Kali, sofern sich ein Theil Schwefel mit Sauerstoff des Kali's zu Schwefelsäure vereinigt und das so desoxydirte Kalium einen andern Theil des Schwefels aufnimmt. Sämmtliche Verbindungen des Kaliums mit Schwefel sind braun, in der Glühhitze schmelzbar und verdampfbar und in Wasser löslich. Die Lösung des Einfach-Schwefelkaliums in Wasser ist farblos, und nimmt man an, das Kalium habe hierbei aus dem Wasser Sauerstoff aufgenommen und der Schwefel Wasserstoff, so ist sie als wässeriges *hydrothionsaures Kali* zu betrachten; die wässerige Lösung des Fünffach-Schwefelkaliums ist braun und als wässeriges *hydrothionigsaures Kali* anzusehen, sofern hier auf den aus dem Wasser freigewordenen Wasserstoff 5 mal so viel Schwefel kommt, als bei der erstgenannten Lösung. Alle wässerigen Säuren entwickeln aus dem Schwefelkalium Hydrothionsäure, daher diese im Anfang *Schwefelleberluft* genannt wurde.

Das *Phosphor-Kalium* ist rothbraun, schmelzbar, verbrennt beim Erhitzen an der Luft und entwickelt im Wasser Phosphorwasserstoffgas.

Das *Cyankalium* erhält man rein durch Erhitzen von Kalium in Cyangas oder Blausäure-Dampf, unrein durch Glühen

von kohlensaurem Kali mit stickstoffhaltigen organischen Substanzen, z. B. mit getrocknetem Blute, deren Kohlenstoff theils dient dem Kali den Sauerstoff zu entziehen, theils mit dem Stickstoff Cyan zu bilden, welches sich dann mit dem reducirten Kalium vereinigt. Wasser zieht aus der kohligen Masse das Cyan-Kalium als blausaures Kali; diese Lösung heifst *Blutlauge* und dient vorzüglich zur Darstellung des *Berlinerblaues*.

Das *Schwefel-Cyan-Kalium* krystallisirt in salpeterähnlichen Säulen, kein Wasser haltend, ist in der Hitze leicht schmelzbar, an der Luft sehr zerfliefslich. Seine Lösung im Wasser, die als wässeriges schwefelblausaures Kali zu betrachten ist, dient als Reagens für Eisen-Oxyd-Salze, welche dadurch gelbroth gefärbt werden. *G.*

Katoptrik.

Catoptrica; Catoptrique; *Catoptrics;* derjenige Theil der Optik, welcher von der Zurückwerfung der Lichtstrahlen an Spiegeln handelt. Der ehemals auch gebrauchte Name Anakamptik ist nicht mehr gewöhnlich.

Der Inhalt dieser Wissenschaft ist sehr leicht zu übersehen, indem in derselben nur das Gesetz der Zurückwerfung der Lichtstrahlen von spiegelnden Flächen bestimmt und dann die rein geometrische Anwendung auf die Zurückwerfung von gegebenen Spiegelflächen gemacht wird. Diese Untersuchungen sind um so einfacher, da man nur die Fälle hier zu betrachten pflegt, wo der Zurückwerfungswinkel dem Einfallswinkel gleich ist und keine Zerlegung in Farbenstrahlen statt findet; die Fälle, wo katoptrische Farben entstehen [1], rechnet man, als von ähnlichen Gesetzen wie die Beugung des Lichts abhängend, nicht hierher. Dagegen gehören manche Instrumente, die Spiegelmikroskope und Spiegelteleskope, der Katoptrik an.

Dieser Theil der Optik ist früher als die Dioptrik angewandt und ausgebildet worden. Spiegel zum gewöhnlichen Gebrauche und sogar Brennspiegel [2] sind den Alten bekannt gewesen. Beckmann [3] bemerkt, dafs die metallenen Spiegel am frühesten in

1 Art. *Farbe.* S. 102. und Art. *Inflexion.*

2 S. Art. *Brennspiegel.*

3 Beckmann's Anleit. z. Technologie etc. 22. Abschnitt.

Das *Chlorkalium* oder *Digestivsalz* (39,2 Kalium auf 35,4 Chlor) bildet sich sowohl, wenn man Kalium in Chlorgas bringt, wo es bei gewöhnlicher Temperatur unter lebhafter Feuerentwickelung verbrennt, als auch beim Vermischen von Kali mit wässeriger Salzsäure und Abdampfen, sofern hierbei Wasserbildung erfolgt und die entstehenden Krystalle weder Wasserstoff noch Sauerstoff enthalten. Die Verbindung ist in der Glühhitze schmelzbar und verdampfbar; sie schmeckt salzig und reagirt weder alkalisch noch sauer; in Wasser gelöst kann sie als *salzsaures Kali* betrachtet werden.

Vom *Schwefel-Kalium* sind wenigstens 5 Arten zu unterscheiden, sofern 39,2 Kalium mit 16, 32, 48, 64 und 80 Schwefel verbindbar sind. Die Verbindung des Kaliums mit Schwefel erfolgt bei mäfsiger Wärme unter heftiger Feuerentwickelung. Gewöhnlich stellt man das Schwefelkalium dar als *Kalischwefelleber*, indem man ein Gemenge von 1 kohlensaurem Kali und $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Schwefel in einem irdenen oder gläsernen Gefäfse bis zum Schmelzen und zur Austreibung der Kohlensäure erhitzt. Hierbei bildet sich ein Gemenge von Vielfach-, Dreifach-, Vierfach- oder Fünffach-Schwefelkalium mit wenig schwefelsaurem Kali, sofern sich ein Theil Schwefel mit Sauerstoff des Kali's zu Schwefelsäure vereinigt und das so desoxydirte Kalium einen andern Theil des Schwefels aufnimmt. Sämmtliche Verbindungen des Kaliums mit Schwefel sind braun, in der Glühhitze schmelzbar und verdampfbar und in Wasser löslich. Die Lösung des Einfach-Schwefelkaliums in Wasser ist farblos, und nimmt man an, das Kalium habe hierbei aus dem Wasser Sauerstoff aufgenommen und der Schwefel Wasserstoff, so ist sie als wässeriges *hydrothionsaures Kali* zu betrachten; die wässerige Lösung des Fünffach-Schwefelkaliums ist braun und als wässeriges *hydrothionigsaures Kali* anzusehen, sofern hier auf den aus dem Wasser freigewordenen Wasserstoff 5 mal so viel Schwefel kommt, als bei der erstgenannten Lösung. Alle wässerigen Säuren entwickeln aus dem Schwefelkalium Hydrothionsäure, daher diese im Anfang *Schwefelleberluft* genannt wurde.

Das *Phosphor-Kalium* ist rothbraun, schmelzbar, verbrennt beim Erhitzen an der Luft und entwickelt im Wasser Phosphorwasserstoffgas.

Das *Cyankalium* erhält man rein durch Erhitzen von Kalium in Cyangas oder Blausäure-Dampf, unrein durch Glühen

von kohlensaurem Kali mit stickstoffhaltigen organischen Substanzen, z. B. mit getrocknetem Blute, deren Kohlenstoff theils dient dem Kali den Sauerstoff zu entziehen, theils mit dem Stickstoff Cyan zu bilden, welches sich dann mit dem reducirten Kalium vereinigt. Wasser zieht aus der kohligen Masse das Cyan-Kalium als blausaures Kali; diese Lösung heifst *Blutlauge* und dient vorzüglich zur Darstellung des *Berlinerblaues.*

Das *Schwefel-Cyan-Kalium* krystallisirt in salpeterähnlichen Säulen, kein Wasser haltend, ist in der Hitze leicht schmelzbar, an der Luft sehr zerfliefslich. Seine Lösung im Wasser, die als wässeriges schwefelblausaures Kali zu betrachten ist, dient als Reagens für Eisen-Oxyd-Salze, welche dadurch gelbroth gefärbt werden. *G.*

Katoptrik.

Catoptrica; Catoptrique; *Catoptrics;* derjenige Theil der Optik, welcher von der Zurückwerfung der Lichtstrahlen an Spiegeln handelt. Der ehemals auch gebrauchte Name Anakamptik ist nicht mehr gewöhnlich.

Der Inhalt dieser Wissenschaft ist sehr leicht zu übersehen, indem in derselben nur das Gesetz der Zurückwerfung der Lichtstrahlen von spiegelnden Flächen bestimmt und dann die rein geometrische Anwendung auf die Zurückwerfung von gegebenen Spiegelflächen gemacht wird. Diese Untersuchungen sind um so einfacher, da man nur die Fälle hier zu betrachten pflegt, wo der Zurückwerfungswinkel dem Einfallswinkel gleich ist und keine Zerlegung in Farbenstrahlen statt findet; die Fälle, wo katoptrische Farben entstehen [1], rechnet man, als von ähnlichen Gesetzen wie die Beugung des Lichts abhängend, nicht hierher. Dagegen gehören manche Instrumente, die Spiegelmikroskope und Spiegelteleskope, der Katoptrik an.

Dieser Theil der Optik ist früher als die Dioptrik angewandt und ausgebildet worden. Spiegel zum gewöhnlichen Gebrauche und sogar Brennspiegel [2] sind den Alten bekannt gewesen. Beckmann [3] bemerkt, dafs die metallenen Spiegel am frühesten in

1 Art. *Farbe.* S. 102. und Art. *Inflexion.*

2 S. Art. *Brennspiegel.*

3 Beckmann's Anleit. z. Technologie etc. 22. Abschnitt.

Gebrauch waren, aber auch die gläsernen schon früh erfunden worden sind. Nach PLINIUS Angaben scheine die Verfertigung der Glasspiegel in Sidon erfunden worden zu seyn; anfangs habe man dem Glase, um es zu Spiegeln brauchbar zu machen, eine dunkle Farbe gegeben, dann Blei und endlich Amalgam als Belegung der Hinterfläche gebraucht. Nach den von BECKMANN angeführten Stellen ist in der Mitte des 13. Jahrhunderts das Glas mit einer Belegung von Blei (auf das heiſse Glas wurde Blei gegossen) zu Spiegeln angewandt worden.

Die wissenschaftliche Bearbeitung der Katoptrik ist auch schon in sehr alter Zeit versucht worden. Wenn auch, wie GREGORY glaubt, die dem EUKLIDES beigelegte Katoptrik[1] nicht von diesem groſsen Geometer seyn mag, woran man wegen der darin vorkommenden, eines groſsen Geometers unwürdigen, unrichtigen Behauptungen zu zweifeln Ursache gefunden hat, so bezeugt doch dieses Buch, daſs man schon früh die Bestimmung des Brennpunctes bei hohlen Kugelspiegeln uud ähnliche Bestimmungen aufsuchte. Auch PTOLEMAEUS hat in seiner Optik die Lehre von den Spiegeln aufgenommen, aber auch hier finden sich, wie DELAMBRE versichert, Wahrheit und Irrthum vermischt. Von ARCHIMEDES und HERO's hierher gehörigen Schriften ist sehr wenig bekannt[2].

Viel mehr hat der Araber ALHAZEN im 11. Jahrhunderte geleistet[3]. Er löste das schwierige Problem auf, den Ort des Reflexionspuncts beim Kugelspiegel zu finden, wenn die Lagen des Auges und des Gegenstandes gegeben sind, und erweiterte auch auf andere Weise diese Wissenschaft. VITELLIO hat zu diesen Kenntnissen wenig hinzugefügt. Als Schriftsteller, die für diese Wissenschaft thätig gewesen sind, verdienen genannt zu werden: ANTHEMIUS, welcher Untersuchungen über elliptische Spiegel und über die dem ARCHIMEDES zugeschriebene Anwendung der Brennspiegel anstellte, REGIOMONTANUS, dessen Schrift über Brennspiegel verloren zu seyn scheint, RAPHAEL MIRAMI (Introduzione alla prima parte della specularia o sia scienza degli specchi, Firenze 1584), MAUROLYCUS (Theoremata de lumine

1 In Euclidis opp. ed. Gregory 1706.

2 Priestley Gesch. d. Optik. S. 25 der Uebers.

3 Risneri opticae thesaurus. Basil. 1572.

et umbra)[1], Kepler (Paralipomena ad Vitellionem. Francof. 1604), Barrow (lectiones opticae. Lond. 1674).

Die theoretische Katoptrik ist nachher durch Hugenius und Slusius, durch Smith (A compleat system of Optics), Kästner u. a. erweitert worden. In der neuesten Zeit hat Quetelet die Lehre von den Brennlinien, die durch Tschirnhausen zuerst bekannt geworden und nachher durch De la Hire, Jac. und Joh. Bernoulli u. a. bearbeitet worden ist, sehr vervollständigt[2].

Die praktischen Anwendungen der Katoptrik haben theils zu den Cylinderspiegeln, Kegelspiegeln, convexen Kugelspiegeln geführt, theils zu den Hohlspiegeln, deren Anwendung zu Spiegelteleskopen so wichtig geworden ist. Da von allen diesen Gegenständen einzelne Artikel handeln, so will ich hier nur kurz anführen, dafs um die Spiegelteleskope früher Newton und Herschel und in der neuesten Zeit Amici sich grofse Verdienste erworben haben und dafs Amici auch Spiegelmikroskope von grofser Vollkommenheit verfertigt.

Die *Katoptrik* ist in den Lehrbüchern der Optik mit abgehandelt. Unter diesen hat lange Zeit Smith's vollständiger Lehrbegriff der Optik, mit Anmerk. von Kästner, Altenb. 1755, einen vorzüglichen Platz behauptet, und es fehlt uns jetzt an einem gleich vollständigen, dem jetzigen Zustande der Wissenschaft angemessenen Werke. Langsdorf's Grundlehren der Photometrie (Erlangen 1803, 1805) enthalten zwar viel Brauchbares, namentlich in der Katoptrik, das Buch ist aber doch durch eine weitschweifige Art der Darstellung weniger nützlich geworden. Vieth hat in seinem Lehrbuche der physisch angewandten Mathematik, 2ter Theil, eine sehr brauchbare, aber kurze Darstellung dieser Wissenschaft geliefert. Zur Geschichte der Wissenschaft ist Priestley's Geschichte und gegenwärtiger Zustand der Optik, übersetzt von Klügel (Leipzig 1775), noch immer brauchbar, obgleich seit 50 Jahren viele Zusätze nothwendig geworden sind. *B.*

1 Vgl. Montucla I. 335. 420. 543.

2 Nouv. mém. de l'acad. de Bruxelles. Tome III. pour 1826 und ein Auszug in Férussac Bullet. math. 1827. Janv.

Kausticität.

Aetzbarkeit, Aetzkraft; *Vis caustica, corrosio;* Causticité; *Caustickness;* das Vermögen verschiedener Substanzen, thierische und Pflanzenstoffe auf eine solche Art zu verändern, daſs sie ihren Zusammenhalt verlieren, also zerfressen werden. Diese Aetzkraft kommt nur solchen Stoffen zu, die als Ganze oder ihren Bestandtheilen nach mit gröſsern Affinitäten gegen die organischen Materien als Ganze oder gegen einzelne Bestandtheile derselben begabt sind. So wirken Salpetersäure und salpetersaures Silberoxyd ätzend vermöge ihres Sauerstoffs, welcher von dem Kohlenstoffe und Wasserstoffe der organischen Materie mit Begierde angezogen wird; Chlor vermöge seiner Affinität zu Wasserstoff; Vitriolöl, Salzsäure, Chlorantimon u. s. w. ätzen theils wegen ihrer groſsen Affinität zum Wasser, dessen Bildung sie aus dem Wasserstoff und dem Sauerstoff der organischen Materie veranlassen, theils wegen ihrer Affinität zu der ganzen organischen Materie, die sie in einem oft nur wenig veränderten Zustande auflösen; auf dem zuletzt genannten Grunde beruht auch die Wirkung der reinen Alkalien, welche besonders die thierischen Stoffe mit Leichtigkeit auflösen. Diese ätzende Wirkung der reinen Alkalien wird schon durch ihre Verbindung mit der schwachen Kohlensäure gröſstentheils gehoben, durch die Verbindung mit einer stärkern Säure vollständig, weil die Affinität gegen die Säuren gröſser ist, als die gegen nicht saure organische Stoffe. Schon längst unterschied man, ohne den Grund noch zu kennen, die reinen Alkalien als *ätzende* von den kohlensauern, die man *milde* nannte. Daſs der Kalk durch das Brennen ätzend wird, leitete man vorzüglich von der Aufnahme von Feuer ab; Meyer zugleich von der Aufnahme einer hypothetischen Substanz, welche er *Acidum pingue* nannte; mag aber auch der Kalk beim Brennen eine gewisse Menge von Feuer binden, so wird doch jetzt allgemein mit Black angenommen, daſs nicht hiervon dessen Aetzkraft herrührt, sondern von der Austreibung der Kohlensäure beim Glühen, wodurch er in den freien Zustand versetzt wird, in welchem er seine Affinität gegen organische Körper äuſsern kann.

G.

Kegelspiegel.

Speculum conicum; Miroir conique; *Conical mirror.* Ein Spiegel, dessen Oberfläche eine convexe Kegelfläche bildet.

Man könnte die Frage allgemein zu beantworten suchen, wie sich einem in gegebener Stellung befindlichen Auge ein Gegenstand im konischen Spiegel darstelle, ja man könnte die Frage sogar auf verschiedene Arten von Kegeln ausdehnen; aber diese wenig Nutzen versprechende Untersuchung pflegt man so zu beschränken, daſs sie erstlich nur auf den geraden Kegel bezogen wird, und daſs man zweitens dem Auge seine Stellung in einem Puncte der über die Spitze hinaus verlängerten Axe anweiset. Bei dieser Beschränkung ist es nicht schwer, die doppelte Aufgabe zu lösen, 1) eines gegebenen Gegenstandes Bild auf die Grundfläche des Kegels projicirt zu zeichnen, 2) diejenige Anamorphose zu zeichnen, welche, im Spiegel gesehen, dem Auge ein bestimmtes Bild darstellen soll.

Es sey F ein gegebener Punct, dessen Bild im Spiegel man bestimmen will, so legt man durch ihn und durch die Axe des Kegels eine Ebene, welche des Kegels Oberfläche in AD, DB schneidet; E sey der Ort des Auges. Zieht man nun FG senkrecht auf die Verlängerung von BD und nimmt fG = FG, so bestimmt Ef den Punct H, wo die Zurückwerfung statt findet, indem offenbar DHE = BHf = BHF ist. Der Durchschnittspunct der Ef mit AB giebt die Stelle an, wo das Auge den gespiegelten Punct auf die Grundfläche projicirt sieht. Für einen bestimmten Gegenstand könnte man auf diese Weise die Lage aller Puncte des Bildes finden. Fig. 194.

Will man dagegen eine Zeichnung machen, welche im Spiegel gesehen ein bestimmtes Bild darstellt, so verfährt man auf folgende Weise. Man zeichnet in einen der Grundfläche des Kegels gleichen Kreis die Figur, welche das gesehene Bild darstellen soll, zieht dann durch einen in die Anamorphose einzutragenden Punct A dieses Bildes den Radius CB; errichtet in C eine auf CB senkrechte Linie und nimmt darauf CD der Höhe des Kegels, DE der Höhe des Auges über der Spitze des Kegels gleich; zieht EA, und nimmt an dem Puncte H, wo diese in DB einschneidet, den Winkel GHB = AHB; dann ist der Durchschnittspunct a der Linie HG mit dem Radius derjenige Fig. 195.

Punct der Anamorphose, der sein Bild in A darstellt. Es erhellet daher leicht, daſs die Puncte, welche sich als dem Umfange der Grundfläche nahe liegend zeigen sollen, nur wenig auſserhalb des Kreises gezeichnet werden, diejenigen hingegen, die dem Mittelpuncte des Kreises nahe liegen sollen, am entferntesten vom Umfange des Kreises zu zeichnen sind. Die Grenze des verzerrten Bildes wird gefunden, indem man BD nach L verlängert und MDB = LDE nimmt; alle Puncte, die auf einem um C gezogenen Kreise vom Halbmesser = CM liegen, erscheinen dem Auge als im Centro C vereinigt. Hieraus entstehen die sonderbaren Verzerrungen, daſs zum Beispiel, wenn man durch die Spiegelung ein Portrait als Brustbild so sehen soll, daſs der Mund die Mitte ausmacht, die Lippen das ganze verzerrte Bild umgeben, statt daſs an einer Seite die Haare, an der andern die Bekleidung der Brust unmittelbar an dem Umfange des Kreises, den die Grundfläche des Kegels bedeckt, anliegen. *B.*

K e i l.

Cuneus; Coin; *Wedge.*

Jeder in eine Spitze oder Schneide zulaufende Körper kann als Keil betrachtet werden, jedoch versteht man hierunter meistens einen Körper, welcher durch drei quadratische und zwei dreieckige Flächen eingeschlossen ist. Hiernach entsteht ein Keil, wenn ein Dreieck sich in der Ebene eines auf eine seiner Ecken gefällten Perpendikels bewegt, und gehört zu den sechs einfachen mechanischen Potenzen, obgleich man ihn meistens auf die geneigte Ebene zurückführt oder als zwei mit ihren Grundflächen an einander gelegte geneigte Ebenen betrachtet. Es werden dann an demselben der Kopf, die Seiten oder Seitenflächen und die Schneide oder Schärfe unterschieden.

Ueber die Theorie des Keiles sind schon von den ältesten Zeiten her Untersuchungen angestellt worden und die Geometer waren seit Aristoteles hierüber nicht einerlei Meinung. Es scheint mir indeſs überflüssig, bei einer so einfachen Maschine die älteren Ansichten von Mersenne, Guido Ubaldi, Parent, Cartesius, Wallis, Dechales, de Lanis, Reill, Borelli, Casati, de la Hire, Varignon, v. Wolf und Andern

mitzutheilen [1], und ich begnüge mich mit folgender allgemeinen Darstellung.

Es sey ABC der Durchschnitt eines Keiles, DE, lothrecht gegen den Kopf desselben, die Richtung einer auf ihn wirkenden Kraft = P. Von dem Puncte E, auf welchen diese wirkt, fälle man die Perpendikel EF, FG auf die beiden Seitenflächen des Keils, gegen welche der zu überwindende Widerstand statt findet, so sind diese die Componirenden der Kraft P, welche X und Y heifsen mögen. Wird dann DE bis zu einem willkürlichen Puncte e verlängert, und zieht man aus diesem die Parallelen ef und eg mit EG und EF, so hat man das Parallelogramm der Kräfte, dessen Diagonale Ee ist, und es folgt dann Fig. 196.

$$P : X : Y = Ee : Ef : Eg.$$

Es ist aber fe = Eg, also P : X : Y = Ee : Ef : fe, und weil die Seiten des Dreiecks Efe auf den Seiten des Dreiecks ACB lothrecht stehen, so sind beide Dreiecke einander ähnlich, also

$$P : X : Y = AB : AC : BC,$$

d. h. es verhalten sich für den Zustand des Gleichgewichts die drei wirkenden Kräfte bei einem Keile, wie die drei Seiten des Dreiecks ABC. Es sind aber diese drei Seiten die Durchschnitte durch die Ebenen des Kopfes und der beiden Flächen des Keiles, und da diese gleiche Höhen haben, folglich sich verhalten wie diese ihre Durchschnitte, so kann man auch sagen: es verhält sich beim Keile die gegen den Kopf desselben anzuwendende Kraft zu dem Widerstande, welcher gegen seine beiden Seitenwände ausgeübt wird, wie die Fläche des Kopfes zu seinen beiden Seitenflächen [2]. Da die Form des Keiles willkürlich ist, so lassen sich die auf seine drei Seiten wirkenden Kräfte durch drei Perpendikel be, ce, ae ausdrücken, welche sich für den Zustand des Gleichgewichts aber in einem Puncte schneiden müssen, weil sonst eine Drehung erfolgt [3]. Weil aber für den Zustand des Gleichgewichts die erforderlichen Kräfte den Flächen proportional sind, so folgt zugleich, dafs die Wirkung eines Druckes oder Stofses gegen den Kopf eines Keiles unendlich wird, wenn die Fläche dieses Kopfes verschwindet. Fig. 197.

1 Man findet diese in G. F. Bärmann's Dissert. de Cuneo. Viteb. 1751. 4. Vergl. A. G. Kästner Anfangsgr. der Mechanik. Gött. 1780. Anm. §. 105. S. 63. Ludlam's Essay on the power of the Wedge. 1770.

2 Vergl. Poisson Traité de Mécan. T. I. p. 501.

3 Vergl. Young Lectures T. I. p. 71. T. II. p. 42.

Die gewöhnlichste Form der Keile ist die eines rechtwinkligen oder gleichschenkligen Dreiecks, und dann fällt seine Construction mit der einer geneigten Ebene zusammen, wobei man nicht sowohl den Zustand des Gleichgewichts, als vielmehr die Gröfse der Kraft untersucht, welche erfordert wird, um vermittelst des Keiles eine gegebene Last zu heben. In beiden Fällen wird dann angenommen, dafs die geneigte Ebene, also der Keil, gegen die zu hebende Last bewegt wird, welches auf die Theorie keinen weiteren Einflufs hat. Bildet also der Durch-
Fig. 198. schnitt des Keiles ein rechtwinkliges Dreieck, so kommt derselbe vollständig mit der geneigten Ebene überein, und es ist dann auf ihn unmittelbar dasjenige anzuwenden, was in Beziehung auf diese letztere bereits nachgewiesen ist[1], nämlich dafs die Kraft sich zu der zu hebenden Last verhält, wie die Höhe der geneigten Ebene zu ihrer Länge, oder wie AB zu AC. Dieses Verhältnifs ist aber das des Neigungswinkels, und heifst dieser also $= \alpha$, die zur Erzeugung des Gleichgewichts erforderliche Kraft $= P$, die drückende Last $= Q$, so ist $P = Q. \text{Sin.}\, \alpha$. Ist dagegen die Durchschnittsfläche des Keils ein gleichschenk-
Fig. 199. liges Dreieck, so ist derselbe als aus zwei mit ihren Grundflächen zusammengelegten geneigten Ebenen ACB und A′CB bestehend zu betrachten. Es wäre hiernach also das Verhältnifs von AB : AC und von A′B : AC, also von AA′ : AC gegeben, und wenn der ganze Winkel, welchen die beiden Flächen des Keiles bilden, $= \alpha$ heifst, so ist $P = 2\, Q. \text{Sin.}\, \frac{1}{2}\alpha$. Hierbei wird vorausgesetzt, dafs die Last senkrecht gegen die Seiten des Keiles drückt, wie dieses in den allermeisten Fällen statt findet; ist aber die Richtung der Last der Ebene des Keilrückens parallel, so ist für den rechtwinkligen Keil $P = Q. \text{Tang.}\, \alpha$ und für den gleichschenkligen $P = 2\, Q. \text{Tang.}\, \frac{1}{2}\alpha$. Aus allen vier Formeln ergiebt sich übereinstimmend, dafs die Wirksamkeit des Keiles so viel gröfser seyn wird, je geringer seine Dicke gegen seine Länge ist.

Zur Kenntnifs des Keils und seiner Wirksamkeit genügt das bisher Angegebene vollkommen, da seine Anwendung zwar sehr häufig, aber nie complicirt ist, selbst nicht bei gewölbten Bogen, deren einzelne Ausschnitte als Keile betrachtet werden. Meistens bedient man sich des gleichschenkligen Keiles zum Spalten des Holzes oder zum Hinauftreiben von Balken, La-

1 S. Th. III. S. 67.

sten u. s. w., und da die Dicke der Keile in der Regel ungleich geringer ist, als ihre Länge, so macht es keinen merklichen Unterschied, ob die Berechnung nach dem Sinus oder der Tangente angestellt wird. Ueberhaupt aber wird der mechanische Effect des Keiles selten berechnet, sondern gewöhnlich bringt man denselben nur nach allgemeinen Regeln einer groben Empirie in Anwendung. Weit weniger geschieht dieses ferner in der Art, dafs drei Kräfte gleichzeitig gegen den Kopf und die beiden Flächen des Keiles drücken, als dafs gegen ersteren ein Stofs ausgeübt wird, um die Flächen zwischen die Widerstand leistenden Körper zu treiben, und dabei wird dann in der Regel ohne nähere Untersuchung vorausgesetzt, dafs die Richtung der drei Kräfte auf diese Flächen lothrecht sey. Ist dieses nicht der Fall, so kann die Kraft bei bekannter Richtung derselben leicht reducirt werden. Wäre z. B. der Keil acb und die Richtung der Fig. 200.
Kraft ed gegen denselben gegeben, so ist diese als die Diagonale der Componirenden ef und fd zu betrachten, wovon die letztere verschwindet, die erstere aber als effectiv wirksam bleibt. Es ist aber ef der Cosinus des Neigungswinkels der Kraft mit der geometrischen Axe des Keiles, und wenn dieser $= \alpha'$ genannt wird, so ist die reducirte Kraft $k' = k. \text{Cos.}\ \alpha'$. Eben diese Formel ist auch zur Reduction der Kräfte genügend, welche in gegebener Richtung gegen die Seitenflächen des Keiles wirken.

Nur selten kommt es zur praktischen Anwendung, dafs der Keil als durch drei auf seine Flächen lothrecht gerichtete Kräfte im Gleichgewichte erhalten betrachtet wird, wenn nicht etwa bei der Construction gewölbter Bogen. Wenn man sich desselben bedient, z. B. beim Spalten des Holzes und der Steine oder zum Hinauftreiben von Lasten, so wird er durch die Reibung in dem gemachten Spalte festgehalten, woraus schon von selbst folgt, dafs diese aufserordentlich stark seyn mufs. In den meisten Fällen würde er ohne diese fast seine ganze Brauchbarkeit verlieren, wie man unter andern dann wahrnimmt, wenn seine Flächen zu glatt sind und er bei jedem Schlage auf seinen Kopf wieder zurückspringt. Die starke Reibung ist bei ihm daher nothwendig, aber es folgt daraus auch zugleich, dafs ein grofser Theil der auf ihn verwandten Kraft dadurch wieder verloren geht. Manche Schriftsteller bringen den Reibungs-Coefficienten und die Richtung dieser Reibung gegen seine Flächen zugleich

mit in Rechnung[1], allein der Reibungs-Coefficient ist zu wenig genau bestimmbar. Am einfachsten ist es daher, mit HUTTON[2] anzunehmen, daſs die Reibung gerade so stark ist, als der gegen ihn ausgeübte Druck; denn wäre sie geringer, so würde der vorwärts getriebene Keil bei nachlassender treibender Kraft sich wieder zurückbewegen. In der Regel ist aber die Reibung noch ungleich stärker, als diese angegebene Gröſse, denn sonst müſste man einen durch Schlagen hineingetriebenen Keil mit leichter Mühe wieder zurückziehen können. Hiernach muſs aber zur Bewegung eines Keiles die doppelte Kraft angewandt werden, wenn man Lasten durch ihn heben will, und der durch ihn zu erhaltende mechanische Effect könnte daher nicht groſs seyn, wenn der Keil nicht zugleich den Vortheil gewährte, daſs er durch den Stoſs getrieben wird, was bei keiner sonstigen einfachen mechanischen Potenz der Fall ist. Es wird aber im Art. *Stoſs* gezeigt werden, daſs die Kraft stoſsender Körper, z. B. eines geschwungenen Hammers, eines Schlägels u. s. w., dem Quadrate der Geschwindigkeit multiplicirt mit der Masse desselben proportional ist, und eine Masse von 1 ℔. mit einer Geschwindigkeit von 1 F. in einer Secunde einen Effect von 0,47 ℔. giebt. Da aber ein Mensch mit der Hand einem Körper eine Geschwindigkeit von 50 F. in 1 Sec. zu geben vermag[3], so läſst sich ein Hammer an einem Stiele vielleicht zur doppelten Endgeschwindigkeit bringen, und würde dann bei einem Gewichte von 1 ℔. zu einer Kraft von 4700 ℔. gebracht werden. Will man aber auch nur jene Geschwindigkeit von 50 F. in 1 Sec. annehmen, so beträgt die Kraft doch 1175 ℔. Für die oben mitgetheilte einfachste Formel, nämlich $P = Q.\,\mathrm{Sin.}\,\alpha$, ist die gefundene Zahl der Werth von P, und es ergiebt sich dann leicht, wie groſs Q seyn darf, oder was für eine Last vermittelst eines Keiles durch stärkstes Schlagen mit einem Hammer von 1 ℔. Gewicht gehoben werden könnte, sobald α bekannt ist. Wäre $\alpha = 15°$, und rechnet man, daſs durch Reibung die Hälfte der Kraft verloren wird, so wäre für den obern Werth von P die gefundene Wirkung $Q = \frac{4700}{2.\,\mathrm{Sin.}\,15°} = 9079{,}7$ und für den

1 S. LANGSDORF Handbuch der gemeinen und höheren Mechanik. 1807. S. 212.

2 Dictionairy T. II. p. 595.

3 S. dieses Wörterb. Th. IV. S. 1352.

letzteren $Q = \frac{1175}{2 \cdot \text{Sin.}\, 15^\circ} = 2270$ ℔. Die hier erhaltenen Resultate sind gewifs nicht übertrieben und die Bestimmungen, mit Ausnahme des allezeit unsichern Reibungscoefficienten, hinlänglich genau, insbesondere ist die Kraft des Stofses nicht zu grofs angenommen, da die Erfahrung lehrt, dafs durch schwere Hämmer von 8 bis 10 oder 12 ℔. Gewicht starke eiserne Keile zerschlagen werden. Hutton [1] sagt daher mit Recht, dafs das schwerste Schiff vermittelst eines unter dasselbe getriebenen Keiles gehoben werden kann.

Bisher ist unter dem Widerstande, welchen der Keil zu überwinden hat, nur der Druck gegen seine Seiten verstanden worden. In der praktischen Anwendung hat jedoch die Schärfe des Keiles oft ein widerstehendes Hindernifs zu durchschneiden, welches einen desto gröfseren Aufwand von Kraft erfordert, je härter der zu trennende Körper und je stumpfer die Schneide des Keiles ist. In allen Fällen ist daher der mechanische Effect des Keiles um so gröfser, je geringer seine Höhe im Verhältnifs zu seiner Länge und je feiner seine Schneide ist, jedoch läfst sich beides nicht so weit treiben, dafs der Keil die erforderliche Stärke verliert. Uebrigens können Messer, Degen, Säbel, Beile, Hacken, Pflugscharen, Stemm-, Hebel- und Dreh-Stahle, Grabstichel, Nägel, Nadeln u. v. a. zum Keile gerechnet werden [2].

Um das angegebene Gesetz der Wirkung des Keiles durch einen Versuch zu prüfen, hat Musschenbroek [3] einen Apparat angegeben, welcher durch Langsdorf [4] etwas abgeändert und *Gomphometer* (von γόμφος Keil) genannt worden ist. An den um ihre Axen leicht beweglichen Scheiben a, b sind die gleichen Hebelarme ad, ag, bd′, bh rechtwinklig angebracht, so dafs die Gewichte Q, Q′ mit ihrer ganzen Kraft die leicht beweglichen Walzen oder Rollen g, h gegen die Seiten des Keiles drücken und nach dem Verhältnifs des Winkels, welchen diese einschliefsen, den durch das Gewicht P herabgezogenen Keil am Herabsinken Fig. 201.

1 A Course of Mathematics cet. Lond. 1811. II. p. 186.

2 Die Theorie des Keiles findet man in allen Lehrbüchern der Mechanik und der mechanischen Physik, weswegen es überflüssig ist, die Literatur einzeln anzugeben.

3 Introd. §. 466. T. I. p. 183.

4 Handbuch der gemeinen und höheren Mechanik. S. 213.

hindern. Die Schraube op dient dann, die Neigung der beiden Flächen des Keiles zu verändern, um verschiedene Verhältnisse von P zu Q, Q' zu erhalten. *M.*

K l i m a.

Clima; Climat; *Climate.*

Unter Klima (*κλῖμα*, von *κλίνω* ich neige) verstand man ehemals die Neigung der Erdoberfläche gegen die Sonne, welche ohne Rücksicht auf die veränderliche Deklination der letzteren unter dem Aequator = 0 und auf den beiden Halbkugeln der Erde den Graden der Breite direct proportional ist. Nach dieser Neigung wurde dann die Erde vom Aequator an nach jedem der Pole hin in Zonen getheilt, welche, von ungleicher Ausdehnung, mit jenem parallel laufen und durch die zunehmende Länge der Tage bestimmt sind. Nach den alten Geographen[1] begreift nämlich jedes folgende Klima diejenige Zone, in welcher der längste Tag um 30 Minuten wächst, und in so fern dieser unter dem Aequator 12 Stunden beträgt, unter dem Polarkreise aber 24 Stunden, so begreift dieser Raum 24 Klimate. Die spätern Geographen theilten die Polarzone dann noch in 6 Klimate, in denen die Tageslänge um einen Monat zunimmt, bis unter den Pol selbst, wo das Jahr nur einen Tag und eine Nacht enthält. Diese nur noch zum Verständniſs der Alten wissenswerthe Eintheilung zeigt folgende Tabelle[2].

1 Ptolemaei Geogr. L. I. c. 8. Riccioli Geogr. reform. Lib. VII. c. 9. Varenii Geogr. gener. Sect. VI. c. 25.

2 Nach Varenius a. a. O.

Klima.	Ausdehnung bis Breitengrade.		begreift		Dauer des längsten Tages.	
1	8°	34′	8°	34	12 St.	30 Min.
2	16	44	8	10	13	
3	24	12	7	28	13	30
4	30	48	6	36	14	
5	36	31	5	43	14	30
6	41	24	4	53	15	
7	45	32	4	08	15	30
8	49	02	3	30	16	
9	52	00	2	58	16	30
10	54	31	2	31	17	
11	56	38	2	07	17	30
12	58	27	1	49	18	
13	60	00	1	33	18	30
14	61	19	1	19	19	
15	62	26	1	07	19	30
16	63	23		57	20	
17	64	11		48	20	30
18	64	50		39	21	
19	65	22		32	21	30
20	65	48		26	22	
21	66	08		20	22	30
22	66	21		13	23	
23	66	29		08	23	30
24	66	32		03	24	
25	67	23		51	1 Monat	
26	69	50	2	27	2 —	
27	73	39	3	49	3 —	
28	78	31	4	52	4 —	
29	84	05	5	34	5 —	
30	90	0	5	55	6 —	

Mit der Entfernung vom Aequator und der ihr proportionalen gröſseren Neigung der Sonne gegen die Horizontalebene nimmt die Wärme ab, und dürfte man die Temperatur der verschiedenen Orte bloſs als eine Folge jener Neigung betrachten, so lieſse sich dieselbe ganz genau berechnen. Unter Klima verstand man daher später die höhere oder niedrigere Temperatur der verschiedenen Erdzonen und suchte Formeln auf, wonach man diese aus den Graden der Breite ohne oder mit Rücksicht auf die Erhebung der Orte über die Meeresfläche berechnen könnte, wie dieses namentlich durch Halley, Mairan, Simpson, Tob. Mayer, L. Euler, Kästner u. a. geschehen ist.

Weitere Untersuchungen zeigten indeſs, daſs die berechneten Temperaturen mit den beobachteten keineswegs übereinkamen, und obgleich die herrschende Wärme mit Rücksicht auf ihre Stärke und Dauer unter die wesentlichsten Bedingungen der Beschaffenheit des Klima's gehört, so ist sie doch keineswegs die einzige, indem namentlich Oerter, wo trockene Wärme herrscht, sich sehr wesentlich von solchen unterscheiden, welche starkem Regen unterworfen sind. Je genauer und vollständiger überhaupt die Kenntniſs der Länder und einzelner Gegenden geworden ist, je mehr man den Einfluſs der daselbst herrschenden Witterung auf das Thier- und Pflanzenleben erkannt hat, um desto mehr ist der Begriff der *Klimatologie* erweitert, so daſs letztere in diesem Augenblicke einen weitläuftigen und wichtigen Zweig der physikalischen Untersuchungen ausmacht. Manche einzelne hierbei in Betrachtung kommende Theile sind auſserdem von groſsem Umfange und erfordern eine so ausführliche Behandlung, daſs der Artikel *Klima* zu einer ungebührlichen Länge anwachsen müſste, wenn man sie insgesammt darin aufnehmen wollte. Es scheint mir daher am angemessensten, die wichtigsten Bedingungen des Klima's einzeln namhaft zu machen, zugleich aber diejenigen bloſs anzudeuten, welche in eigenen Artikeln näher untersucht werden müssen [1].

1) Die erste und wesentlichste Bedingung des Klima's ist die *Temperatur*, von welcher die Production im Thier- und Pflanzenreiche in einem solchen Grade abhängt, daſs beide in Fülle und Ueppigkeit von der gänzlichen Unfruchtbarkeit der erstarrten Polargegenden bis zur unglaublichsten Production der äquatorischen Zonen der wachsenden Wärme proportional zunehmen. Die hierbei bedingende Temperatur ist dann in Beziehung auf ihre Quelle und ihre verschiedenen Modificationen eine gedoppelte; zuerst diejenige, welche dem Kerne und der Kruste der Erde, ihrer Oberfläche und Atmosphäre in Folge einer bleibend vorhandenen Wärme-Menge eigenthümlich ist und durch die Einwirkung der Sonnenstrahlen erzeugt, in Thätigkeit gesetzt oder modificirt wird. Diese, welche der Erde gleichsam nothwendig zugehörend anzusehen ist, wurde bereits abgehandelt [2], worauf ich daher verweisen darf. Zweitens aber wird

1 Vergl. v. Humboldt in G. LXXXVII. 1. ff.

2 S. Art. *Erde*. Th. III. S. 970 ff.

die Temperatur sehr durch Oertlichkeiten modificirt, ist eine andere und verschiedenen Wechseln unterworfen in grofsen Continenten und auf Inseln oder Küsten, in Thälern und auf Bergen, in feuchten, sumpfigen und vielem Regen ausgesetzten Gegenden und in trocknen Sandwüsten, unterscheidet sich ausnehmend rücksichtlich der Extreme, indem diese an einigen Orten zwischen 12° C., an andern zwischen 60, ja 80° C. schwanken, unterliegt aufser diesen jährlichen Veränderungen noch täglichen Schwankungen, welche sogar an der Oberfläche der Erde oder in geringen Höhen über derselben anders sind als in gröfseren u. s. w. Diese letzteren weitläuftigen Untersuchungen, welche ohnehin mit der Theorie der Wärme genau zusammenhängen, müssen einem eigenen Artikel [1] vorbehalten bleiben, indem es hier genügt, zu bemerken, dafs das Klima auf zweierlei Weise durch die Temperatur bedingt wird; zuerst durch die Gröfse der mittleren Wärme, wonach sich heifse Zonen von den gemäfsigten und kalten unterscheiden, und zweitens durch das Maximum derselben, insofern für das Reifen und den gröfseren Ertrag der Früchte, namentlich des Weines, oft nicht sowohl die Höhe der mittleren Temperatur, als vielmehr die Intensität der Wärme in den Sommermonaten bedingend ist.

2) Die zweite Hauptbedingung des Klima's ist der *Feuchtigkeitszustand der Atmosphäre*, welcher von der Trockenheit der herrschenden Winde, von der Menge des Thaues, der Nebel, des Regens und Schnees, kurz der sogenannten *Hydrometeore* abhängt. Alle diese müssen rücksichtlich ihrer verschiedenartigen Beschaffenheit, ihrer allgemeinen und örtlichen Stärke, ihrer mehr oder minder häufigen Wechsel, ihrer Ursachen und Bedingungen einzeln untersucht werden, welches in den Artikeln: *Nebel*, *Regen*, *Thau*, *Verdunstung* u. s. w. geschehen soll. Im Allgemeinen unterscheidet man hiernach die feuchten und trocknen Klimate, indem einige Gegenden durch häufige und starke Regen stets feucht sind, in andern, als in Aegypten, Lima, einigen Sandwüsten Africa's u. s. w. es selten oder gar nicht regnet, in noch andern zwar starke periodische Regen gewöhnlich sind, zuweilen aber gegen 10 Monate ausbleiben, so dafs alle Vegetation verdürret, viele endlich nur zwei Wechsel, die Zeit der Trockenheit und die Regenzeit, haben, wo dann in

1 S. Art. *Temperatur*.

der ersteren unglaubliche Trocknifs herrscht, in der letzteren die furchtbarsten Regengüsse mit kurzen Unterbrechungen den höchsten Grad der Feuchtigkeit erzeugen. Nicht wenige Gegenden der äquatorischen Zone haben sogar einen doppelten Wechsel dieser Art als feste Regel.

3) Im nächsten Zusammenhange hiermit steht eine dritte bedingende Ursache des Klima's, nämlich die *Beschaffenheit des Bodens.* Manche Gegenden sind feucht durch das Wasser, welches in der Erdkruste von nahen Gewässern aus an die Oberfläche dringt. Dahin gehören die Ufergegenden der Flüsse, Moräste und Sümpfe, insbesondere aber die *Oasen* in Africa[1]. Der unterscheidende Charakter diesen grofsen Welttheils ist nämlich, dafs derselbe aufser den Gebirgen unabsehbare Sandebenen enthält, welche sich zwar von geringerer Ausdehnung auch in Asien und seltener in America befinden, dort aber die Eigenthümlichkeit zeigen, dafs mitten in den flachen, ganz unfruchtbaren, keine Pflanzen und kaum einige seltene wilde Thiere, selbst keine Vögel darbietenden, Sandwüsten gröfsere oder geringere Flächen mit der üppigsten Vegetation bekleidet gefunden werden. Die Ursache hiervon liegt darin, dafs an den meisten Orten das atmosphärische Wasser sich in dem tiefen Sande verliert, daher die Dürre aufs Höchste gesteigert wird, und, indem hierdurch zugleich die Luft den höchsten Grad der Trocknifs erreicht, folglich alle Hydrometeore mindestens Monate lang fehlen, alle Pflanzen verdorren und die Thiere diese nahrungslosen Orte fliehen. Wenn sich dagegen unter dem Sande eine feste Grundlage, namentlich Granit, findet, worein das Wasser nicht dringen kann, welches sich in näheren oder entfernteren Gegenden aus den Hydrometeoren angesammelt hat, und aus diesem Grunde fortdauernd als Quelle zur Oberfläche dringt, so vereinigen sich Wärme und Feuchtigkeit zur üppigsten Vegetation und bedingen die kühlen, fruchtbaren und reizenden Oasen, welche durch den grellen Abstand von der, zum Verschmachten dürren, sie umgebenden Sandwüste so viel wundervoller erscheinen.

Aber auch ohne diese sehr auffallenden, örtlich wirkenden Ursachen ist die Beschaffenheit des Bodens von grofsem Einflusse. Schwarze basaltische Strecken werden leicht und stark

1 Vergl. Th. III. S. 1134.

durch den Einfluſs der Sonnenstrahlen erhitzt, feiner Sandboden trocknet durch Wärme schnell aus und macht die Gegenden heiſs, wenn sie die durch die Sonnenstrahlen erzeugte Wärme nicht durch Verdampfung des zurückgehaltenen atmosphärischen Wassers verlieren. Von einem kalkhaltigen Boden werden die Sonnenstrahlen stark reflectirt und verbreiten gröſsere Wärme umher, statt daſs thonhaltige und mit einer dicken Lage fruchtbarer Dammerde bedeckte Gegenden längere Zeit feucht bleiben. Insbesondere halten mit Vegetation überzogene, namentlich bewaldete Gegenden die Feuchtigkeit stärker zurück, werden durch die Sonnenstrahlen weniger erhitzt als unfruchtbare und ziehen eben hierdurch die atmosphärischen Niederschläge mehr an, sind daher nicht bloſs selbst kühl, sondern verbreiten auch eine erquickend abkühlende Luftströmung über die heiſsen Umgegenden. Endlich darf man es wohl als ausgemacht ansehen, daſs die Fossilien von eigenthümlicher Beschaffenheit, woraus die Erdkruste besteht, namentlich diejenigen, welche das Wasser, insbesondere des Winterschnees, lange zurückhalten und überhaupt Feuchtigkeit begierig anziehen, die Menge des auf sie fallenden atmosphärischen Wassers vermehren, dadurch selbst kühler bleiben und die starke Erhitzung der berührenden Luftschichten verhindern. Man darf mit Grunde behaupten, daſs die Beschaffenheit des Bodens den atmosphärischen Niederschlag bedingt, woraus dann der angegebene klimatische Einfluſs von selbst folgt.

4) Auf das Klima haben ferner die *herrschenden Winde* sowohl rücksichtlich ihrer Richtung als auch ihrer Stärke einen sehr groſsen Einfluſs. Im Allgemeinen sind auf der nördlichen Halbkugel, hauptsächlich in Europa, die Nord- und Ostwinde die kältesten und trockensten, weil sie meistens aus kalten Gegenden oder über groſse Continental-Ebenen kommen, die südlichen und südwestlichen aber die wärmsten und feuchtesten, erstere, indem sie die wärmern Luftschichten herbeiführen, letztere, weil sie in Europa die über dem Atlantischen Oceane aufgenommenen Wasserdämpfe enthalten. Aehnliche Ursachen bringen in andern Gegenden ähnliche Wirkungen hervor. Dieser Einfluſs der Winde erstreckt sich bis in die höchsten Polargegenden. Nach Scoresby[1] wird der Wind von groſsen Eisflächen

1 G. LXII. 1 ff.

gleichsam zurückgestofsen, so dafs eine von diesen ausgehende Luftströmung und eine andere ihr entgegen wehende bis auf die Entfernung von einigen Hundert Fufs sich gleichsam das Gleichgewicht halten. Hieraus wird es erklärlich, dafs die vom Eise ganz umgebenen Schiffe hierdurch einen Schutz gegen die Winde erhalten und vom Eise ganz umschlossene Stellen des Meeres eine sehr ebene Fläche bilden. Sind die wärmeren Luftströmungen von überwiegender Stärke, so verlieren sie ihre Feuchtigkeit bei der Berührung des Polareises, es giebt daher am Rande desselben den meisten Schnee, und auf eben dieser Ursache beruhet die anhaltende Heiterkeit des Himmels über den durch Eis ganz umgebenen Ländern. Aus einem ähnlichen Grunde sind in vielen Gegenden die über hohe und beeisete Berge kommenden Luftströmungen trocken, wie namentlich die Süd- und Südostwinde im südlichen Deutschlande, statt dafs die südwestlichen und noch mehr die nordwestlichen Regen bringen. Der Einflufs der Winde auf die klimatische Beschaffenheit der Oerter mufs übrigens so viel gröfser seyn, je stärker und anhaltender sie selbst sind.

So gewifs und mit vieljähriger allgemeiner Erfahrung übereinstimmend dieses übrigens auch ist, so darf man doch auf der andern Seite nicht in einen sehr gemeinen Irrthum verfallen und die jedesmalige Witterung von der klimatischen Beschaffenheit derjenigen entfernten Gegenden ableiten, woher die herrschenden Luftströmungen scheinbar kommen, indem die Winde auf gröfsere Strecken vielfach wechseln. Nicht selten herrschen nämlich z. B. kalte Winter in den Polargegenden, wenn sie bei nördlichen Winden unter weniger hohen Breiten gelinder sind, und umgekehrt haben die letzteren oft strenge Kälte bei ungewöhnlich gelinder Temperatur der Polargegenden.

5) Die *Lage der einzelnen Orte* rücksichtlich ihrer Umgebung hat einen sehr entscheidenden Einflufs auf das Klima. Am wesentlichsten ist die Nachbarschaft des Meeres, welches wegen seiner gröfseren Wärmecapacität in den heifsen Jahreszeiten eine Menge Wärme absorbirt, in den kälteren aber abgiebt, so dafs die Extreme der Temperatur in seiner Nähe bei weitem geringer sind, als in der Mitte grofser Continente. Nicht blofs das Meer, sondern selbst auch grofse Seen und Flüsse erzeugen aufserdem starke Nebel, erhalten die Luft feucht und mildern die Hitze. Von grofsem Einflusse auf die klimatische Beschaffenheit der

Oerter ist ferner ihre Lage hinsichtlich des Schutzes benachbarter Berge gegen den Einfluſs heiſser oder kalter Luftströmungen. In mittlern und höhern Breiten ist namentlich die südliche Abdachung der Gebirge ein hauptsächliches Mittel zur Erhöhung der Temperatur, und die Concentrirung der Sonnenstrahlen in Schluchten, welche gegen die kalten Winde schützen, macht es in Norwegen möglich, Obst und namentlich Kirschen zur Reife zu bringen, statt daſs die nördlichen Abdachungen der nämlichen Berge nicht einmal den Bau der Cerealien gestatten. Groſse Waldungen sind wegen des erzeugten Schattens und der zurückgehaltenen Feuchtigkeit stets kühl und mildern daher die Temperatur der Luftströmungen, welche von ihnen aus bis in mäſsig entfernte Gegenden flieſsen. Ein auffallender Beweis hierfür liegt schon in der bekannten Erfahrung, daſs der Samum seine verheerenden Eigenschaften über Gegenden verliert, auf denen sich vegetirende Pflanzen befinden. Mit einem entgegengesetzten Effecte aber können sie auch durch ihre gröſsere Wärmecapacität, durch die zurückgehaltene Feuchtigkeit und durch ihren mechanischen Widerstand die kalten und zugleich trocknen Luftströmungen mildern, aus welchem Grunde groſse Waldungen in sehr kalten Gegenden, oder auch beträchtliche Erhöhungen, Bergketten u. s. w. dem Einflusse der kalten Winde und Stürme widerstehen, wogegen einmal ausgerottete Wälder auf keine Weise leicht wieder herstellbar sind.

6) Das Klima wird vorzüglich bedingt durch die *Höhe über der Meeresfläche* und selbst durch die Nachbarschaft hoher Berge. Mit der absoluten Höhe eines Ortes nimmt zuerst seine Temperatur ab, zugleich aber die Dichtigkeit der ihn umgebenden Atmosphäre. Beide Ursachen erzeugen die sogenannte scharfe Luft, welche dem animalischen und vegetabilischen Leben nicht zuträglich ist, indem einestheils die Trockenheit und Dünne der umgebenden Luft die Verdunstung sehr befördert, anderntheils aber die nicht durch die dickere Luftschicht dringenden, mithin ungeschwächten, Sonnenstrahlen eine höhere Wärme erzeugen, welcher die in der Nacht folgende gröſsere Kälte höchst nachtheilig entgegenwirkt. Endlich aber erhöhen die Winde, durch widerstehende Gegenstände in ihrer Bewegung nicht gehindert, die eben genannten Einflüsse. Zwischen den Gipfeln sehr hoher Berge sammeln sich auſserdem die Schnee- und Eismassen zu Gletschern, die Temperatur auf ihnen ist niedriger als in glei-

chen Höhen über Ebenen, und es senken sich daher die kalten Luftschichten von ihnen herab, die über sie hinströmenden Winde werden abgekühlt und beide Ursachen erniedrigen die Temperatur derjenigen Gegenden, in welche sie herabsinken.

7) Endlich ist wohl nicht zu verkennen, dafs noch *brennende Vulcane* die Beschaffenheit des Klima's einzelner Strecken bedingen. Die Herde derselben liegen zwar im Allgemeinen zu tief, als dafs die Oberfläche des Bodens durch das unterirdische Feuer erwärmt werden sollte, indem namentlich die Spitze des Aetna mit Schnee bedeckt ist und auf Island Rauch und Flamme zwischen Gletschern emporsteigen; oft aber werden eben auf letzterer Insel ungeheuere Eismassen durch die Hitze der Vulcane geschmolzen, die heifsen Quellen erwärmen bedeutende Strekken und die Luft überhaupt mufs in jenen Umgebungen nothwendig etwas erwärmt werden, den Einflufs der Dämpfe und Gasarten nicht gerechnet, welche aus den Kratern und Bergspalten dringen und sich in der Umgegend herabsenken.

In Gemäfsheit dieser hauptsächlichen, einzeln oder gemeinschaftlich wirkenden, Ursachen giebt es verschiedene eigends benannte Klimate. Berücksichtigt man einzig oder vorzugsweise die Temperatur, so hat man in dieser Hinsicht die ganze Erdoberfläche in 1000 Theile getheilt, deren 398 auf die Aequatorialzone kommen. Die Sonne geht, mit Ausnahme der äufsersten Grenzen, zweimal im Jahre durch das Zenith, und es giebt also auf gewisse Weise zwei Winter und zwei Sommer, die Tage dauern zwischen 10,5 und 13,5 Stunden, und die drükkende Hitze wird sehr durch die lange Dauer und in manchen Gegenden die bedeutende Kühle der Nächte gemildert. Die gemäfsigten Zonen von den Wendekreisen bis zu den Polarkreisen nehmen 520 Theile ein, deren Klima aber von dem heifsesten bis zu dem für Europäer unerträglichen abnimmt und daher nicht allgemein bezeichnet werden kann. Ein zunehmender unterscheidender Charakter sind die Jahreszeiten, welche in den südlichsten Gegenden als zwei, Sommer und Winter, anfangen, allmälig in vier übergehen und nahe am Polarkreise abermals wieder als zwei endigen. Kommt man in den übrigen Welttheilen über den 40sten, im westlichen Europa über den 50sten Breitengrad hinaus, so wachsen zunehmend die Unterschiede zwischen der Hitze des Sommers und der Kälte des Winters und nehmen weiter nach dem Pole hin wieder etwas ab. Die

beiden kalten Zonen enthalten nur 82 Theile und sind mit Ausnahme der Europäischen Länder und einiger Küstendistricte meistens mit ewigem Schnee und Eise bedeckt.

Wird aufser der Temperatur noch der Feuchtigkeitszustand berücksichtigt, so giebt es namentlich in den heifsen Gegenden ein feuchtes und ein trocknes Klima. Am auffallendsten sind die Districte wie Lima, Aegypten u. a., wo es gar nicht oder nur in sehr seltenen Ausnahmen regnet; im Allgemeinen aber haben die Aequatorialzonen bestimmt, und minder merklich auch die südlichern Gegenden der gemäfsigten Zonen, eine oder zwei Regenzeiten und eben so viele Perioden anhaltender Trocknifs. Auf allen Fall ist eine gewisse Periodicität beider überall, selbst auf den Inseln, wo sie zuweilen am wenigsten bemerkbar ist, nicht zu verkennen. Die Regenzeit macht gleichsam den Winter jener Gegenden aus und ist bei weitem am unangenehmsten. Die Hitze ist wegen gehemmter Ausdünstung dann noch unerträglicher, insbesondere an den oft eintretenden sonnigen Tagen; alle hygroskopischen Körper, als Holz, Elfenbein u. s. w., dehnen sich durch die atmosphärische Feuchtigkeit aus, das Eisen rostet, die Salze zerfliefsen, Fruchtkörner keimen, das Fleisch verdirbt in kurzer Zeit, Vegetation und Erzeugung der Insecten und Würmer sind ungeheuer. In der andern Jahreszeit, welche man auch Sommer nennen könnte, ist die Luft meistens heiter, selten wolkiger Himmel und die Temperatur auf Inseln und in gröfserer Erhebung über der Meeresfläche gemäfsigt, in den Sandwüsten Africa's dagegen ganz unerträglich. Daselbst herrscht unausstehliche Dürre, wodurch Gräser und Kräuter verdorren und nur einige Saftpflanzen, als Aloe, Cactus u. s. w., in manchen Districten aber auch nicht einmal diese, sich zu erhalten vermögen. Dort wehen die heifsen Winde, unter denen die Sandstürme wegen der Menge des fortgeführten Sandes am furchtbarsten sind, die Hitze verursacht Halsschmerzen, Bersten der Lippen und der Haut, Entzündung der Augen u. a. Die Dürre erreicht zuweilen einen solchen Grad, dafs Auflösungen von Alkali trocken werden.

In den gemäfsigten Zonen giebt es keine eigentliche Regenzeit, wohl aber lange anhaltende und starke periodische Regen. Kommt man weiter in höhere Breiten, so verschlimmert sich namentlich in Europa die sonst angenehme Frühlingswitterung, der kalte Winter geht durch eine kurze regnerische Periode bald

in einen ziemlich heifsen Sommer über, der Herbst dagegen wird länger dauernd, heiter und angenehm. In der nördlichen Polarzone giebt es nur den einförmigen, kalten, aber meistens heitern Winter, welcher im höchsten Norden einen unglaublichen Grad der Strenge erreicht, und wenige Monate, selbst nur wenige Wochen eines meist trüben, durch Nebel, Regen und Schnee höchst unangenehmen Sommers. Bei allen diesen Bestimmungen mufs aber wohl berücksichtigt werden, dafs das westliche Europa bis zum höchsten Norden rücksichtlich seiner Temperatur eine auffallende Ausnahme von den in andern gleichen Breiten gültigen Regeln macht, denn in einer nördlichen Breite von Spitzbergen an irgend einem andern Orte, als eben dort, zu überwintern ist wahrscheinlich für Menschen überhaupt, auf allen Fall für Europäer unmöglich.

Kommen zu diesen Hauptbedingungen noch einige der übrigen hinzu, namentlich der Einflufs der Umgebungen, so erhält man die hiernach eigends bezeichneten Klimate. Dahin gehört vorzüglich das *Continental-Klima,* wie es in überall weiter Entfernung von den Küsten der Oceane oder den Ufern gröfserer Binnenmeere gefunden wird, hauptsächlich im Innern von Africa, Asien, America, und selbst diesen etwas ähnlich im östlichen Europa. Als unterscheidenden Charakter trifft man daselbst einen auffallenden Unterschied zwischen der Wärme des Sommers und der Kälte des Winters, der Hitze am Tage und der auffallenden Abkühlung während der Nacht. Schon lange wufste man, dafs in Ungarn, Polen und dem südeuropäischen Rufslande die Sommer vorzüglich heifs, die Winter dagegen eben so ausgezeichnet kalt sind, indem namentlich in Dorpat die Temperatur zwischen 38° unter und 31°,5 über dem Gefrierpuncte der hunderttheiligen Skale wechselt[1]. In den innern nordamericanischen Provinzen stehen ein strenger Winter und ein heifser Sommer einander gegenüber, allein gleich auffallend oder noch auffallender zeigt sich dieses in Asien. Von der Wüste Gobi, der ausgedehntesten Hochebene im östlichen Asien, zwischen 32° bis 43° N.B., ist schon aus der Geschichte des berühmten Dschingis-Chan bekannt, dafs dort nach einer furchtbaren Winterkälte, gegen welche sich die Mongolen nur durch ihre Schafpelze zu schützen

1 S. Die Kaiserliche Universität zu Dorpat. Denkschrift der Jubelfeier. Dorp. 1827. Imp. Fol. S. 33.

wissen, mit dem Anfange Juni's ein Sommer eintritt, dessen Hitze sehr hoch steigt und der bis in den September dauert, in welcher Zeit dann auf sonnige und warme Tage eine so empfindliche Kälte der Nacht folgt, dafs das Wasser mit einer dicken Eisrinde überzogen wird[1]. In den Sandwüsten Sind, in Kabulistan und Beludschistan ist der Abstand zwischen der brennenden Hitze des Tages und der Kühle während der Nacht so unerträglich, dafs namentlich von dem Personale des Gesandten Elphinstone[2] in den ersten acht Tagen 40 Menschen starben. Am merkwürdigsten aber ist, dafs nach den neuesten Berichten der Reisenden im Innern von Africa jenseit der grofsen Wüste und fast unter dem Aequator bei Nacht eine empfindliche Kälte herrscht, indem namentlich der Reisende Dr. Oudney an der Grenze von Bornu unter 13° N. B. zu Ende Decembers in einer Höhe von nicht mehr als 1200 F. über der Meeresfläche vor Kälte umkam, als das Thermometer mindestens bis 7°,5 C. herabgesunken war[3].

Auffallend verschieden hiervon ist das *Insel- und Küsten-Klima*, insofern es sich durch eine mehr gleichbleibende Temperatur, durch einen häufigern Wechsel von Trockenheit und Regen und durch die meistens regelmäfsig wechselnden Land- und Seewinde, in höheren Breiten aber zugleich durch häufige Stürme, Wintergewitter und anhaltende starke Nebel auszeichnet. Die Ursache hiervon liegt in der grofsen Wärmecapacität des Wassers, welches durch die eindringenden Sonnenstrahlen keineswegs so schnell und stark erwärmt wird, als die feste Erdrinde, zugleich aber auch ungleich später erkaltet, hauptsächlich aber durch immerwährende Mischung der kalten Polargewässer und der wärmeren aus den heifsen Zonen eine mittlere mildere Temperatur bis zu hohen Breiten hinauf beibehält. Die über demselben abgekühlten Luftströmungen dringen bis zu beträchtlichen Entfernungen von den benachbarten Küsten und mildern den Einflufs der brennenden Sonnenstrahlen, namentlich in der äquatorischen Zone. Von der andern Seite aber hindern die über

1 C. Ritter's Erdkunde Th. I. S. 495.

2 S. Elphinstone's Geschichte der engl. Gesandtsch. an den Hof von Kabul. In Neue Bibl. d. Reis. Weimar 1817.

3 S. v. Humboldt in G. LXXXVII. 34. Weitere Untersuchungen hierüber s. Art. *Temperatur*.

demselben erwärmten und hauptsächlich mit Wasserdampf gesättigten Luftmassen die tiefe Erkaltung nördlicher Gegenden, indem die grofse specifische Wärmecapacität des Wassers um so wirksamer ist, je mehr Wärme hiernach im Sommer von demselben aufgenommen und im Winter wieder abgegeben wird. Rumford [1] hat dieses hauptsächlich erläutert und zugleich noch den Umstand berücksichtigt, dafs die Wassertheilchen der Oberfläche ihre Wärme an die berührende Luft abgeben, dadurch schwerer werden, herabsinken und wärmeren aufsteigenden Platz machen. Dieser Einflufs findet übrigens nur so lange statt, als das Wasser nicht mit einer Eisdecke belegt ist, und mufs daher namentlich in Beziehung auf die Winterkälte an den Küsten des Meeres stärker seyn, als an den Ufern grofser Süfswasserseen, und ist aufserdem am auffallendsten an den westlichen europäischen Küstenländern, wohin der Golphstrom die ungeheuern Massen des unter dem Aequator am stärksten erwärmten Wassers wälzt, weswegen auch schon oben [2] bemerkt worden ist, dafs jene ihr ungewöhnlich warmes Klima ohne Zweifel verlieren würden, wenn nach der Durchgrabung der Landenge von Panama jener riesenhafte Strom ganz aufhören oder mindestens sehr vermindert werden sollte.

Berge sind von bedeutendem Einflusse auf die klimatische Beschaffenheit der Oerter, hauptsächlich weil die auf ihnen angehäuften grofsen Eismassen und selbst ihre eigene überwiegende Kälte und grofse Feuchtigkeit die auf ihnen ruhenden und sie umgebenden Luftmassen abkühlen, zugleich auch, weil sie die Richtung und Stärke des Windes bedingen und auf die Regenmenge der benachbarten Gegenden einen nicht geringen Einflufs haben. Einzelne hervorragende Pic's geben daher nicht das eigentliche *Bergklima*, weil ihre Massen hierfür zu unkräftig sind, und ihr Einflufs erstreckt sich daher nicht viel weiter als auf die höhere Kälte, welche mit der gröfseren Erhebung über der Meeresfläche nothwendig verbunden ist. Grofse Gebirgsmassen dagegen, als die Alpen, die Pyrenäen, die Cordilleren, die Mondsberge, der Himlaya u. a., kühlen die Luft ab, welche sich dann in die Thäler und umgebenden Ebenen herabsenkt, wie z. B. die Hitze in Madrid durch die von den Pyrenäen kommenden

1 G. I. 445.

2 Vergl. Th. III. S. 1003.

Winde gemildert wird; auf ihnen sammelt sich das Wasser der Hydrometeore, welches dann den Quellen dauernde Nahrung giebt, die hierdurch gespeiseten Flüsse bringen verhältnifsmäfsig kälteres Wasser in die Ebenen und bedingen deren Fruchtbarkeit. Bei einigen Bergzügen ist es sehr auffallend, wie sehr sie gerade diejenigen Winde, welche Regenwolken herbeiführen, zurückhalten, so dafs letztere sich blofs an der einen Abdachung der Gebirge ihrer Feuchtigkeit entladen und zwei durch eine Bergkette getrennte Länderstrecken sich durch ungleiche Grade der Feuchtigkeit sehr unterscheiden. Endlich scheint es mir nicht zweifelhaft, wenn es gleich bisher nicht durch eigentliche Messungen hinlänglich constatirt ist, dafs die Menge des atmosphärischen Wassers, welche auf grofse Gebirgsmassen herabfällt, gröfser ist, als bei einem gleichen Flächeninhalte ebener Gegenden. Hieraus scheinen mir z. B. namentlich die häufigen und meistens plötzlichen Ueberschwemmungen der Donau erklärlich, welche den gröfsten Theil der von der nördlichen Abdachung der Alpen kommenden Flüsse, die Iller, den Lech, die Isar, den Inn, die Traun, die Ens, die Raab, die Drave und Save aufnimmt und durch deren plötzliche Anschwellungen zu keiner Jahreszeit, aufser im Winter, gegen verheerende Ueberschwemmungen gesichert ist, statt dafs dagegen der Rhein und die Weichsel, welche nach ihrem Ursprunge nicht so viele eigentliche Gebirgsflüsse aufnehmen, aufser dem Frühlingsschwellen eine weit constantere Höhe haben. Auf den Spitzen hoher Berge ist das Klima nicht anders, als die Höhe über der Meeresfläche und die hieraus folgende gröfsere Kälte mit sich bringt, dagegen zeigen die *Hochebenen* durch ihre klimatische Beschaffenheit nicht blofs den Einflufs der gröfseren Höhe, sondern die beim Durchgange durch die dünneren Luftschichten ungeschwächten Sonnenstrahlen bewirken daselbst eine gröfsere Wärme, welche mit stärkerer Kälte während der Nacht wechselt, und aufserdem erreichen die schwereren Regenwolken jene Höhe nicht; die Berge sind daher nicht blofs Wetterscheiden, wie denn noch namentlich im Sommer 1828 in Italien die auffallendste Dürre, in Deutschland anhaltendes Regenwetter herrschte, sondern zuweilen ist auf den hohen Bergebenen heiteres Wetter, wenn im tiefern Lande eine Menge Regen fällt.

Das *Thalklima* ist auf allen Fall ein eigenthümliches. In heifsen Gegenden unterscheiden sich die Thäler durch eine grö-

ſsere Kühle in Folge der kalten Luftströmungen, die von den Spitzen der begrenzenden Berge in sie herabsinken; die über waldige Bergrücken hin bewegte Luft ist milder, in den Thälern sammelt sich die Feuchtigkeit der Quellen, meistens werden sie von Bächen oder Flüssen durchströmt, welche Fruchtbarkeit erzeugen, und sie eignen sich daher vorzugsweise zum Aufenthalte der Menschen und Thiere, weswegen man in eigentlichen Berggegenden die Thäler fast allein bewohnt findet. Unter niederen Breiten, bei dem höhern Stande der Sonne, ist die Lage der Thäler gegen die Weltgegenden von gar keiner oder nur geringer Bedeutung, der Einfluſs hiervon wächst aber mit zunehmender Polhöhe; unter mittleren und etwas darüber hinausgehenden Breiten ist derselbe daher schon so merklich, daſs auf der nördlichen Halbkugel die südlich gerichteten Thäler warm und höchst fruchtbar, die nach Norden liegenden dagegen kalt und unfruchtbar sind; in Norwegen namentlich reifen in sonnigen und gegen den Einfluſs der Winde gänzlich geschützten Thälern feinere Obstsorten, wo an der Nordseite selbst die Cerealien nicht fortkommen. In den Thälern sind die Extreme der Temperaturen bei weitem nicht so groſs, als in den dicht unter ihnen liegenden Ebenen, weil sie durch Schatten und belaubte Umgebungen gegen die grelle Hitze, durch die einschlieſsenden Berge aber wieder gegen den Einfluſs der kalten Winde geschützt sind. Zugleich aber ist das Thalklima im Allgemeinen ein unbeständiges, insofern sich in den Thälern leicht die kälteren Luftmassen von den Bergspitzen und die wärmeren aus den Ebenen mischen und hierdurch unmittelbar wässerige Niederschläge erzeugen, oder die Gewitter, welche vorzugsweise an den Spitzen hoher Berge gebildet werden, in sie herabsinken. Werden einige Theile derselben durch die Sonnenstrahlen vorzugsweise erwärmt, so daſs die leichtere Luft daselbst aufsteigt, so erzeugt dieses eigenthümliche Winde, welche zuweilen täglich, zuweilen in längeren Perioden regelmäſsig wechseln und nicht selten mit bedeutender Stärke, ohne Rücksicht auf die übrige allgemeine Luftströmung, wehen. Auch ohne diese speciellen Bedingungen sind die Thäler in gewissem Sinne Windfänge, weswegen auch nach ihrer Richtung und der Lage der sie einschlieſsenden Berge gewisse Winde einzig oder vorherrschend, meistens aber unausgesetzt, in ihnen angetroffen werden. Endlich lagern sich in den Thälern gern die Nebel und machen

daher namentlich die unter mittleren und höheren Breiten liegenden, hauptsächlich zur Zeit des herannahenden Winters, leicht feucht und trübe.

Sowohl die oben angegebenen Bedingungen, als auch die Wirkungen derselben zur Erzeugung der genannten individuellen Klimate kommen in der Erfahrung mit gröfserer oder geringerer Schärfe der Anwendung vor. Indem es aber unmöglich ist, die speciellen klimatischen Verschiedenheiten aller einzelnen Theile der Erde und selbst einzelner Orte namhaft zu machen, wird es genügen, einige der kenntlichsten aus verschiedenen Welttheilen und von unterscheidendem Charakter etwas näher zu beschreiben.

Das Klima im Innern von Africa ist so gut als gar nicht bekannt, und fast eben so die Westküste dieses Welttheils, weil ihrer Unwirthbarkeit wegen nur selten Europäer sich an derselben zur See oder zu Lande aufhalten. Vor nicht langer Zeit hat indefs der Capitain Markwood Kelly über ein Jahr lang dort die Witterung in den Busen und am Ufer des Meeres beobachtet und macht davon im Wesentlichen folgende Beschreibung[1]. In der Gegend zwischen 5° N. B. bis zum Aequator unterscheidet man die Zeit der *Tornado's*, die regnerische, die neblige, die zweite regnerische und die schöne Jahreszeit. Von der Sierra Leona bis Cap Apollonia fangen die Tornado's in der Mitte April an und dauern bis Mitte Juni. Selten gehen dann zwei Tage ohne die furchtbarsten Gewitter hin. Die Menge des in einer Stunde fallenden Regens ist unglaublich; es folgt heiterer Himmel, und die Nässe verschwindet augenblicklich wieder. Die Heftigkeit der Tornado's übersteigt alle Vorstellung, sie sind höchst gefährlich für die Schiffe und würden alle Cultur am Lande zerstören, wenn der Boden bebauet wäre. Sie zeigen sich zuerst als dunkler Wolkenrand am östlichen Horizonte, welcher zuweilen ein bis zwei Stunden wächst, ehe die Wolke selbst sich mit Blitzen und entferntem Donner in Bewegung setzt. Bald nachher erhebt sie sich höher, steht vorher nochmals still, bewegt sich dann unter furchtbarem Donnern und Blitzen bis ins Zenith, wobei eine plötzliche Kälte gefühlt wird, und entladet sich mit einem alle Vorstellung übersteigenden Sturmwinde und Regen in etwa einer halben Stunde, worauf es wieder heiter

1 Ann. of Phil. 1823. Mai. p. 360.

wird. Die Schiffe müssen alle Vorkehrungen treffen, wenn sie durch den wüthenden Sturm nicht umgestürzt werden sollen. Während seiner Dauer verkriecht sich jedes lebende Wesen, aber nach dem Ende desselben ist der Himmel heiter und das Wetter lieblich.

Gegen die Mitte des Juni fängt die *Regenzeit* an und dauert bis Anfang November oder wohl noch länger, indem eine Periode ihrer Unterbrechung, eben wie das Ende, durch dicken Nebel bezeichnet ist. In dieser Zeit herrschen die dort so gefährlichen intermittirenden Fieber. Der Nebel vergeht erst im Anfange oder in der Mitte des Decembers und dann beginnt der trockne Wind, der Harmattan, welcher bis zum Wiederanfange der Tornado's wehet. Man kann dieses die schöne Jahreszeit nennen. Die Hitze ist mäfsig und übersteigt auf der See in der Nähe der Küste selten 25° C.

Auf der Goldküste, welche etwas höher liegt, fangen die Tornado's schon im März an und endigen im Mai, sind aber weniger heftig. Auf diese folgen die Regen und dauern von Mitte Mai an sechs Wochen, während welcher Zeit die intermittirenden Fieber, aber minder heftig, herrschen. Die Nebel, welche Anfangs Juli beginnen, dauern bis August, worauf die schöne Jahreszeit folgt, bis in der Mitte Septembers die zweite Regenzeit beginnt, welche weniger nafs ist und vom Ende Octobers an der schönen Jahreszeit und dem Wehen des Harmattan weicht, bis die Tornado's wieder anfangen. Die ganze Gegend hat keine Brunnen, weil das Wasser im Sande versiegt, und die Einwohner müssen sich daher mit Cisternen behelfen. Die Gegend von Cap St. Paul bis zum Flusse Ramos, um Benin, hat gleiches Klima, als die Goldküste, ausgenommen, dafs die zweite Regenzeit im September mit weit heftigern Tornado's anfängt.

Die Gegenden America's unter der Linie unterscheiden sich sehr von denjenigen, welche in Africa einer gleichen Polhöhe und der etwas nördlicheren zugehören. Statt dafs in den letzteren aufser der Regenzeit eine verzehrende Dürre herrscht, giebt es zwar in den ersteren gleichfalls einige Districte, welche gegen das Ende der trocknen Jahreszeit entlaubt werden und wo die Vegetation aus Mangel an Wasser fast gänzlich erstirbt, allein ganz eigentliche, völlig verödete Sandwüsten sind dennoch daselbst nur ausnahmsweise und von verhältnifsmäfsig ge-

ringer Ausdehnung vorhanden. Aus dieser Ursache fehlen auch daselbst die Sandstürme und die dem Harmattan oder Samum ähnlichen Winde; vielmehr ist das Klima im Allgemeinen feucht, die Temperatur sehr gleichbleibend und im Ganzen milde. Die Ursache hiervon liegt darin, daſs die herrschenden Ostwinde über dem Atlantischen Oceane abgekühlt und feucht werden, Westwinde aber wegen der hohen Gebirge nicht in die flacheren Küstengegenden gelangen können. Eben diese hohen, auf ihren Gipfeln stets mit Eis bedeckten Berge sind aber die Ursache, daſs die Riesenströme, namentlich der Orinoko und der Amazonenfluſs, so ungeheure Massen von Wasser in den Ocean wälzen, die von ihnen ausgehende Verdunstung erhält die Luft feucht, und da auſserdem daselbst unermeſsliche Strecken mit Urwäldern bedeckt sind, so läſst sich die klimatische Beschaffenheit jener Gegenden aus diesen Gründen sehr leicht erklären[1].

Die Abwesenheit des Winters und statt dessen ein Wechsel der Regenzeit mit einer periodischen Trockniſs ist allgemein in den Gegenden innerhalb 10 Breitengraden vom Aequator, erstreckt sich indeſs minder kenntlich noch weiter nach beiden Seiten und fällt nicht überall in dieselbe Zeit, vielmehr sind beide auf den verschiedenen Halbkugeln einander entgegengesetzt. Auf Java fängt die Regenzeit im October an, wird anhaltender im November und December und hört allmälig bis zum März ganz auf. Beim Uebergange aus einer Zeit in die andere ist das Wetter am unbeständigsten, die stärksten Regen fallen im December und Januar, am trockensten ist es im Juni und Juli, und dann sind die Tage am heiſsesten, die Nächte am kältesten. Indeſs giebt es auch dann oft, und auf den Gebirgen fast täglich, Gewitter, so wie in der Regenzeit die ununterbrochenen Regenschauer selten länger als zwei Tage anhalten, wobei aber das Wasser wie in Strömen vom Himmel fällt. Hierdurch unterscheidet sich Java vom Indischen Continente. Die Wärme ist im Mittel 21°,1 bis 23°,3 C. am Morgen und 28°,3 am Nachmittage, steigt indeſs ausnahmsweise auch bis 30°,6 und 32°,2. Zugleich ist der Einfluſs der Seewinde und der groſsen Feuchtigkeit bei diesem Inselklima sehr begreiflich[2].

1 Vergl. Dr. Williamson in Trans. of the Amer. Soc. T. I. p. 272, hauptsächlich aber v. Humboldt in seinen Reisen. D. Ueb. Th. I, II u. III. a. v. O.

2 Raffles History of Java. T. I. p. 30.

Das *Küstenklima* auf dem Vorgebirge der guten Hoffnung ist bereits lange durch die Beschreibung des La Caille bekannt und diese stimmt mit späteren Angaben genau überein. Jener Astronom war vorzüglich veranlaſst, dasselbe zu beachten, welches auch vom Mai 1751 bis Februar 1752 geschah. Die Temperatur daselbst ist sehr gemäſsigt, allein am unangenehmsten sind die so häufigen heftigen Südostwinde, welche vier Zehntheile des Jahres herrschen. Oft gehen dieselben in eigentliche Stürme über, welche die Dünen am Ufer des Meeres versetzen und groſse Massen Sand fortführen. Sie hindern die Bäume am Wachsen und zerbrechen sie nicht selten, stürzen Mauern um, bringen die Schiffe in der Bucht in Gefahr und erfordern eigene Vorrichtungen zum Schutze der Häuser und Gärten. Daneben herrschen dort viele und dichte Nebel, welche nicht bloſs auf der See gelagert sind, sondern auch auf dem Lande, so daſs nur ein Drittheil des Jahres eigentlich heiter ist[1]. Inzwischen ist dieses Klima der Capstadt und der Küste, worauf sie liegt, nur ein sehr specielles und kann nicht als das eigentliche von Südafrica betrachtet werden. Letzteres wurde mit gröſserer Allgemeinheit untersucht durch Dr. Knox[2] vermittelst meteorologischer Register zu Graaf Reynet unter 32° 11′ S. B. und 135 engl. Meilen vom Meere, bis wohin eine weite Ebene ausgedehnt ist. Die Kälte erreichte im ganzen Jahre den Gefrierpunct des Wassers nicht, die Wärme stieg aber einmal im Februar auf 38° C. bei einem ganzjährigen Mittel von 16°,77 C. Anhaltende Dürre wird auf der ganzen Colonie leicht nachtheilig und die Regen verbreiten sich meistens nur über einzelne Districte. Die verheerenden Südostwinde der Capstadt findet man dort nicht und im Allgemeinen ist das Klima sowohl angenehm als der Gesundheit zuträglich.

Diesem Klima correspondirt das von Buenos-Aires, gleichfalls eines Küstenlandes unter 34° 35′ 26″ S. B., bis nach Assumption in Paraguay, mehr landeinwärts unter 25° 16′ 40″. In letzterer Stadt steigt das Thermometer im Sommer nicht selten auf 30° C., erreicht aber wohl 38°, sinkt dagegen im Winter einigemale auf den Gefrierpunct. Die nördlichen Winde sind daselbst warm, die südlichen kalt; Westwinde giebt es wegen der

1 G. LXVI. 136.

2 Edinb. Phil. Journ. N. X. p. 279.

ihrer grofsen Entfernung ungeachtet schützenden Berge gar nicht. Die herrschenden Winde sind Ost- und Nordwinde. Stürme sind an beiden Orten selten, dann aber zuweilen sehr verheerend. Die Feuchtigkeit ist in jenem ganzen Striche ungemein grofs, Nebel sind selten, Gewitter häufig und gefährlich; ein einziges im Januar 1793 schlug in Buenos-Aires 37mal ein und tödtete 19 Personen[1].

Eine klimatische Eigenthümlichkeit nördlicher Küstenländer ist diese, dafs daselbst die Gewitter im Winter nicht blofs häufiger, sondern fast ausschliefslich vorkommen. Von der Norwegischen Küste, Island und den Faröer-Inseln ist dieses schon früher[2] nebst den Ursachen angegeben worden, welche dieselben erzeugen, allein die Sache ist ganz allgemein, denn auch auf den Shetländischen Inseln gehören die Gewitter der Regel nach den Winterstürmen zu, jedoch sollen sie im Allgemeinen dort selten seyn, denn Scott[3] hörte daselbst nur einmal in einem ganzen Jahre Donner. Auf Kamtschatka und den aleutischen Inseln giebt es nur als seltene Ausnahmen Gewitter im Sommer, indem sie daselbst nach Langsdorf[4] gleichfalls fast ausschliefslich dem Winter angehören, anderer Zeugnisse nicht zu gedenken, aus denen die Sache als Regel hervorgeht.

Unter die schönsten Klimate, die sehr angenehmen, fruchtbaren und gesunden, gehören die der Inseln des grofsen Oceans, wenn die Hitze der heifsen Zone durch die Seewinde gemildert wird und der Regen die üppige Vegetation unterhält. Dahin rechnet v. Krusenstern[5] unter andern das der Washington's-Inseln, wo die Temperatur fast stets gleichbleibend die des Sommers unter mittleren Breiten ist. Marchand giebt z. B. den Stand des Thermometers auf St. Christina zu 33°,75 an, v. Krusenstern aber fand in Port Anna Maria fast beständig 28°,5 bis 30° C. und als gröfste Hitze nur 34° C., dabei die Menschen gesund und die Fruchtbarkeit ausgezeichnet, wenn der Regen nicht fehlte, welcher indefs zuweilen 10 Monate ausbleibt.

1 Voyages dans l'Amérique méridionale par Don Felix de Azara, etc. Par. 1809. IV Tom. T. I. chap. 1.

2 Art. *Gewitter.* Th. IV. S. 1387.

3 Edinb. Phil. Journ. N. Ser. N. V. p. 120.

4 S. dessen Reisen Th. II.

5 Dessen Reisen Th. I. S. 163.

Auf den Sandwich-Inseln fand Cook[1] gleichfalls die Temperatur ungleich milder, als auf den Westindischen, auch ist der Regen dort häufiger. Nach den Beobachtungen, welche W. Ellis[2] daselbst vom August 1821 bis Juli 1822 anstellte, war die höchste Temperatur = 31°,1 C., die niedrigste = 15°, die mittlere = 23°,9. Hierzu waren dort nur 40 Regentage und übrigens heiterer Himmel; dennoch soll nach ihm das Klima ungesund und für Europäer zu sehr schwächend seyn.

Unter die merkwürdigen *Inselklimate* gehört das von St. Helena unter 16° S. B. Die hohen Bergspitzen daselbst sind fast allezeit in den Wolken, der Boden ist stets feucht, höchst fruchtbar und die Temperatur kühl. Dabei ist es merkwürdig, daſs dort stets Südostwind herrscht, und gerade dann am heftigsten, wenn auf dem genau in Südost liegenden Cap die Nordwestwinde am heftigsten wehen[3]. Auf den canarischen Inseln, deren Klima durch L. v. Buch[4] genau beschrieben worden ist, zeigt sich der Unterschied von dem tropischen darin, daſs kein zweifacher Wechsel der Jahreszeiten herrscht, vielmehr fällt in Folge der Abkühlung durch das Meer die gröſste Hitze in den August und erreicht meistens 26°,05 C., die geringste in den Januar = 17°,7 und das Mittel des ganzen Jahres beträgt 21°,64. Auſserdem haben dieselben keine Spur von eigentlichen tropischen Regen, auch fängt die durch Abkühlung des Wasserdampfes bedingte Regenzeit dort erst im November an und dauert nicht über den März hinaus, statt daſs man sie in Italien von der ersten Hälfte Octobers bis in den April datiren kann. Im Sommer dagegen gleicht das Klima völlig dem tropischen durch die anhaltende Dauer des nordöstlichen Passatwindes, welcher so anhaltend wehet, daſs man von Teneriffa nach Ferro in einem Tage kommt, zurück aber leicht vier oder fünf Wochen bedarf. Zugleich werden dort die oberen entgegengesetzten Luftströmungen auf eine interessante Weise kenntlich, indem alle Beobachter ohne Ausnahme auf der Spitze des Pic's Westwind antrafen. Aus diesen beständig über einander hinstreichenden entgegengesetzten Luft-

1 G. XXXV. 233.

2 Kastner Archiv XII. S. 369.

3 Lichtenstein Reisen II. S. 594.

4 Berlin. Denkschriften 1820 u. 21. S. 108. Umständlicher in dessen: Physicalische Beschreibung der canarischen Inseln. Berlin 1825. gr. 4. S. 63 ff. Vergl. Ann. Chim. et Phys. T. XXII.

strömungen leitet v. Buch den ungewöhnlich hohen Barometerstand auf jenen Inseln ab, welcher auf 0° T. und den Spiegel des Meeres reducirt 339,09 par. Lin. beträgt. Ferner scheinen jene Westwinde schon über dem atlantischen Oceane sich herabzusenken und den andringenden Nordwinden den Zugang zu versperren, woraus die auffallende Eigenthümlichkeit erklärlich wird, dafs zu Las Palmas auf Gran Canaria die gröfste mittlere Wärme nicht in den Juli oder August, sondern in die Mitte des Octobers fällt, indem sie vom Ende des Septembers an plötzlich steigt und vom Ende Octobers an noch schneller wieder abnimmt, so dafs die mittleren Temperaturen des Decembers und Januars nur wenig von einander abweichen. Eben daher gedeihen die Dattelpalmen daselbst ganz vortrefflich, wovon der Ort seinen Namen hat. Die Thatsache dieser ausgezeichneten klimatischen Beschaffenheit jenes Ortes ist wohl nicht streitig, der Zulässigkeit der Erklärung steht aber der Umstand entgegen, dafs eine so allgemeine Ursache ihre Wirkungen auf allen canarischen Inseln äufsern müfste. Ein Herabsinken dieser westlichen Luftströmungen ersieht man übrigens deutlich aus den Wolken, welche im October die Spitze des Pic, von Süden her, einhüllen, sich immer tiefer senken, endlich sich auf den etwas über 6000 F. hohen Kamm des Gebirges zwischen Orotava und der südlichen Küste lagern, wo sie in furchtbaren Gewittern ausbrechen, und erst nach einer Woche etwa an der Meeresküste empfunden werden, wo dann Monate lang Regen herrschen, während der Pic mit Schnee bedeckt wird.

Auf Madeira unter 32° 36′ N. B. ist der *Sirocco* nicht alle Jahre gleich anhaltend, allein wenn er herrscht, so ist er von der stärksten Trockenheit begleitet und kein Wölkchen am Himmel zu sehen, obgleich er direct von der africanischen Küste kommend 300 engl. Meilen über das Meer zurücklegt. Seine Richtung ist aus OSO. und er erregt eine Empfindung, wie ein Strom heifser Luft aus einem Ofen, trocknet unglaublich aus, ist höchst beschwerlich, ohne selbst bei denen, welche sich ihm aussetzen, der Gesundheit eigentlich nachtheilig zu seyn. Im vollkommenen Schatten steigt die Hitze bei ihm nicht höher als 30° C. Die Regenmengen daselbst sind sehr ungleich und wechseln zwischen wirklich gemessenen 43,35 und 20,43 Zollen, weswegen einige 40 Z., andere 30 Z. als Mittelzahl annehmen. Die Herbstregen fangen meistens im September an

und endigen im December, wobei mehr einzelne Schauer gebildet werden, als dafs der Regen ganze Tage anhaltend seyn sollte. Die Winterregen im Januar und Februar sind dagegen eigentlich periodisch. Im März und April kommen abwechselnd einzelne Schauer, Mai hat wenige derselben, Juni, Juli, August und Anfang Septembers sind aber die eigentlichen trocknen Monate, wo selten nur ein Tropfen Regen fällt, aufser auf den Bergspitzen, wo es stark thauet, und oft regnet, wenn es in ebenen Gegenden trocken ist. Ueberhaupt kann das Resultat der Beobachtungen an irgend einem gegebenen Orte nicht als Regel für die ganze Insel angenommen werden. Die wechselnden See- und Landwinde sind fast das ganze Jahr regelmäfsig, aufserdem ist die Richtung des Windes sehr beständig und er wehet zuweilen Monate lang unausgesetzt aus Nord, Nordost und Ost, wobei heiteres Wetter herrscht. Der Ost-Süd-Ost-Wind ist der Sirocco; geht er ganz nach Süden oder Westen, so folgt drückende Wärme und anhaltender Regen. Der Nordwestwind bringt Kälte und auf den Bergen zuweilen Schnee. Gewitter mit Blitz und Donner sind im Ganzen selten. Die Temperatur geht in Funchal nicht leicht unter 10° C. und übersteigt eben so selten 28° C., ist also im Ganzen sehr gleichmäfsig[1].

Am bekanntesten wegen des unterscheidenden Charakters seines Inselklima's ist Grofsbritannien, weil Beobachtungen der Witterung und Vergleichung derselben mit denen an andern Orten des europäischen Continentes am häufigsten sind. Die Städte Berlin, Amsterdam und London liegen fast unter gleichen Graden N. B. und ohngefähr zwei Grade nördlicher als Charkow, aber die klimatische Beschaffenheit dieser Oerter ist ausnehmend verschieden. Die letztere Stadt hat kältere Winter als Berlin, dieses kältere als Amsterdam, und in London genügen Camine zum Erwärmen der Zimmer, auch kommen in England die Schafe den ganzen Winter hindurch nicht aus dem Freien. Dagegen ist die Sommerhitze daselbst gemäfsigter und steigt in der Regel nur auf kaum 27° C., indem die Winterkälte nur etwa — 7° C. erreicht, statt dafs in Charkow 30° C. über und fast eben so viel unter dem Gefrierpuncte nicht als etwas Ungewöhnliches anzusehen ist. In Manheim sind die Winter strenger als

1 S. Heineken in Philos. Magaz. and Ann. of Phil. Vol. II. N. 11. p. 362.

an der Seeküste, aber schon im März geht die Wärme daselbst über die in London hinaus [1]. Selbst das gebirgige Schottland hat nur gelinde Winter.

Die insularische Beschaffenheit ist indeſs nicht allezeit im Stande, die anderweitigen klimatischen Bedingungen zu überwinden. Ein redendes Beispiel hiervon giebt die Insel Terre-Neuve, welche sich an der nordamericanischen Küste von 47 bis 51° N. B. erstreckt, also nicht einmal die Polhöhe von London erreicht, und dennoch 6 bis 7 Monate anhaltend mit beständigem Schnee bedeckt ist [2], so daſs, nach den dort wachsenden Pflanzen zu schlieſsen, die mittlere jährliche Wärme 1°,4 bis 3° R. nicht übersteigt. De la Pilaye beobachtete daselbst im Winter — 18° R., im Sommer 1816 stieg aber die Wärme nie über 18° R., auſser in Thälern, worin die Sonnenstrahlen concentrirt wurden. In andern Jahren erreichte sie indeſs meistens 20 bis 22° R., ja wohl noch mehr. Hiernach gleicht also das Klima mehr einem continentalen, als einem insularischen. Am nördlichen Theile der Insel wurde 1816 nur einmal ein Gewitter beobachtet, statt deren die Nordlichter sich dort sehr häufig zeigen, am südlichen Ende aber sind die Gewitter nicht selten. Am 15. Febr. 1820 erlebte De la Pilaye daselbst ganz unerwartet ein Gewitter, welches auf plötzlich eintretendes gelinderes Wetter folgte und mit starkem Nebel verbunden war. Stürme von groſser Heftigkeit sind dort nicht ungewöhnlich, insbesondere zur Zeit der Herbst-Nachtgleichen; im Sommer dagegen bringen die vom americanischen Continente herkommenden Südwestwinde die gröſste Wärme. Eigentlicher warmer Sommer fängt erst mit dem Juli an und dauert bis zum 10. September, der October bildet den Herbst und der Anfang Novembers giebt mit Frost und bleibendem Schnee einen schnellen Uebergang zum Winter. Auch früher tritt zuweilen plötzliche Kälte ein, z. B. am 25. August 1816, an welchem Tage der Boden mit Reif bedeckt wurde und die Seen auf kurze Zeit gefroren, was sich aus der Wirkung kalter nördlicher Luftströmungen erklären läſst. Das Aufthauen des Winterschnees be-

1 Vergl. Brandes Beiträge zur Witterungskunde S. 24. Rees Cyclopaedia cet. Art. Climate. T. VIII. Ueber das Klima in London s. The Climate of London. By L. Howard. In two Vol. Lond. 1818. 8.

2 Mém. de la Soc. Linnéenne de Paris. T. IV. p. 443.

ginnt im April, wird aber erst im Juni vollständig, weil derselbe bei trockner Luft durch Verdunstung schwindet. Der Schnee fällt meistens in feinen Nadeln, ist staubartig und wird durch den Wind stark fortgetrieben, ja selbst durch die Fugen der hölzernen Häuser gejagt. In den Sommernächten ist es angenehm warm, aber die Insecten sind sehr beschwerlich. Aufserdem hat die Insel oft dicke Nebel, welche vom Oceane herkommen und im Mai und October sehr häufig sind, wogegen die Heiterkeit des Himmels in den Sommermonaten selten durch Regen unterbrochen wird. Viele von diesen klimatischen Erscheinungen werden dadurch erklärlich, dafs das Meer um die Insel wegen der Strömungen aus dem Polarmeere stets sehr kalt ist. Es findet dieses in einem so auffallenden Grade statt, dafs das Baden in der See dadurch unmöglich wird und nur an solchen Orten geschehen kann, wo das wärmere Wasser aus den Flüssen die Temperatur des Meerwassers mildert.

Als ein Beispiel des Klima's hoher Bergebenen (*Plateaux*) dient insbesondere das der Hochebene von Quito, welche 8000 F. über der Meeresfläche weit ausgedehnt liegt und wo deswegen Frostkälte unter dem Aequator eintritt. Diese Kälte dauert vom Mai bis zum November und die Früchte erlangen die letzte Reife durch den Frost am hellen Tage im Mai. Die gröfste Kälte dort ist etwa — 3° C. und die Temperatur oft so gleichbleibend, dafs das Thermometer wohl 10 bis 20 Tage stets 0° zeigt. Die Wetterveränderungen daselbst sollen nach Don Ulloa von den Südwinden abhängen. Sind diese nur mäfsig stark, so treiben sie die Wolken gegen die Erhebung, und im flacheren Lande ist Regen oder Nebel, wenn oben heiterer Sonnenschein herrscht; wehen aber jene Winde stärker, so treiben sie die Wolken bis auf die Hochebene und dort entsteht Regen[1].

Nicht selten sind die Klimate zweier sehr nahe gelegenen Gegenden sehr von einander verschieden, nicht sowohl wegen ungleicher Höhe über der Meeresfläche, welches unter die bekannten und nothwendigen Bedingungen gehört, als vielmehr, weil benachbarte Berge einen Schutz gegen die Winde geben und somit den Einflufs von diesen aufheben. Am bekanntesten in dieser Hinsicht ist die schon erwähnte Nord- und Südseite der Gebirgszüge, aber ein anderes sehr auffallendes Beispiel giebt

1 Vergl. v. Humboldt Reis. Th. I. S. 338. u. a. a. O.

der südliche Theil des Mahratten-Staates zwischen 14° 20′ und 16° 26′ N. B., wo also der Einfluſs der nördlichen oder südlichen Abdachung ganz wegfällt. Von diesem kleinen Tractus hat nach Christie's[1] Beobachtungen der westliche Theil ein äuſserst feuchtes, der östliche dagegen ein eben so trocknes Klima, indem dort nicht selten in einem Monate so viel Regen fällt, als hier im Mittel das ganze Jahr, nämlich 20 bis 26 engl. Zolle. Allgemein darf man annehmen, daſs zu Darwar, wie im übrigen Indien, der Wind von Mitte April bis Mitte October südwestlich, in der andern Hälfte des Jahres nordöstlich ist, in beiden Nachtgleichen aber veränderlich. Im April und Mai sind dort häufige Gewitter, aber die periodischen Regen fallen erst in den Juni und Juli; der Wind ist dann westlich, aber nach 3 Uhr Nachmittags sammeln sich die dichtesten Wolken im Osten, welche endlich unter heftigem Donnern und Blitzen gegen den westlichen Wind anrücken, bis dieser sich plötzlich umsetzt und starken Regen, oft mit Hagel, bringt. So dauert es auf gleiche Weise einige Tage, bis der Südwestwind anhaltend wird. Es fällt dort zwar ziemlich viel Regen, aber ungleich weniger als an der westlichen Küste, auch geben die von den 2500 F. hohen waldigen Gauts-Gebirgen wehenden Winde jenen Gegenden bei der groſsen Sommerhitze allezeit einige angenehme Kühlung, welche der westlichen Küste fehlt, wo hauptsächlich die Regen eben so stark als anhaltend sind.

Von dem bedeutendsten Einflusse auf das Klima sind *groſse Waldungen,* hauptsächlich insofern sie in heiſsen Gegenden die Feuchtigkeit der Atmosphäre anziehen, die vorhandene länger zurückhalten und sowohl hierdurch als auch durch Mäſsigung der durch die Sonnenstrahlen erzeugten Wärme eine sehr auffallende Kühlung hervorbringen. Man sieht dieses sehr deutlich auf den Cap-Verdischen Inseln und auf Barbados, wo wegen zu starker Ausrottung der Urwälder zuweilen in drei Jahren kein Regen fällt, so daſs alles verdorret. Auf einigen Westindischen Inseln hat man daher Wälder aufs Neue anlegen müssen, auf andern ist es bei schwerer Strafe verboten, die in Wäldern zum Regen vorbehaltenen Länder (so nennt man sie) abzuholzen[2]. Durch die im americanischen Continente noch vorhandenen Ur-

1 Edinb. Phil. Journ. N. S. Nr. X. p. 298.

2 Forster Stoffe zum Nachdenken u. s. w. S. 14.

wälder ist jener Welttheil feucht und fruchtbar im Gegensatze gegen die sandigen Districte von Asien und Africa. MOREAU DE JONNES[1] zeigt, dafs die grofse Hitze und Trockenheit eines Theils von Persien, der Tartarei, selbst der Gegenden um Kabul und der Wüste Sind eine Folge der ausgerotteten Bäume sey, welche übrigens in der Umgebung bewohnter Oerter sehr gut gedeihen und daher keineswegs in Folge der Unfruchtbarkeit des Bôdens so gänzlich mangeln. Nach v. HUMBOLDT's Urtheile[2] würde America eine gleiche Veränderung erleiden, wenn es seine Wälder durch gänzliche Ausrottung verlöre. Hierdurch, sagt er, bereiten die Menschen unter allen Himmelsstrichen den kommenden Geschlechtern gleichzeitig eine doppelte Plage, Mangel an Brennstoff und an Wasser. Die Bäume verbreiten um sich eine kühlere, feuchte Atmosphäre und wirken auf den Reichthum der Quellen, indem sie den Boden gegen die unmittelbare Einwirkung der Sonnenstrahlen schützen. Die Zerstörung der Wälder, wie die europäischen Colonisten dieselbe in America allenthalben mit unvorsichtiger Eile vornehmen, hat die gänzliche Austrocknung oder wenigstens die Abnahme der Quellen zur Folge.

Eben dieses ist nach LICHTENSTEIN[3] der Fall auf der Südspitze von Africa. Dort gedeihen die Wälder nur, wo Feuchtigkeit ist, also in den Bergschluchten, in denen die Bäume wiederum den Boden gegen das Austrocknen schützen. Diesen Waldungen allein verdankt die ganze Südküste von Africa ihre Fruchtbarkeit, sie aushauen hiefse diese Gegenden für mehrere Jahrhunderte unbewohnbar machen. Mehr nördlich und in gröfserer Höhe über der Meeresfläche, am Orangerivier, fand LICHTENSTEIN[4] das Klima ganz anders, als das der südlichen Colonie. Im Winter herrscht daselbst eine trockne, frische Kälte bei meistens heiterer Luft. Nachts und vorzüglich bei Sonnenaufgang sinkt das Thermometer unter den Gefrierpunct, aber nie unter — 3° C., eine Stunde nach Sonnenaufgang aber ist der

1 Untersuchungen über die Veränderungen, die durch die Ausrottung der Wälder in dem physischen Zustand der Länder entstehen u. s. w. Uebers. von Wiedemann. Tübingen 1828. S. 151.

2 Reisen. Deutsche Ueb. III. 121. Vergl. dessen Essay Polit. sur la Nouv. Esp. I. 208.

3 Reisen. II. S. 217.

4 Ebend. II. S. 388.

Reif schon weggeschmolzen und um 10 Uhr ist es völliger Sommer. Mittags werden die Sonnenstrahlen lästig, doch ist es kühl im Schatten, denn es streicht ein stets gleichmäſsiger Südwind über die Fläche. Diese Witterung ist sehr beständig und ändert sich selten. Als Vorzeichen einer Aenderung weicht der Wind nach Westen und bleibt dann südwestlich, die Luft wird neblig, der Reif des Morgens ist dicker, es fällt bald Regen, bald Schnee, je nachdem der Wärmegrad der Tagszeit es mit sich bringt; oft bleibt es bloſs beim Nebel, das Wetter wird nach einiger Zeit wieder heiter und der zurückkehrende Südwind bringt die vorige Witterung wieder. Nur selten bleibt der Reif oder Schnee zwei Tage liegen. Im August und September wird es wieder wärmer, nördliche Winde fangen an zu herrschen, aber das Wetter bleibt trocken bis zu den heiſsen Monaten, wo der Frühling mit anfangenden Gewitterregen beginnt. Diese Gewitterregen folgen einander in Zwischenzeiten von zwei bis drei Tagen und erzeugen eine unglaubliche Vegetation. Kurz vor diesen Gewittern steigt die Hitze oft auf einen unerträglichen Grad, sinkt aber bald wieder, selbst wenn das Gewitter nicht eigentlich zum Ausbruche kommt, sondern wenn es nur wetterleuchtet. Die Herbstmonate (der südlichen Halbkugel) sind wieder trocken und die angenehmsten im ganzen Jahre.

Zwischen dem achten und zehnten Grade N. B. diesseit des Orinoko giebt es nach v. Humboldt [1] Districte, wo die Bäume im Januar und Februar ihr Laub verlieren und bei groſser Wärme das Bild einer Winterlandschaft darbieten. Die Ursache hiervon ist Mangel an Feuchtigkeit, weil jene Zeit von den periodischen Regen am weitesten absteht und nur die Pflanzen mit glänzenden, saftigen Blättern diesen Mangel an Wasser ertragen. Also schützt hier die Vegetation nicht gegen den Einfluſs allzulange anhaltender Dürre; die Ufer des Stromes erhalten indeſs ihre Umgegend feucht, welche sonach jene Erscheinung nicht zeigt.

Das Klima von Nordamerica ist wegen der groſsen dort herrschenden Kälte bekannt, wodurch die nördlichen Gegenden fast vom 50sten Breitengrade an für Europäer unbewohnbar werden. Es ist daher begreiflich, daſs die unter niedrigern Breiten

1 Reisen. D. Ueb. III. 55.

gelegenen Districte, welche hiernach dem Einflusse der Luftströmungen aus der äquatorischen Zone und aus den erstarrten nördlichen Gegenden unterworfen sind, häufige und starke Wechsel entgegengesetzter Temperaturen zeigen, mit Ausnahme der Küsten, welche zwar dem Einflusse des Meeres ausgesetzt, im Allgemeinen aber hauptsächlich unter höheren Breiten ungleich kälter sind, als die unter gleichen Breiten liegenden Küstenländer Europa's [1]. Nach der Beschreibung von Dunbar [2] ist z. B. in New-Orleans unter 31°,5 N. B. der Wind im Winter sehr veränderlich, der östliche bringt Regen, der westliche heiteres Wetter, und es wechseln stets wenige kalte, Regen und Schnee bringende, Tage mit eben so wenigen heitern. Der Frühling beginnt im Februar mit Südwinden, welche zugleich die übermäſsige Winterfeuchtigkeit entfernen. Während des Frühlings und Sommers herrschen meistens die zwischen S. O. und S. W. liegenden Winde, wobei die Hitze im Juni und der ersten Hälfte des Juli den höchsten Grad erreicht, bevor die erfrischenden Regen anfangen, welche bis in den Anfang des Septembers dauern. Hierauf folgt die äuſserst angenehme kühle Witterung des Octobers, welche sieben Wochen lang bei 18 bis 23 Graden C. anzuhalten pflegt, aber schon im November wird die Frostkälte der Nacht den Gewächsen gefährlich, und dieses um so mehr, je näher die Oerter den groſsen Waldungen liegen. Im Thale des Missisippi sind daneben die Herbstnebel unangenehm. Der Winter beginnt im December, aber südliche Winde können auch dann eine Wärme von 24° C. erzeugen, welche zuweilen anhaltend ist und schon im Januar grüne Erbsen giebt, statt daſs die Umänderung derselben in Nordwind einen strengen Winter herbeiführt, welcher alle frische Vegetation sogleich tödtet. Jene Gegenden zeichnen sich überdieſs noch durch die heftigen Winde aus. Bloſs Mai und October, die angenehmsten Monate im Jahre, sind ganz frei von Stürmen, alle übrige haben die mit Regen begleiteten von kürzerer Dauer (*Squalls*), welche meistens aus N. N. O. kommen, nur einige Minuten anhalten, dennoch aber Häuser und Bäume umwerfen. Ungleich furchtbarer aber sind die anhaltenden Orkane (*Oura-*

1 Weitere Untersuchungen hierüber s. Art. *Temperatur.*

2 Transact. of the American Soc. of Philad. T. VI. p. 1. Daraus in G. XXXI. 421.

gans) im August oder September, welche selten tiefer landeinwärts gehen, als bis New-Orleans, und meistens in der Richtung von Nord nach Süd oder aus Ost und Südost Strecken von einigen Meilen ganz verheeren, Häuser umwerfen, die Bäume der Waldungen mit den Wurzeln ausreifsen oder sie abbrechen, die Erndten fortführen und nicht blofs die Schiffe auf dem Missisippi umstürzen, sondern auch selbst das Wasser desselben aus seinem Bette treiben. Nicht selten ereignet es sich dabei, dafs nach einigen Stunden des Tobens dieser Orkane eine plötzliche schauerliche Windstille eintritt, einige Minuten anhält und dann der Sturm mit gleicher Heftigkeit in entgegengesetzter Richtung zu toben fortfährt. Noch einige Grade weiter nördlich, in Pensilvanien, gleicht das Klima vollständig dem im mittleren Deutschlande. Dr. Pöppig beobachtete in M'Conelsburgh unter 39° 53' N. B. und 78° 9' W. L. von London die gröfste Kälte = — 19°, die gröfste Wärme = 36° C. und eine Kälte von — 15° C. ist durchaus nicht ganz ungewöhnlich, hält aber nie länger als drei Tage an [1].

Die klimatische Beschaffenheit hoch nördlicher Gegenden ist so einfach, dafs sich aufser der Angabe der Temperatur wenig darüber sagen läfst, und zugleich sind Beobachtungen in denselben selten, indem erst der Forschungsgeist der neueren Zeit diese Kenntnisse erweitert hat. Ueber Lappland, wo noch die meiste Veränderlichkeit wegen der unverhältnifsmäfsig hohen Temperatur herrscht, haben L. von Buch, Vargas Bedemar und Wahlenberg übereinstimmende Nachrichten mitgetheilt. Nach dem Letzteren [2] ist der Gang der Witterung nach den Jahreszeiten im hohen Lappland, namentlich in Enontekis, in der Regel folgender. In der Mitte Septembers wird das Laub der Birke gelb und fällt ab. Mit dem Anfange des Octobers gefriert die Erde, die Seen werden mit Eis überzogen, es fällt Schnee, dann Regen, aber selten so viel, als erforderlich wäre, den früher gefallenen Schnee wieder zu schmelzen. Während des Winters schmelzt der Schnee nie, weswegen die kleinen Flüsse vertrocknen. Beides, das Schmelzen des Schnees und das Fliefsen der kleinen Bäche, fängt erst in der Mitte des Mai an, jedoch bleibt

1 S. Froriep Notizen. 1825. Nr. 233.

2 Geographisk och ekonomisk Beskrifning om Kemi-Lappmark. Stockh. 1804. 4. Uebers. von Blumhof. Ausgezogen von G. XLI. 233.

es kalt, die Alpengewässer treten dann aus und führen ihr Eis fort, worauf mit Anfang Juni die Birken ausschlagen und der kurze Sommer wegen der Länge der Tage mit verhältnifsmäfsig grofser Wärme beginnt. Genaue thermometrische Beobachtungen ergeben dort eine mittlere Temperatur von — 2°,86 C. und dennoch im Juli eine bis 15°,5 steigende Wärme, so dafs Wälder und sogar Küchenkräuter dort gedeihen. Wahlenberg nennt dieses Klima ein Sibirisches oder Continental-Klima, insofern sich dasselbe vom Insel- oder Küsten-Klima des Norwegischen Lapplandes unterscheidet, welches ein Isländisches genannt wird; indefs ist das eigentliche Sibirische und noch mehr das americanische Continental-Klima ungleich rauher und kälter. Der Unterschied ergiebt sich schon aus einer Vergleichung mit Torneö, welches etwa zwei Grade tiefer, aber an der Spitze des Finnischen Meerbusens, übrigens unter dem Polarkreise, also fast 67° N. B. liegt, in welcher Höhe das americanische Continent für Europäer unbewohnbar ist. Daselbst fand L. von Buch[1] die angenehme Herbstwitterung mit mäfsigen Nachtfrösten bis über die Mitte Septembers dauernd, wobei das Thermometer Mittags auf 10° C. stieg, die Bäume behielten noch ihr Grün und feste Schneebahn bringt erst der October. In Tromsöe unter 69° 38′ N. B. ist zwar kein Kornbau mehr, wohl aber sind Wiesen daselbst, und auf dem Festlande, dieser Insel gegenüber, reichen die Bäume bis 600 F. Höhe. Auf der Insel selbst bleibt die Sonne zwei Monate über dem Horizonte, dann herrscht bei Nacht milde Wärme, bei Tage aber steigt diese bis 17°,5 C. In Lyngen, unter fast gleicher Breite, wird Korn gebauet und Kartoffeln gerathen dort gleichfalls[2]; am 13. Juli stieg das Thermometer in Altengaard unter 70° N. B. auf 27° C., ja die Mitteltemperatur dieses Monats ist meistens 17°,5 C. Indefs ist dort der nördlichste Kornbau und ein 9 Monate dauernder Winter. Am nachtheiligsten in jenen Gegenden sind die Stürme, welche von West und Nordwest mit unbeschreiblicher Wuth blasen. Da, wo in jenen Districten die Sonnenstrahlen ihre Wirkungen nicht äufsern können, wechseln lange anhaltende, wenn gleich nicht übermäfsig strenge Winter mit einer nebligen,

1 Reise durch Norwegen und Lappland. 2 Thle. Berl. 1810. 8. Th. II. S. 276.

2 Ebend. I. S. 449.

trüben, kalten und unfreundlichen kurzen Sommerwitterung, weswegen zu Kielvig auf Mageröe der Scorbut schon verheerend wirkt.

Die unter gleich hohen Breiten liegenden Gegenden Sibiriens und noch mehr des americanischen Continentes sind für Europäer unbewohnbar, allein selbst auch südlicher gelegene, etwa zwischen 50° bis 65° N. B., unterscheiden sich sehr von den europäischen durch eine unglaublich strenge Kälte des Winters, welche namentlich im nördlichen America höchst auffallend ist. Insbesondere haben die neuesten Reisen des Capt. Franklin hierüber sehr entscheidende Auskunft gegeben, dessen erhaltene Resultate durch Richardson der Hauptsache nach zusammengestellt worden sind[1]. Die Expedition reisete ab von Carlton-House, unter 53° N. B. und ohngefähr in der Mitte zwischen beiden grofsen Oceanen gelegen, und gelangte bis an die Mündung des Kupferminenflusses unter 67° 47′ N. B. durch eine im Ganzen ebene Länderstrecke mit wenigen Bergen, unter denen die höchsten etwa 1000 bis 1200 Fufs über die umgebende Fläche hervorragen. In Cumberland-House unter 53° 57′ kam das Thermometer im Schatten während des ganzen Monats März nicht auf den Gefrierpunct, ja am 2. April sank es bis fast — 26° C. und stieg auch an diesem Tage nicht bis auf — 6°. Dennoch hatte die Sonne schon im März an vielen Stellen den Schnee weggeschmolzen und die Flüsse zu einigem Schwellen gebracht. Gegen die Mitte des Aprils, am 17ten, stieg die Wärme bis auf 24° C., ging aber am 19ten wieder bis — 6 ,1 C. herab und stieg am 20sten nur bis 1°,1; eine in Europa unter gleichen Breiten gewifs ganz unerhörte Veränderlichkeit. Im Monat Mai wird dort die Gerste gesäet und im Monat August nach etwa 90 Tagen geerndtet, während welcher Zeit die mittlere Temperatur etwa 19°,8 C. ist. Diese letztere ist bedeutend und es gedeihet dort eher der Mais, welcher nach Richardson in Edinburg unter 56° N. B. in der Regel durch ungünstige Witterung fehlschlägt, weil dort die mittlere Temperatur in jenen Monaten nur 13°,12 C. beträgt. Dagegen ist die ganzjährige mittlere Temperatur in Cumberland-House = 0° C, in Edinburg aber = 8°,7. In Carlton-House, welches nicht volle zwei Grade südlicher liegt, aber an der Grenze einer weiten, zum Theil

1 Edinb. Phil. Journ. N. XXIV. p. 197.

sandigen Ebene, wird die Gerste schon im April gesäet und steht im Mai im vollen Grün. Kommt man bis 50° N. B. in die Gegend von Red-River-Colonie, so geht dort die mittlere jährliche Temperatur nicht über 3°,5 C., aber da die drei Sommermonate bis 22° C. mittlerer Temperatur reichen, so würde der Wein dort reifen, wenn die Stöcke der Winterkälte widerstehen könnten. Als etwas Eigenthümliches darf man es hiernach ansehen, dafs in jenen Gegenden, namentlich in Cumberland-House, wo das ganz eigentliche nordamericanische Continental-Klima herrschend ist, auf einen sehr strengen Winter ein vorzüglich heifser Sommer folgt, wobei nach v. Humboldt eine gewisse grofse Reizbarkeit der Vegetabilien und Animalien statt findet, so dafs erstere schnell wachsen, letztere aber denen aus südlichern Gegenden gleichen, insofern namentlich die Stiche der Mosquito's an der Hudsons-Bay aufserordentlich giftig sind. Entfernt man sich weiter nördlich nach Fort Chepewyan am Athabasca-See unter 58° 43′ N. B., nach dem Sclavensee unter 61° 12′ N. B. und bis Fort Enterprize unter 64° 28′ N. B., so nimmt die Temperatur schnell ab, es bleibt ziemlich der nämliche Unterschied zwischen der höchsten und niedrigsten Wärme, jedoch mit einiger Verminderung; indefs tödten die schnellen Uebergänge von einer durch südliche Luftströmungen erzeugten Wärme zu einer durch nördliche herbeigeführten empfindlichen Kälte die Cerealien, welche deswegen dort nicht mehr mit Vortheil gebauet werden können. So stieg das Thermometer am 12. Juni auf 25°,6 C. und ging am 17ten wieder auf — 1° zurück, wobei Schnee und Graupeln fielen. Die Ursache hiervon liegt darin, dafs die Gegenden nicht durch Berge geschützt und daher den Einwirkungen der kalten und der warmen Luftströmungen frei ausgesetzt sind. Weiter nördlich an den von Europäern besuchten Plätzen, Winter-Island unter 66°,25, Igloolik unter 69°,3 und Melville-Island unter 74°,75 N. B. nimmt die Zahl der Tage, an denen das Thermometer über den Gefrierpunct steigt, stets mehr ab, und sie bieten daher, aufser der unglaublichen Kälte, keine der Beachtung werthen klimatischen Eigenthümlichkeiten dar, indem die übrigen meteorischen Erscheinungen, als die der Nordlichter, Nebensonnen und dgl., so wie der Eindruck, welchen sowohl die leichter zu ertragende höhere Kälte bei Windstille und trockner Atmosphäre, als die schwerer auszuhaltende geringere bei Winden und Nebeln auf

den menschlichen Körper macht, nicht eigentlich in diese Untersuchungen gehören.

Dem Klima jener letztgenannten Orte correspondirt das der Ostküste Grönlands und namentlich Spitzbergens [1], wo die strengste Kälte anhaltend im Winter herrscht, im Sommer etwas mildere Luft mit Nebel, Regen und Schnee wechselt. Die Perioden eines heitern Himmels, wenn südliche oder westliche Winde über das vom Eise freie Meer wehen, dauern meistens nur wenige Tage oder selbst nur Stunden ohne Unterbrechung fort, allein dennoch vermögen die Sonnenstrahlen während der langen Tage so viele Wärme zu entwickeln, als erforderlich ist, um einige wenige Pflanzen zwischen Felsenritzen und an geschützten Stellen hervorzurufen. Der Anblick jener öden, in ewiges Eis gehüllten Gegenden, wo Scoresby [2] nur ein einzigesmal 9° C. beobachtete, hat etwas so abschreckendes, daſs selbst Missethäter es vorzogen, die Todesstrafe zu dulden, als dort zu überwintern, auch blieb bei den angestellten Versuchen dieser Art der Scorbut selten aus und tödtete meistens im dritten Monate diejenigen, welche jenes gefahrvolle Wagestück unternahmen [3]. Selbst in den drei Sommermonaten steigt die Temperatur selten über 1°,5 C., obgleich es vier Monate ununterbrochen Tag ist. Die Winternacht, welche vom 22. October bis etwa 22. Februar dauert, ist übrigens nicht absolut dunkel, indem die Sonne nur 13°,5 unter den Horizont sinkt und also täglich etwas Dämmerung eintritt. Zu dieser geringen Erhellung kommt das Nordlicht, der helle Glanz der Sterne, der Schein des Mondes, welcher 12 bis 14 Tage bei jedem Umlaufe nicht untergeht, und der Wiederschein des blendend weiſsen Schnees, so daſs es für das ohnehin durch starkes Licht nie gereizte Auge hell genug zum deutlichen Erkennen der Gegenstände ist.

Schon am Ende Septembers beginnt dort, nämlich auf Spitzbergen, der Winter; die Vögel ziehen in mildere Gegenden, und schon im October gefroren einst die Biergefäſse in den

1 Scoresby Account of the Arctic Regions cet. Edinb. 1820. II Voll. 8. Will. Scoresby's Tagebuch einer Reise auf den Wallfischfang u. s. w. Uebers. von F. Kries. Hamb. 1825. Th. A. Latta in Edinb. Phil. Journ. N. Ser. N. V. p. 91. Parry ebend. VIII. 363.

2 Account T. I. p. 126.

3 Ebend. I. 48. II. 135.

Hütten der Jäger bei 8 Fufs Abstand vom Feuer. So streng indefs die Kälte auch vom November an mit dem Verschwinden der Sonne wird, so kommen doch zuweilen mildere Tage mit wärmeren südlichen Luftströmungen, an denen auf kurze Zeit selbst Thauwetter einfällt. December und Januar sind die heitersten Monate, aber dennoch vergehen selten vier Wochen ohne Stürme, ja man darf zwei Drittheile des Jahres stürmisch nennen. Die heftigsten Stürme fallen in die Nachtgleichen und sind meistens südlich. Schneestürme sind gewöhnlich, oft mehrere Tage, selbst Wochen anhaltend; sie häufen eine Menge Schnee in den Schluchten auf, über ebenem Grunde liegt er inzwischen selten höher als 3 bis 5 Fufs. Weifse Bären sind die einzigen vierfüfsigen Thiere, welche auch im Winter ausgehen, denn obgleich Füchse und Rennthiere dort überwintern, so trifft man sie in einiger Menge doch nur zu gewissen Zeiten, und zwar die ersteren vom Februar an, im März aber sehr zahlreich, zu welcher Zeit auch die Bären häufiger gesehen werden.

Die ersten Menschen, welche sich längere Zeit bleibend dort aufhielten, waren 9 Engländer. Es geschah durch einen Zufall, dafs das Schiff, wozu sie gehörten, durch das Eis fortgetrieben wurde und nicht wieder an jene Stelle gelangen konnte. Sie starben sämmtlich, aber 1630 wurden auf ähnliche Weise 8 Personen dort zurückgelassen und überlebten alle die Zeit ihrer grauenvollen Gefangenschaft. Im Jahre 1633 machten 7 Holländer den gefährlichen Versuch, ohne umzukommen, aber eine gleiche Anzahl anderer starben sämmtlich im folgenden Jahre am Scorbut. Spätere Versuche wurden der Unsicherheit wegen nicht gemacht, bis 1734 vier Russen an der Ostküste zurückblieben, weil ihr Schiff gleichfalls durch das Eis weggedrängt wurde. Sie suchten sich mit den Lebensmitteln zu erhalten, welche von den Schiffen dort in Menge zurückgelassen und der Kälte wegen unverdorben im folgenden Jahre wieder gefunden werden, auch liefert die Jagd hinlängliche Mittel der Subsistenz. Einer derselben starb, die übrigen drei aber wurden nach 6 Jahren und 3 Monaten durch ein zufällig dort landendes Schiff aus ihrer Einsamkeit erlöset, nachdem sie sich durch vieles Pelzwerk bedeutend bereichert hatten. Neuerdings überwintern dort nicht selten Fischer und Jäger von Archangel[1].

1 Ann. of Phil. 1817. Mai.

Das Klima auf *ausgedehnten Meeren* unterscheidet sich bloſs durch eine mehr gleichbleibende Temperatur, indem die Luft über denselben stets feucht ist und die anderweitigen Bedingungen, welche auf dem Lande als modificirend erkannt worden sind, mit Ausnahme einiger periodischen Winde, dort fehlen. Etwas bedingend sind auſserdem die gröſseren Meeresströme und die Menge des vorhandenen Eises in den Polarmeeren.

Die Klimate der verschiedenen Gegenden sind im Allgemeinen und der Regel nach stets gleichbleibend, schwanken indeſs mit gröſseren oder geringeren Abweichungen um ihre mittlere Beschaffenheit. Insbesondere sind die mittleren Temperaturen und Regenmengen zwar alle Jahre einander ziemlich gleich, inzwischen unterscheiden sich dennoch die kalten und gelinden Winter, die heiſsen und kühlen Sommer an den nämlichen Orten so sehr von einander, daſs ausnahmsweise in einzelnen Jahren Bäume erfrieren, welche viele Jahre hindurch das Klima ertrugen, und daſs selbst in verschiedenen Sommern nicht bloſs der Wein, sondern selbst die Cerealien miſsrathen. Von groſsem Einflusse ist dabei die Vertheilung der Wärme und Feuchtigkeit auf die einzelnen Jahreszeiten. Es können nämlich die mittleren Temperaturen und Regenmengen im ganzen Jahre sich gleich bleiben, und dennoch ist die klimatische Beschaffenheit eine ganz verschiedene, wenn auf einen gelinden Winter ein kühler und regnerischer Sommer folgt, als wenn der letztere durch Hitze und Trockenheit die Menge des Schnees und die heftige Kälte des ersteren compensirt. Mehr als die mittleren Temperaturen wechseln übrigens die Regenmengen [1], wie hauptsächlich aus der gröſseren oder geringeren Ergiebigkeit der Quellen hervorgeht, auch hat Gay-Lussac durch Vergleichung vieljähriger Beobachtungen aufgefunden, daſs die Regenmengen zuweilen in langen Perioden eine stete Zunahme und dann wieder Abnahme zeigen. Solche klimatische Wechsel sind zwar allen Gegenden eigen, vorzugsweise aber denen unter höheren Breiten, indem die unter niederen weit gröſsere Beständigkeit zeigen. In manchen Gegenden der nördlichen Halbkugel ereignen sich auſserdem nicht selten sehr auffallende plötzliche Wechsel der Temperatur, welche 10 bis 20 Grade der hunderttheiligen Scale betragen und womit dann anderweitige Folgen nothwendig verbunden sind.

1 Vergl. Art. *Regen*.

Eine wesentlichere Veränderung der Klimate mufs aber erfolgen, wenn die sie bedingenden Ursachen aufgehoben oder modificirt werden. Dafs das Klima der nördlicher gelegenen Länder in der vorgeschichtlichen Zeit sehr verschieden von dem jetzigen gewesen sey, ist oft behauptet worden, und wenn es gleich schwer ist, hierüber zur vollen Gewifsheit zu gelangen, so lassen sich doch allerdings eine Menge triftiger Gründe für diese Hypothese aufstellen. Inzwischen ist diese Frage schon früher[1] erörtert und dabei zugleich gezeigt worden, dafs die mittlere Temperatur der gemäfsigten und kalten Zone auf der nördlichen Halbkugel innerhalb des Zeitraumes, aus welchem sichere Beobachtungen vorhanden sind, nicht wesentlich vermehrt oder vermindert worden seyn könne. Die meisten bleibenden klimatischen Veränderungen sind durch Ausrottung der Wälder, durch Austrocknung der Sümpfe und durch Urbarmachung des Bodens hervorgebracht worden, wie namentlich Moreau de Jonnes[2] durch eine zahlreiche Menge von Beispielen dargethan hat. Hierdurch sind verschiedene Districte der heifsen Zone vertrocknet und gänzlich verödet, manche Gegenden unter dem gemäfsigten Himmelsstriche aber wärmer, trockner und milder geworden. Letzteres ist wohl unverkennbar in Italien der Fall. Dieses Land hatte nämlich zur Zeit der Römer ausgedehnte dichte Waldungen, deren Holz vorzüglich nutzbar war und deswegen auch ausgeführt wurde[3], weswegen aber die Winterkälte ungleich stärker war, als sie jetzt ist, so dafs die Tiber sogar durch die Menge des Eises unschiffbar wurde und der Soracte einen anhaltend mit Schnee bedeckten Gipfel hatte[4]. In Deutschland mufs sich das Klima in so fern geändert haben, dafs die Sommer heifser geworden sind, indem zu den Zeiten Caesar's[5] noch Rennthiere im Hercynischen Walde gefunden wurden, welche gegenwärtig die Sommerwärme schwerlich ertragen würden. Irland war nach W. Hamilton[6] in früheren Zeiten mit vielen dichten Waldungen bedeckt, und eben

1 Art. *Geologie*. Th. IV. S. 1332.

2 Untersuchungen über die Veränderungen, die durch die Ausrottung der Wälder in dem phys. Zustand der Länder entstehen. Tüb. 1828. 8.

3 Vitruv. II. 10. Liv. IX. 36.

4 Liv. V. 13. Iuv. Sat. VI. 513. Hor. Carm. I. 3.

5 De Bello Gall. VI. 23.

6 Trans. of the Acad. of Irland. T. VI.

dieses ist von England als unbestreitbare Thatsache ausgemacht, weswegen denn daselbst die Menge und Dichtigkeit der Nebel, des Regens und des Schnees ungleich gröfser war, als jetzt[1]. Dagegen glaubt BARROW[2], dafs England erst seit dem 15. Jahrhunderte eine entgegengesetzte klimatische Veränderung erlitten habe und seit jener Zeit bedeutend kälter geworden sey, weil damals die östliche Küste Grönlands mit einer ungeheuern Masse Polareises umgeben wurde, wodurch die nördlichen Luftströmungen abgekühlt werden. Als hauptsächlichster Beweis für diese Behauptung gilt ihm der Umstand, dafs die Römer nach dem Zeugnisse des TACITUS den Weinbau hinbrachten und nach Urkunden die Geistlichen später den Zehnten vom Weine unter ihren Einnahmen hatten. Ob inzwischen das Polareis auf solche Entfernung noch einen Einflufs ausübe, ist sehr problematisch, und aufserdem reifen die Trauben allerdings noch jetzt in England, aber der saure Wein, welchen sie geben, kann die an besseren gewöhnten Zungen nicht wohl befriedigen. Endlich aber ist es noch die Frage, ob aus solchen Urkunden der wirkliche Weinbau gefolgert werden kann, da nach einer richtigen Bemerkung von SCHOUW[3] die Schenkungs-Urkunden der Klöster nach einem allgemeinen Schema abgefafst und darin lieber mehr als weniger Einkünfte aufgenommen wurden.

Die Scandinavische Halbinsel soll nach VARGAS BEDEMAR[4] in früheren Zeiten durch dichtere Waldungen gegen den Einflufs der kalten Winde geschützt gewesen seyn und daher ein mildere Klima gehabt haben. Es sprechen hierfür allerdings die in Gegenden gefundenen Baumstämme, wo sie gegenwärtig nicht mehr wachsen, allein man weifs nicht, aus welchen Zeiten sie herrühren, obgleich die Vermuthung selbst durch keine sichern Thatsachen widerlegt werden kann. Solche Zeichen, deren eigentliche Zeit nicht bestimmt ist, gehören auf allen Fall zu den unsichern. Dagegen hat SCHOUW[5] durch eine sehr genaue kritische Prüfung der vorhandenen Nachrichten dargethan, dafs

1 Tacitus Agric. c. 12.

2 Quarterly Review 1818. Febr. Nr. 35. Daraus in G. LXII. 137.

3 Hertha Bd. X. S. 328.

4 Reise nach dem hohen Norden. 1819. Th. 1. S 44, 165 u. a. a. O.

5 Skildring af Veirligets Tilstand i Danmark. Kiöbenhavn 1826. 8. Daraus in Hertha Bd. X. S. 307.

die Geschichte zwar manche einzelne kalte Jahre erwähnt, wie sie in den neuesten Zeiten nicht mehr vorgekommen sind, allein manche dieser Angaben, an sich unglaublich, beruhen oft auf blofsen Sagen und sind daher zur Begründung einer ausgemachten Wahrheit keineswegs genügend. In derjenigen Periode dagegen, aus welcher zuverlässige Beobachtungen über Dänemark und die benachbarten Gegenden vorhanden sind und welche einen Zeitraum von mehr als einem halben Jahrhunderte umfasst, haben zwar manche Schwankungen unter und über der mittleren Temperatur und Regenmenge statt gefunden, eine eigentliche Veränderung kann aber keineswegs daraus gefolgert werden.

Es ist sehr zu vermuthen, dafs diese genügend erwiesene Wahrheit als allgemein gültig angesehen werden kann, wenn nicht die Ursachen einer Veränderung des Klima's zugleich bekannt sind, wie die von Italien und Deutschland angegebenen, wo in früheren Zeiten die ausgedehnten Waldungen auf die Witterung nothwendig einen Einflufs haben mufsten. Auf gleiche Weise ist nicht zu verkennen, dafs einzelne Orte z. B. durch das tiefere Herabsinken der Gletscher, durch das Vertrocknen der Flüsse, welche sie bewässerten, oder benachbarter Sümpfe und Moräste, desgleichen durch das Hinleiten fliefsender Gewässer in dieselben oder Anhäufung stagnirender, endlich auch durch zunehmende und abnehmende Cultur des Bodens eine Veränderung des Klima's erleiden können, im Grofsen aber läfst sich dasselbe auf eine solche Weise als gleichbleibend betrachten, dafs die nur vielleicht möglichen Veränderungen in ungleich längeren Perioden wahrnehmbar sind, als wohin die genaue geschichtliche Kenntnifs reicht. Aus dieser Ursache sind daher die verschiedenen Angaben einander geradezu widersprechend. So behauptet unter andern Dr. Williamson [1], dafs das Klima von Nordamerica durch das Ausrotten der Wälder ungleich milder geworden sey, und sucht dieses durch eine Menge Thatsachen zu beweisen, was auch in mancher Hinsicht gewifs gegründet ist, sofern diese Ursache die genannte Folge nothwendig nach sich zieht; Dunbar [2] dagegen beweiset aus seinen Beobachtungen, das Klima namentlich von New-Orleans habe

1 Transactions of the American Philos. Soc. T. I. p. 272.

2 G. XXXI. 421.

sich in sofern geändert, dafs die Winter kälter, die Sommer dagegen wärmer gefunden würden. Das Thermometer, welches sonst nie unter —3° C. herabgegangen sey, habe später in jedem Winter einigemale — 6°,6 bis — 8°,2 und am 12. Dec. 1800 sogar — 11°,1 C. gezeigt. Uebrigens ist es keineswegs unmöglich, die Ansichten beider mit einander zu vereinigen, in welchem Falle aber im Ganzen ein Gleichbleiben des Klima's von selbst folgt. Aufserdem giebt es wohl ohne Zweifel einzelne, wenn gleich nicht zahlreiche Veränderungen des Klima's, deren Ursache nicht wohl aufzufinden ist, weil man die gesammten mitwirkenden Local-Verhältnisse nicht kennt. So erzählt unter andern Lichtenstein[1], dafs auf dem Roggefeld's-Gebirge vor 50 und mehreren Jahren so viel Wasser war, dafs die Bewohner wegen der Flüsse und Moräste nicht zu einander kommen konnten. Keine Woche verging damals ohne Gewitter und vielen Regen. Später waren die Gewitter nicht blofs selten, sondern blieben manche Jahre ganz aus, und 1803 und 4 litt die Viehzucht sehr durch übergrofse Dürre.

Die Beschaffenheit des Klima's hat einen entschiedenen Einflufs auf das Pflanzenreich und das Thierreich. Das Leben und Gedeihen der Pflanzen ist nur dann möglich, wenn sich die zu ihrem Wachsthume erforderliche Menge Feuchtigkeit in den ihre Wurzeln umgebenden Substanzen vorfindet, unter dieser Bedingung aber hängt die Exsistenz und die volle Ausbildung derselben blofs von der Temperatur ab. Man sieht daher, dafs in heifsen Gegenden die bis in die Schneegrenze ragenden Berge in ungleichen Höhen mit den verschiedenartigsten Gewächsen bekleidet sind, und findet auf diese Art von unten nach oben die tropischen Pflanzen bis zu denen der Polarzone. Diese Untersuchung wird daher am schicklichsten mit den Betrachtungen der verschiedenen Temperaturen verbunden. Das Thier geht unablässig seiner Nahrung nach und wählt diejenigen Oerter, wo es die ihm zusagende am leichtesten und in gröfster Menge findet. Aufserdem aber können gewisse Thier-Species nur in heifsen, andere nur in kalten Klimaten leben, und so hängt also ihr Gedeihen gleichfalls zunächst von der Temperatur ab, wobei indefs manche mit mehr oder minder bedeutenden Veränderungen sich in verschiedenen Zonen acclimatisiren. Der Mensch

1 Reisen. Th. I. S. 159.

allein lebt unter allen Himmelsstrichen, mufs jedoch in den äufsersten Extremen verschiedene Hülfsmittel anwenden, um den äufsern Einflüssen nicht zu unterliegen, und geht bei anhaltender Entbehrung des Tageslichtes, verbunden mit Mangel an Ausdünstung, in den unterirdischen, blofs gegen die Kälte schüzzenden Höhlen durch überhandnehmenden Scorbut unter; denn PARRY's Begleiter haben zwar auf Melville-Island überwintert, und noch jetzt geschieht dieses durch die Archangelschen Jäger auf Spitzbergen, allein nur vermittelst mitgebrachter, am Orte selbst nicht zu erhaltender Hülfsmittel und in steter Gefahr, Opfer des Scorbutes zu werden. Eigentliche Einwohner der nördlichsten Districte sind die *Arktischen Hochländer*, welche Ross zwischen 76° bis 78° N. B. antraf, ein isolirter Stamm *Esquimaux*[1]. Ob es noch Bewohner höher gelegener Länder giebt und ob die *Samojeden* sich bis zur äufsersten Spitze des Cap Ceverovoslotchnoi, also bis fast zu gleicher nördlicher Höhe, erstrecken, ist fraglich, gewifs dagegen ist, dafs eigentlich cultivirte Menschenstämme bis zu so hohen Breiten nicht wohnen können und die Grenze ihres bleibenden Aufenthalts da finden, wo die für sie geeignete vegetabilische Nahrung aufhört.

Diese Frage ist indefs in Beziehung auf die klimatische Beschaffenheit der verschiedenen Zonen die weniger interessante; ungleich wichtiger dagegen ist eine seit langer Zeit verschieden beantwortete, nämlich bis wie weit die psychische und moralische Beschaffenheit der Menschen durch das Klima bedingt wird, womit sich dann eine zweite Untersuchung über die Vorzüge und Nachtheile verbinden läfst, welche die Beschaffenheit der einzelnen Gegenden rücksichtlich der Gesundheit ihrer Bewohner mit sich bringt.

Wird zunächst der psychische und moralische Einflufs des Klima's auf die Bewohner der verschiedenen Länder berücksichtigt, so ist MONTESQUIEU[2] hauptsächlich derjenige, welcher denselben sehr hoch anschlägt und als einzige oder vorzügliche Bedingung der geistigen und körperlichen Thätigkeit, des Charakters und der Sitten der verschiedenen Völker betrachtet. Mit

1 John Ross Entdeckungsreise u. s. w. Ueb. von P. A. Nemnich. Leipz. 1820. 4. S. 59.

2 Esprit des Lois. L. XIV. u. XVII.

ihm übereinstimmend halten Falconer[1] und andere die Bewohner der heifsen Zone für träge, weniger geistiger und körperlicher Anstrengung fähig, leidenschaftlich, wenig kühn und unternehmend, eher feige als tapfer und die Sklaverei leicht duldend. Den Bewohnern der kalten Zone wird geringeres Gefühl, Gutmüthigkeit, Beharrlichkeit, Thätigkeit, zugleich aber Ausschweifung im Trunk und Spielsucht beigelegt; dagegen sollen die der gemäfsigten Zone minder leidenschaftlich, gelassen, thätig, tapfer, freiheitliebend, munter und launig, zum Theil aber auch unbeständig und unzufrieden seyn. Die Hypothese ist indefs durch andere und namentlich durch Volney[2] mit triftigen Gründen bestritten worden, indem er namentlich zeigt, dafs die Bewohner der nämlichen Gegenden, also auch dem Einflusse des nämlichen Klima's ausgesetzt, zu verschiedenen Zeiten moralisch und psychologisch ganz verschieden sind. Assyrier und Meder, Palmyrener und Parther waren zu gewissen Zeiten höchst kriegerisch, die Griechen waren ganz anders auf den Feldern von Marathon und in den Thermopylen, als unter Constantin, und die Römer unter Scipio anders als unter Sylla.

Wenn man blofs den kriegerischen Geist der Nationen als den Mafsstab ihrer innern Kraft betrachtet, so haben die meisten eine Periode gehabt, in welcher sie sich dadurch auszeichneten, und noch jetzt finden wir Beispiele eines wilden Muthes bei den Bewohnern der verschiedensten Länder, ja die nämlichen Generationen sind zu einer Zeit tapfer und zur andern feige, je nachdem der Gegenstand ist, welcher sie aufregt, die Anführung derselben und das Gelingen der ersten Waffenthaten. Ueberhaupt ist der Erfolg der Schlachten kein sicherer Mafsstab für die Tapferkeit der Völker, auch haben noch neuerdings die Südamericaner und Griechen, obgleich Jahrhunderte lang durch das Joch der Sklaverei gebeugt, Beispiele grofsen Muthes im Kampfe gegeben. Es lassen sich indefs der Behauptung des Montesquieu noch andere Gründe entgegensetzen, welche ihre Allgemeinheit widerlegen. Die wilden Völker in Nordamerica, die Maurischen Stämme in Africa, die Bewohner von Timor und mehrere Inseln der Südsee sind falsch und grausam,

1 Bemerkungen über den Einflufs des Himmelsstrichs aufs Temperament, Sitten u. s. w. Leipz. 1782. 8.

2 Reisen in Aegypten und Syrien. Vol. II.

die oben erwähnten arktischen Hochländer, die Osagen und viele Insulaner des grofsen Oceans sind gutmüthig, und eben so zeigten sich ehemals die Hindus und Peruaner. Es läfst sich daher nicht verkennen, dafs aufser dem Klima noch die Eigenthümlichkeit gewisser Völkerstämme, die Regierungsform, der Grad der Cultur, die Religion und insbesondere das Bedürfnifs, wie VOLNEY richtig bemerkt, den psychischen und moralischen Zustand der Menschen bedingen. Bietet der Boden von selbst und ohne Mühe hinlängliche Nahrung und Bequemlichkeit dar, so wird die Anstrengung seiner Bewohner geringer seyn, als wenn sie nur durch Mühe und Fleifs sich ihren Unterhalt verschaffen können, dagegen aber werden die Menschen träge und indolent, wenn sie die Früchte ihrer Thätigkeit nicht erndten können, wie sich bei Leibeigenen und sklavisch unterdrückten Nationen zu allen Zeiten und unter allen Himmelsstrichen gezeigt hat. So gewifs indefs diese letzteren Bedingungen von gröfster Wichtigkeit sind, aufserdem auch die natürlichen Anlagen der verschiedenen Völkerstämme als einander sehr ungleich erkannt werden, insofern z. B. namentlich die Bewohner von Radak und andern Südsee-Inseln zwar gutmüthig, freundlich und gelehrig, für eigentliche Geistesanstrengung aber zu schwach sind[1], so ist doch von der andern Seite ein eigentlicher klimatischer Einflufs keineswegs in Abrede zu stellen. Zahlreiche Beispiele zeigen nämlich, wie die thätigen, beharrlichen und kühnen Europäer in heifsen Klimaten auf den Westindischen Inseln, selbst in Mexico und Brasilien, allmälig träger, weichlicher, feiger und zur Geistesanstrengung weniger geneigt werden, wobei es jedoch noch nicht ausgemacht ist, ob das Klima allein oder in Verbindung mit der dortigen Lebensweise, der bürgerlichen Verfassung u. s. w. oder Letzteres allein als Ursache hiervon anzusehen ist. Im Allgemeinen ist körperliche und geistige Bildung, so wie vorzügliche Stärke des Geistes und Körpers ein Geschenk der gemäfsigten Klimate und dem europäischen Menschenstamme in einem vorzüglichen Grade eigenthümlich, denn namentlich fand LANGSDORF[2] bei den Einwohnern von Neu-Californien unter 38° N. B. und ohngeachtet der sehr milden Behandlung, welche ihnen unter der Herrschaft der

1 KOTZEBUE's Reise.

2 Dessen Reisen Th. II. S. 143.

Missionen zu Theil wird, einen eben so hohen als bleibenden Grad der Dummheit.

Ungleich sicherer ist der Einfluſs der Klimate auf den Gesundheitszustand der Menschen, mit der allgemeinen Regel, daſs die Eingebornen den Krankheiten gewisser Gegenden weniger unterworfen sind, als die Fremden. Stagnirendes Wasser in Verbindung mit Wärme, anhaltendes Modern vegetabilischer und insbesondere thierischer Stoffe und plötzlicher starker Wechsel der Temperatur bei Tage und während der Nacht sind der Gesundheit am meisten nachtheilig. Daher die Ungesundheit der stark bewässerten Reis- und Zuckerrohr-Felder, der Pontinischen Sümpfe und der Länder unter der Zone während der Regenzeit, wo eben deswegen die tödtlichen Fieber so anhaltend herrschen[1]. In Acapulco, einem guten Hafen in Mexico, wüthete jährlich eine ansteckende Krankheit. Ein Wundarzt gab einen benachbarten Teich als Ursache derselben an, dieser wurde ausgetrocknet und die Krankheit hörte auf[2]. Der Einfluſs, welchen die klimatische Beschaffenheit der verschiedenen Gegenden auf den Gesundheitszustand ihrer Bewohner hat, ist unter andern hauptsächlich durch Finke[3], Schnurrer[4], Robertson[5], Cabanis[6] und Vierey[7] untersucht worden. Im Allgemeinen lassen sich folgende Sätze annehmen:

1) Krankheiten entstehen durch die eigenthümliche klimatische Beschaffenheit gewisser Gegenden und pflanzen sich von da in andere fort. Ob dieses bei der orientalischen Pest der Fall ist, dürfte in so fern streitig seyn, als diese vermuthlich nur aus

1 Histoire des Marais et des Maladies causées par les émanations des eaux stagnantes. Par J. B. Montfalcon. Par. 1825. 8.

2 Langsdorf Reisen. Th. II. S. 188.

3 Versuch einer medicinisch-practischen Geographie. Leipz. 1792. III voll. 8.

4 Geographische Nosologie u. s. w. Stuttg. 1813. Die Krankheiten des Menschengeschlechts historisch und geographisch betrachtet von Dr. F. Schnurrer. Tüb. 1826. II vol. 8.

5 General View of the natural history of the Atmosphere, and of its connection with the Sciences of Medicine and Agriculture, including an Essay on the causes of epidemical Diseases. Lond. 1808. II voll. 8.

6 Rapport du Moral et du Physique de l'Homme. T. II. p. 1 ff.

7 Im Dictionnaire des Sciences medicales etc. Par. 1813. T. V., wo viele Thatsachen kurz zusammengedrängt sind.

übermäfsiger Unreinlichkeit entspringt oder überhaupt nur durch Ansteckung weiter verbreitet wird; mit mehrerem Rechte gilt es dagegen von der ägyptischen Augen-Entzündung.

2) Manche Krankheiten verändern sich in andern Klimaten und werden nach Umständen bösartiger oder gelinder.

3) Andere dagegen gehören einzelnen Ländern eigenthümlich zu, ja man kann Personen, welche in solchen Gegenden erkrankt sind, blofs durch Veränderung des Wohnortes heilen.

4) Gewisse Krankheiten bleiben in manchen Gegenden blofs auf die Städte beschränkt und verbreiten sich nicht auf dem Lande, wo frischere Luftströmungen ihre Verbreitung hindern.

Um von den verschiedenen klimatischen Krankheiten nur einige zu nennen, mögen die Hautausschläge der heifsen Gegenden, als Elephantiasis, Boak und Barras, in Arabien einheimisch, erwähnt werden. Die Menschenpocken sollen aus dem Innern von Africa, die Masern erst im Jahre 572 aus Aethiopien über Arabien und Aegypten nach Europa gekommen seyn, was übrigens wenigstens bei den letzteren fraglich ist. Der Weichselzopf gehört in die grofse Tartarei, Siebenbürgen, Ungarn und Polen, und hat wahrscheinlich mit der Wolosetz, einer Art Haargeschwüre im südlichen Rufslande, Aehnlichkeit. Die Air ist eine Art von Betäubung der Glieder, welche in Brasilien von der kalten Morgen- und Abendluft erzeugt werden soll. Albinos, Kretinen und Kakerlaken finden sich ausschliefslich oder vorzugsweise in den engen Bergschluchten, namentlich der Alpengebirge. In Pondichery findet sich mit der heifsen Jahreszeit ein eigener Hautausschlag ein, welcher mit feinen Blattern auf Stirn und Schultern anfängt, mit empfindlichem Jucken und Stechen verbunden ist und bis zur nassen Jahreszeit dauert. Das gelbe Fieber, in Peru Chapetonade, sonst auch Siamsfieber oder schwarzes Erbrechen genannt, ist ursprünglich in heifsen Ländern, als Peru, Westindien, Barbados, Mexico u. s. w. zu Hause, hat sich seit mehreren Jahren über Nordamerica und von dort über die Küstendistricte Spaniens bis nach Italien hin verbreitet und nimmt an Heftigkeit ab, je weiter es in nördlichere Gegenden fortschreitet, so dafs es schwerlich bis Frankreich und noch weniger nach Deutschland vordringen wird. In Aegypten trifft man eine eigenthümliche Krankheit, Demeljuja genannt, welche mit Kopfschmerzen nebst Augenentzündung anfängt und leicht in Raserei

und Schlagflufs übergeht, wenn sie zurücktritt. Bekannter ist die ebendaselbst einheimische Augenentzündung, wahrscheinlich eine Folge der Wärme, der Trockenheit und des heifsen, durch den Wind bewegten Sandstaubes daselbst, welche sich namentlich den dort gewesenen französischen und noch mehr den englischen Truppen mitgetheilt hat und seitdem epidemisch unter diesen geworden ist[1]. Die Epilepsie soll vorzüglich in Norwegen beim weiblichen Geschlechte häufig seyn; auch findet man eben daselbst die Radesyge, eine Art Elephantiasis, welche sich auch über Schweden verbreitet[2], so wie in Rufsland und in kalten Ländern die Rose sich häufig findet, Katarrhe, Rheumatismen u. s. w. aber den veränderlichen Klimaten vorzüglich zugehören.

M.

Klinometer.

Die zahlreichen Apparate, vermittelst deren die Neigung einer Linie oder Ebene gegen die Horizontal-Ebene gemessen wird, nennt man in dieser Beziehung *Klinometer* (von *κλίνω* ich neige). Sie beruhen insgesammt auf einem eben so leichten als einfachen geometrischen Principe und deswegen werden sie mit verschiedenen Modificationen zum jedesmaligen Gebrauche passend construirt. Ist nämlich ab eine in die Horizontal-Ebene Fig. 202. fallende Linie, dc eine verticale, so sind bekanntlich die beiden Winkel bei c rechte Winkel, und da die erstere durch die waagerechte Oberfläche jeder Flüssigkeit (Wasserwaage, Nivellirwaage, Libelle), die letztere durch die Richtung eines Fadens, woran ein schwerer Körper hängt (Falllinie, Senkel), gegeben wird, so läfst sich nicht nur aus der einen die andere, sondern auch aus der Veränderung der Winkel bei c die Abweichung der Linie ab von der horizontalen Richtung oder die Neigung derselben gegen den Horizont (Inklination) leicht finden. Wird

1 Ueber den Einflufs des Aegyptischen Klima's auf die Gesundheit s. Relation historique et chirurgicale de l'expédition de l'Armée d'Orient. Par Larrey. Besser noch sind dessen Mémoires et Observations sur plusieurs maladies, qui ont affecté les troupes de l'Armée françoise. Sie gehören zur Description de l'Egypte.

2 Fr. Holst commentatio de morbo Radesyge etc. Christiania 1818. 4.

nämlich die Richtung von ab durch eine Wasserwaage unveränderlich erhalten und der Winkel baβ oder baβ', welchen eine Ebene mit dieser bildet, gemessen, so giebt dieser die Inklination gegen den Horizont unmittelbar. Ist dagegen dc unveränderlich auf ab befestigt, so erhält diese Stange bei vorhandener Neigung die Richtung dδ oder dδ', und da die Falllinie dc des Senkels sich stets gleich bleibt, so erhält man im ersten Falle aus dem Winkel δdc $=$ βab, im zweiten aus δ'dc $=$ β'ab die Neigung gleichfalls. Jedes Klinometer bedient sich daher des Gradbogens und Senkels unmittelbar zur Messung des Neigungswinkels, oder der Wasserwaage zur Beibehaltung der Horizontal-Ebene und Auffindung des Winkels, welchen die geneigte Ebene mit dieser macht. Von den zahlreichen Constructionen der Klinometer, deren man sich entweder zum Messen der Neigung einer Fläche, eines Berges u. s. w., oder hauptsächlich bei geognostischen Untersuchungen zur Bestimmung des Fallens eines Lagers, einer Schichte u. s. w. bedient, werde ich nur einige beschreiben, ohne dabei die eigentlichen Nivellir-Instrumente, als der Canalwaage mit Quecksilber oder Wasser, oder des Ramsdenschen Nivellir-Apparates mit Wasserwaage, Fernrohr und Gradbogen zu erwähnen, obgleich insbesondere dieser letzte zum Messen der Neigung bequem und zugleich wegen seiner großen Genauigkeit vorzugsweise brauchbar ist.

Das einfachste Werkzeug dieser Art ist die gemeine Setzwaage der Maurer, Schreiner u. s. w., welche aber in ihrer gewöhnlichen Gestalt die Abweichung von der horizontalen Fläche ohne genaue Messung nur anzeigt und in dieser Beziehung daher richtiger *Klinoskop* genannt werden müßte. Die französischen Geometer bedienten sich zum Messen des Neigungswinkels ihrer Meßstangen eines sehr feinen Apparates. Das recht-
Fig. 203. winklige Dreieck ACB ruhet auf den völlig plan geschliffenen Füßen A, B, und trägt in seiner Spitze C eine auf dem eingetheilten Gradbogen sich frei bewegende Alhidade, an welcher das Niveau $\alpha\beta$ so befestigt ist, daß sie beim völlig horizontalen Stande des Klinometers mit 0 auf 60° der Theilung des Gradbogens zeigt. Ist die gemessene Ebene nicht horizontal, so verschiebt man die Alhidade nach der einen oder andern Seite so lange, bis das Niveau wieder den horizontalen Stand zeigt, und liest den Neigungswinkel ab. Zu größerer Genauigkeit wird die Alhidade zuerst mit der Hand geschoben, dann vermittelst

einer Schraube festgestellt und zuletzt durch eine Mikrometerschraube bewegt, die Theilung aber mit der Loupe abgelesen [1].

Ein ähnliches, sinnreich ausgedachtes Werkzeug, welches für feinere und gröbere Messungen bequem eingerichtet werden kann, hat Inochodsof [2] in Vorschlag gebracht. Der horizontale Balken abcd ruhet auf zwei gleich langen, in stählerne Spitzen auslaufenden Füſsen pp' und trägt den getheilten Bogen mn. Fig. 204. Unter diesem bewegt sich, um eine feine Axe leicht drehbar, der Apparat rsq, dessen oberer Theil rs ein gleichfalls getheilter Halbkreis, der untere q aber excentrisch ist, so daſs sein unter dem Mittelpuncte liegender Schwerpunct allezeit in der verticalen Linie zur Ruhe kommt, wobei das 0 beider Theilungen zusammenfällt, wenn die Fuſsspitzen pp in einer völlig horizontalen Ebene liegen; weichen sie aber hiervon ab, so zeigt die Theilung des Halbkreises den Neigungswinkel. Daſs bei beiden Apparaten die zwei getheilten Bogen zugleich als Nonien dienen, versteht sich von selbst, auch ist an dem letzteren ein Visir vermittelst der Oeffnungen $\alpha\beta$ angebracht, statt deren auch ein Fernrohr mit horizontalem Faden gewählt werden könnte.

Einfacher, aber minder genau als beide ist der Gradbogen, welcher an einer Schnur aufgehangen den Neigungswinkel durch ein kleines Senkel angiebt. Fig. 205. Wird nämlich das Seil ab mit der zu messenden geneigten Ebene parallel ausgespannt und der Gradbogen daran gehängt, so zeigt das kleine Senkel $\alpha\beta$, welches oben im Centrum des getheilten Halbkreises befestigt ist, den Elevationswinkel. Dabei kann die Schnur nicht füglich gerade ausgespannt werden, sondern muſs sich biegen, worauf beim Messen Rücksicht zu nehmen und zugleich darauf zu sehen ist, daſs das Senkel genau über 0° oder 90° der Theilung herabhängt, wenn die Schnur die horizontale Richtung hat. Da dieser einfache Apparat zur Bestimmung des Schichtenfalles dem Geognosten hinlängliche Genauigkeit giebt, zum eigentlichen Nivelliren aber eins der oben beschriebenen oder ein nach dem nämlichen Principe construirtes Werkzeug angewandt zu werden pflegt, so ist es nicht sachgemäſs, solche künstliche Apparate namentlich zum Messen der Neigung der Felsschichten zu con-

1 Base du Système métrique T. II. Mon. Corr. XVII. S. 537.

2 Acta Acad. Pet. III. 1. 188.

struiren, als durch Web Seymour[1] geschehen ist. Ein durch seine Einfachheit und Kleinheit sich empfehlender Apparat, welcher leicht transportirt werden und zur Bestimmung des Neigungswinkels der Meſsstangen, wo nicht ein ausgezeichneter Grad der Genauigkeit erfordert wird, eben so wie eines Berges oder einer Felsschicht dienen kann, ist durch Pratt[2] angegeben worden. Fig. 206. Die beiden parallelen Lineale von Buchsbaumholz A und B sind vermittelst eines Charnieres in der Art beweglich, daſs der Gradbogen fg den Winkel miſst, welchen beide mit einander bilden. Auf dem oberen Lineale B befindet sich die Libelle ab, vermittelst deren dasselbe in die horizontale Ebene gebracht und in derselben erhalten werden kann, und wenn dann das andere Lineal A auf die Ebene gelegt oder parallel mit derselben einvisirt ist, deren Neigung gemessen werden soll, so giebt die Theilung des Bogens fg diese unmittelbar an. Das vom Centrum entferntere, eben daher gröſsere Theile des Kreises enthaltende und somit eine schärfere Messung gewährende Bogenstück de hat Moyle[3] hinzugesetzt; auch pflegt man in die Fläche des unteren Lineals A einen kleinen Compaſs einzusenken, um vermittelst desselben zugleich das Streichen der Schichten zu messen. *M.*

Knoten.

Nodus; Noeud; *Node.* Den Durchschnittspunct zweier gröſsten Kreise an der scheinbaren Himmelskugel nennt man Knoten. Wenn man nämlich die Ebenen der einzelnen Planetenbahnen, in welchen allen die Sonne sich befindet, sich vorstellt, so haben je zwei eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie, welche ihre Knotenlinie (*linea nodorum; la ligne des noeuds; the line of nodes*) heiſst. Am meisten beziehen wir dieses auf die Ekliptik, und die Knoten einer Planeten- oder Kometenbahn sind daher diejenigen Puncte, wo der Himmelskörper von einer Seite der Ebene der Erdbahn zur andern übergeht; derjenige Knoten heiſst der aufsteigende (*nodus ascendens*), wo er sich nördlich von der Ekliptik zu entfernen anfängt, der-

1 Trans. of the Geolog. Soc. T. III. p. 385.

2 Ann. of Phil. New Ser. I. p. 48. Schweigg. Journ. XXXII. 136.

3 Ann. of Phil. N. S. 1824. Febr. p. 122.

jenige der niedersteigende (*nodus descendens*), wo er auf die Südseite der Ebene der Erdbahn übergeht; der erstere wird durch ☊, der andere durch ☋ bezeichnet. In Beziehung auf die Mondbahn findet derselbe Ausdruck statt.

Diese Knotenlinien bleiben nicht unveränderlich, sondern die Lage der Ebene, in welcher irgend ein Himmelskörper sich bewegt, ist kleinen Aenderungen unterworfen und daher jene Durchschnittslinien veränderlich. Bei der Mondbahn beträgt diese Verrückung der Knoten, welche eine rückgängige ist, so viel, dafs die Mondknoten in 19 Jahren durch alle Zeichen des Thierkreises rücken. Dieses Fortrücken der Mondknoten entsteht durch die Anziehungskraft der Sonne, vermöge welcher der Mond bei jedem Umlaufe etwas eher in die Ebene der Erdbahn eintrifft, als in einem Puncte, welcher von der Erde aus gesehen rückwärts liegt, so dafs die Knoten vom Stier zum Widder, vom Widder zu den Fischen u. s. w. zurückgehen. Man kann sich dieses so vorstellen, als ob der Mond, in einer gegen die Ekliptik geneigten Ebene laufend, durch die Sonne gegen die Ebene der Ekliptik herabgezogen werde und daher etwas früher in die Ebene der Ekliptik eintreffe, als es geschehen würde, wenn er seine Bahn, ohne Einwirkung der Sonne, um die Erde beschriebe. Die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik bleibt dabei fast ganz ungeändert. *B.*

Kobalt.

Kobold; *Cobaltum;* Cobalt; *Cobalt.* Dieses erst seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts bekannte Metall findet sich theils im Meteoreisen, theils in Verbindung mit Schwefel und Arsenik im Kobaltkies, Kobaltglanz und Speiskobalt, theils als arseniksaures und als schwefelsaures Kobaltoxyd, theils als unreines Kobalthyperoxyd. Im möglichst reinen Zustande ist es etwas ductil, doch machen es schon geringe Beimischungen von Kohlenstoff spröde; es ist röthlich-grau-weifs, zeigt ein specifisches Gewicht von ungefähr 8, 6, schmilzt erst in heftiger Weifsglühhitze, jedoch leichter als Eisen, und zeigt sich magnetisch. Nach Wollaston verhält sich der Magnetismus des Kobalts zu dem des Eisens = 5 bis 6 : 8 bis 9; nach Lampadius des nicht ganz reinen Kobalts zu dem des Eisens = 25 : 55.

Mit Sauerstoff bildet es ein Oxyd und ein Hyperoxyd. Das *Kobaltoxyd* (29,5 Kobalt auf 8 Sauerstoff) ist ein hellgraues, nicht magnetisches Pulver. Es bildet mit den Säuren Salze, welche durch lebhaft rothe Farben ausgezeichnet sind. Sie werden durch reines Kali blau, durch kohlensaures rosenroth und durch hydrothionsaures schwarz gefället; der in ihnen durch überschüssiges Ammoniak erzeugte Niederschlag löst sich bei Luftzutritt wieder mit brauner Farbe auf. Das *salpetersaure Kobaltoxyd* schiefst in kleinen rothen Säulen an; die mit seiner Lösung auf Papier gebrachte Schrift wird bei jedesmaligem Erhitzen lebhaft roth. Das *schwefelsaure Kobaltoxyd* liefert rothe wasserhaltende Krystalle, ganz von der Form des Eisenvitriols. Das Kobaltoxyd löst sich in schmelzendem Borax und gewöhnlichem Glase mit dunkelblauer Farbe auf; letztere Verbindung stellt nach dem Pulvern die *Smalte* dar. Glüht man Alaunerde mit salpetersaurem Kobaltoxyd, so bleibt eine schöne blaue Verbindung von Alaunerde und Kobaltoxyd, das *Leidner Blau*, mit dem auch das *Thenardsche Blau*, durch Glühen von Alaunerdehydrat mit phosphorsaurem oder arseniksaurem Kobaltoxyd erhalten, verwandt ist. Bittererde mit salpetersaurem Kobaltoxyd geglüht liefert eine rosenrothe Kobaltoxyd-Bittererde.

Das *Kobalthyperoxyd* (29,5 Kobalt auf 12 Sauerstoff) entsteht beim Glühen des Kobaltes oder des Kobaltoxydes an der Luft; es stellt eine schwarze zusammenhängende Masse von muschlichem Bruche oder ein braunschwarzes Pulver dar; es löst sich in Salzsäure unter Entwickelung von Chlorgas, in erhitzter Salpeter- und Schwefelsäure unter Entwickelung von Sauerstoffgas zu einem Kobaltoxydsalze auf. — Es scheint noch eine *Kobaltsäure* (29,5 Kobalt auf 16 Sauerstoff) zu geben, die man nicht für sich, sondern nur in Doppelsalzen kennt und die sich beim Uebersättigen der Kobaltoxydsalze mit Ammoniak bildet, sobald Luft hinzutritt.

Das *Chlorkobalt* läfst sich durch Abdampfen des salzsauren Kobaltoxydes erhalten; es ist hellblau und etwas flüchtig. Mit Wasser bildet es eine rothe Lösung von *salzsaurem Kobaltoxyd*, aus welcher sich wasserhaltende rubinrothe Krystalle erhalten lassen. Die rothe Lösung wird beim Vermischen mit concentrirter Salzsäure oder Schwefelsäure blau, bei Wasserzusatz wieder roth. Mit dem wässerigen salzsauren Kobaltoxyd, welches auch Hellot's *sympathetische Tinte* heifst, auf Papier gemachte

Schriftzüge werden beim jedesmaligen Erhitzen blau, beim Erkalten wieder roth. Entweder kommt die blaue Farbe von dem Uebergange des salzsauren Kobaltoxyds in Chlorkobalt, indem sowohl die stärkere Säure als auch das Erwärmen Wasserbildung aus dem Sauerstoff des Kobaltoxydes und dem Wasserstoff der Salzsäure veranlassen kann, oder es exsistirt ein saures salzsaures Kobaltoxyd, welches blau ist, dem jedoch durch mehr Wasser die überschüssige Salzsäure entzogen wird. *G.*

Kohlenstoff.

Carbonium; Carbone; *Carbon.*

So heifst dasjenige Element, aus welchem die gewöhnliche Kohle fast völlig besteht und welches den Hauptbestandtheil aller organischen Körper ausmacht. Lavoisier unterschied zuerst diesen Stoff, während man früher die kohlenstoffhaltenden Körper als solche betrachtete, die überhaupt reich an Phlogiston seyen.

Der Kohlenstoff zeigt in seinen Eigenschaften auffallende Verschiedenheiten je nach dem Zustande, in welchem er sich befindet. Denn entweder ist er krystallisirt oder nicht krystallisirt, wie in der Kohle. Der krystallisirte kann 2 verschiedenen Systemen angehören und erscheint daher entweder als Diamant oder als Graphit.

Der *Diamant* erscheint in Oktaedern und andern dem regelmäfsigen Systeme angehörenden Formen krystallisirt, meist mit convexen Flächen und nach den Flächen des Oktaeders spaltbar. Er ist der härteste Körper, zeigt ein specif. Gewicht von 3,5, ist durchsichtig und farblos (wenn nicht zufällig gefärbt), zeigt einen eigenthümlichen Glanz, bricht das Licht im höchsten Mafse und leitet nicht die Elektricität. Der Diamant ist nach allen bis jetzt angestellten Untersuchungen als reiner Kohlenstoff zu betrachten. Da er einigemal in einer Gebirgsart gefunden worden ist, welche den vulcanischen anzugehören scheint, so dürfte man vermuthen, dafs er durch das vulcanische Feuer geschmolzener und beim langsamen Erkalten der Lava regelmäfsig krystallisirter Kohlenstoff sey.

Der bereits[1] kurz erwähnte *Graphit* kommt theils natürlich

1 S. oben Th. III. S. 162.

vor, theils wird er künstlich erhalten, wenn man Eisen und einige andere Metalle in Berührung mit überschüssiger Kohle schmelzt und langsam erkalten läſst, wo der vom Metall im Ueberschuſs aufgenommene Kohlenstoff als Graphit herauskrystallisirt. Die Krystallform des Graphits ist eine regelmäſsig 6seitige Säule; er ist weich, in dünnen Blättchen biegsam, abfärbend, fettig anzufühlen, von 1,8 bis 2,0 specif. Gewichte, stahlgrau, undurchsichtig und ein guter Leiter der Elektricität. Man hält ihn gewöhnlich für eine Verbindung von viel Kohlenstoff mit Eisen oder einem andern Metalle; da jedoch nach den Erfahrungen von Karstens, Berzelius u. A. mancher natürliche und künstliche Graphit ohne Rückstand verbrennt, so scheint der Metallgehalt zufällig und seine Verschiedenheit vom Diamant wäre aus der verschiedenen Krystallisation zu erklären, so wie Schwefelkies und Wasserkies bei ganz gleichem chemischen Bestande eine verschiedene Krystallisation und damit auch in andern Eigenschaften Verschiedenheiten zeigen.

Die *Kohle* kommt theils natürlich vor, als Anthracit, theils wird sie künstlich erzeugt, sowohl durch Zersetzung der Kohlensäure mittelst Kaliums oder Phosphors und des Kohlenwasserstoffgases durch Glühhitze, als auch vorzüglich durch Glühen organischer Verbindungen bei abgehaltener Luft. Soll letztere, ohne Asche zu lassen, verbrennen, so sind hierzu verdampfbare organische Verbindungen anzuwenden, welche durch das Verdampfen von den beigemischten fixen Stoffen befreiet werden; so erhielt man eine ohne Rückstand verbrennende Kohle beim Hindurchleiten der Dämpfe von Weingeist oder flüchtigem Oele durch eine glühende Porcellanröhre. Ist zur Bereitung der Kohle eine gelinde Hitze angewendet worden, so enthält sie noch merkliche Mengen von Wasserstoff und Sauerstoff; sie ist brennbarer, ein schlechter Leiter für Wärme und ein Nichtleiter für Elektricität; nach stärkerem Glühen dagegen, wobei sie noch Wasserstoff und Sauerstoff in Gestalt von Wasserstoffgas und Kohlenoxydgas entwickelt, leitet sie die Wärme ziemlich gut und die Elektricität nach den Metallen am besten. Ihr specifisches Gewicht beträgt 1,5727; sie ist zwar sehr zerreiblich, kann aber durch heftiges Weiſsglühen im Kreise der Voltaischen Säule nach Davy so hart gemacht werden, daſs sie Glas ritzt. Sie zeigt noch einige andere merkwürdige Verhältnisse, welche dem Diamant und Graphit nicht zukommen, nämlich sie absorbirt mit Begierde

Wasser, Gase und verschiedene riechende Dämpfe[1]; sie nimmt aus wässerigen Flüssigkeiten, welche riechende, schmeckende und färbende Stoffe enthalten, diese auf und eignet sich hierdurch zur Reinigung des faulen Wassers und vieler gefärbter Flüssigkeiten. Alle diese Verhältnisse zeigt die Kohle in um so höherem Grade, je mehr Berührungspuncte sie darbietet. Die Verschiedenheiten der Kohle vom Diamant und Reisblei mögen vorzüglich von ihrem lockern, nicht krystallisirten Zustande herrühren, vielleicht auch noch von kleinen Beimischungen von Wasserstoff und Sauerstoff, besonders wenn sie nicht einer heftigen Weifsglühhitze ausgesetzt wurde.

Der Kohlenstoff scheint bis jetzt noch nicht geschmolzen worden zu seyn, wenigstens scheint die geschmolzene Masse, welche Silliman und Hare erhielten, als sie Graphit oder Holzkohle in den Kreis des Deflagrators brachten, wie dieses wenigstens Vannuxem fand, nicht geschmolzener Kohlenstoff zu seyn, sondern die Asche dieser kohligen Substanzen im geschmolzenen Zustande. Eher scheint noch die Verdampfung des Kohlenstoffes im elektrischen Kreise des Deflagrators erwiesen zu seyn, sofern nach den Versuchen von Hare und Silliman, wenn man an jeden Polardraht einen zugespitzten Cylinder von Holzkohle befestigt, beide Spitzen erst in Berührung setzt, dann nach erfolgtem heftigen Glühen etwas von einander entfernt, ein lebhaft leuchtender Flammenbogen mit aufsteigendem weifsen Rauche entsteht und, während die Kohle der positiven Seite schnell ihre Spitze verliert, sich an der der negativen ein öfters abbrechender und sich wieder erneuernder Anwuchs bildet, welcher unter dem Vergröfserungsglase eine warzige, glatte, metallglänzende, grauschwarze Oberfläche zeigt, schnell in Vitriolöl niedersinkt und in der Hitze langsam, unter Erzeugung von Kohlensäure und bisweilen unter Rücklassung von Asche verbrennt.

Die Verbindungen des Kohlenstoffes mit dem Sauerstoff sind das Kohlenoxyd und die Kohlensäure.

Das *Kohlenoxyd* (6 Kohlenstoff auf 8 Sauerstoff) bildet sich beim Glühen von Kohle mit Zinkoxyd und andern Metalloxyden, die den Sauerstoff nicht zu lose enthalten, und beim Glühen von Kohlensäure oder kohlensaurem Alkali mit Kohle oder Eisen.

1 Vergl. dieses Wörterb. Th. I. S. 86.

Es erscheint als ein farbloses Gas von 0,9706 specifischem Gewichte, von schwachem Geruch, beim Einathmen von sehr erstickender Wirkung. Es wird wenig vom Wasser verschluckt. Setzt man ein Maſs dieser Gasart mit einem gleichen Maſse Chlorgas gemengt dem Lichte aus, so verliert das Gemenge seine gelbe Farbe, verdichtet sich auf die Hälfte und ist in das *Phosgengas* verwandelt, welches ein spec. Gewicht von 3,4249 besitzt, noch erstickender und unangenehmer als Chlor riecht und die Augen zum Thränen reizt und welches sich in Berührung mit Wasser in Salzsäure und Kohlensäure zersetzt.

Die *Kohlensäure*, *Luftsäure* oder *fixe Luft* (6 Kohlenstoff auf 16 Sauerstoff) bildet sich vorzüglich beim Verbrennen kohlenstoffhaltiger Körper in Luft oder Sauerstoffgas. Diamant und Graphit bedürfen zum Verbrennen einer viel stärkern Glühhitze als Kohle. Die Verbrennung ist besonders im Sauerstoffgas sehr lebhaft und geht beim Diamant bis zum Schmelzen des Platins, worauf er sich befindet. Im Sauerstoffgas fährt der Diamant, nachdem er einmal entzündet ist, zu brennen fort; in atmosphärischer Luft erlöscht er, wenn man nicht ihn zu erhitzen fortfährt, wegen der erkältenden Wirkung des in der Luft enthaltenen Stickgases. Das durch das Verbrennen von Diamant in Sauerstoffgas erzeugte kohlensaure Gas hat dasselbe Volumen, wie das verbrauchte Sauerstoffgas, und es kann daher das kohlensaure Gas angesehen werden als Sauerstoffgas, in welchem sich Kohlenstoff gelöset hat, ohne daſs irgend eine Volumensänderung des Gases eingetreten wäre. Ein Gemenge aus 1 Maſs Kohlenoxydgas und $\frac{1}{2}$ Maſs Sauerstoffgas, verpufft durch den elektrischen Funken oder einen flammenden Körper mit unmerklichem Knalle und liefert 1 Maſs kohlensaures Gas. Man verschafft sich die Kohlensäure durch Zersetzung eines kohlensauren Salzes, wie des kohlensauren Ammoniaks oder Kalkes mittelst einer stärkern Säure. Erfolgt diese Operation in dem einen Ende einer starken zugeschmolzenen Glasröhre, während das andere Ende erkältet wird, so sammelt sich im letzteren die Kohlensäure als eine wasserhelle, tropfbare Flüssigkeit an, in groſser Kälte nicht erstarrend, das Licht viel schwächer brechend als Wasser[1]. Unter gewöhnlichem Luftdrucke entwickelt sich die Kohlensäure als ein farbloses Gas, von 1,5252 specifischem Ge-

1 Vergl. oben Th. IV. S. 1020.

wichte, unverbrennlich, das Verbrennen anderer Körper nicht unterhaltend, Lackmustinctur schwach röthend, von stechendem Geruch und sehr erstickender Wirkung beim Einathmen. Nur wenige Stoffe, wie Kalium, Natrium und, bei Gegenwart einer stärkern Salzbasis, auch Phosphor und Boron, vermögen der Kohlensäure den Sauerstoff zu entziehen und den Kohlenstoff in Gestalt einer kohligen Materie abzuscheiden.

Das kohlensaure Gas ist in Wasser zu gleichen Maſsen absorbirbar[1]; das natürliche und künstliche *Sauerwasser* ist durch verstärkten Druck mit gröſseren Mengen von Kohlensäure verbundenes Wasser, welches auſserdem noch einige Salze enthält. Die Verbindungen der Kohlensäure mit Salzbasen sind nicht sehr innig; die Glühhitze treibt aus den meisten derselben und stärkere Säuren treiben aus allen die Kohlensäure aus; sie brausen daher mit tropfbar flüssigen Säuren auf. Die Verbindungen der Kohlensäure mit Ammoniak, Kali, Natron und Lithon reagiren noch alkalisch, weil die schwache Säure nicht im Stande ist, diese stärkeren Basen zu neutralisiren. Die meisten kohlensauren Salze sind nicht in Wasser löslich, auſser bei Ueberschuſs an Kohlensäure.

Mit Wasserstoff bildet der Kohlenstoff das *ölerzeugende* und das *Kohlenwasserstoffgas*. Das ölerzeugende Gas (6 Kohlenstoff auf 1 Wasserstoff) entsteht bei der Zersetzung verschiedener organischen Verbindungen und wird vorzüglich erhalten durch Erhitzen von 1 Weingeist mit 4 Vitriolöl und Schütteln des entwickelten Gases mit Wasser und Kali, um es von Aether und schwefeliger Säure zu befreien. Es ist farblos, von 0,9706 specifischem Gewicht und starker lichtbrechender Kraft; es zeigt einen unangenehmen Geruch und wirkt beim Einathmen in reinem Zustande sehr erstickend. 1 Maſs dieses Gases hält 2 Maſs Wasserstoffgas; wird es daher durch Glühhitze oder öfteres Hindurchschlagen elektrischer Funken veranlaſst, seinen Kohlenstoff abzusetzen, so zeigt es sich in reines Wasserstoffgas von verdoppeltem Umfange verwandelt. Es verbrennt, an der Luft entzündet, mit äuſserst lebhafter Flamme; ein Gemenge von 1 Maſs ölerzeugendem und 3 Maſs Sauerstoffgas, durch den elektrischen Funken in einer dicken Röhre (die hierbei leicht zerschmettert wird) entzündet, verwandelt sich in Wasser und in

1 Vergl. oben Th. I. S. 46 ff.

2 Maſs kohlensaures Gas. Bringt man zu einem Gemenge desselben mit Chlorgas einen flammenden Körper, so verbreitet sich eine dunkle Flamme durch das Gefäſs, unter Bildung von Salzsäure und reichlichem Absatz von Ruſs. Von diesem Gase absorbirt das Wasser nur $\frac{1}{8}$ Maſs; es verdichtet sich, mit gleich viel Chlorgas gemengt, allmälig zu einem farblosen Oele von 1,22 specifischem Gewicht von angenehm ätherischem Geruch und süſsem gewürzhaftem Geschmack.

Das *Kohlenwasserstoffgas* (6 Kohlenstoff auf 2 Wasserstoff) entsteht ebenfalls bei verschiedenen Zersetzungen organischer Körper und wird am reinsten erhalten, wenn man das durch Verwesung organischer Stoffe in stehendem Wasser entstehende und beim Aufrühren sich erhebende Gas, die *Sumpfluft*, von der beigemengten Kohlensäure durch Schütteln mit einem wässerigen Alkali befreiet. Es ist farblos, von 0,5546 specifischem Gewicht, brennbar, von schwachem unangenehmem Geruch und irrespirabel. 1 Maſs dieses Gases hält ebenfalls 2 Maſs Wasserstoffgas, jedoch nur halb so viel Kohlenstoff als 1 Maſs ölerzeugendes Gas; es setzt diesen Kohlenstoff ebenfalls beim Einwirken der Glühhitze oder elektrischer Schläge ab. An der Luft entzündet verbreitet es kein so lebhaftes Licht wie das ölerzeugende Gas, jedoch ein weit lebhafteres, als das reine Wasserstoffgas und das Kohlenoxydgas; 1 Maſs desselben verzehrt, in der Verpuffungsröhre entzündet, 2 Maſs Sauerstoffgas und erzeugt 1 Maſs kohlensaures. Das Kohlenwasserstoffgas wird nur zu $\frac{1}{27}$ Maſs vom Wasser verschluckt.

Man kennt 3 Verbindungen des Chlors mit Kohlenstoff, welche sämmtlich flüchtig und nicht in Wasser, aber in Weingeist, Aether und Oelen löslich sind.

Der *Halb-Chlor-Kohlenstoff* (6 Kohlenstoff auf 17,7 Chlor) ist eine weiſse, nadelförmige, bei 175 bis 200° schmelz- und verdampfbare Materie von eigenthümlichem Geruche. Der *Einfach-Chlor-Kohlenstoff* (6 Kohlenstoff auf 35,4 Chlor) ist eine wasserhelle Flüssigkeit von 1,553 specifischem Gewicht, deren Siedepunct bei 71 bis 77° liegt. Der *Anderthalb-Chlor-Kohlenstoff* (6 Kohlenstoff auf 53,1 Chlor) krystallisirt in wasserhellen, geraden, rhombischen Säulen, zeigt ein specifisches Gewicht von 2,0 und eine lichtbrechende Kraft von 1,5767, schmilzt bei 160°, siedet bei 182° C und zeigt einen starken campherartigen Geruch. — Auch mit Brom und mit Iod liefert der Koh-

lenstoff krystallinische, leicht schmelzbare und verdampfbare Verbindungen von gewürzhaftem Geruch.

Der *Schwefelkohlenstoff* oder *Schwefelalkohol* (6 Kohlenstoff auf 32 Schwefel) entsteht, wenn Kohle in der Glühhitze mit Schwefel zusammen kommt, und wird erhalten, theils indem man ein Gemenge von Kohle und Schwefelkies in einer irdenen Retorte destillirt, theils indem man über gröblich verkleinerte Kohle, welche in einer gufseisenen, irdenen oder beschlagenen gläsernen Röhre bis zum Glühen erhitzt ist, Schwefel hinwegleitet. Die Kohle mufs durch kurz vorhergegangenes Glühen von aller Feuchtigkeit befreiet seyn, damit sich nicht zuerst viel Schwefel in hydrothionsaures Gas verwandelt; der in der kalt gehaltenen Vorlage verdichtete Schwefelkohlenstoff ist durch gelindes Destilliren von dem im Ueberschufs aufgelösten Schwefel zu befreien. Der Schwefelkohlenstoff ist eine dünne, wasserhelle Flüssigkeit von 1,272 specifischem Gewicht, von starker lichtbrechender Kraft, noch bei — 52° nicht gefrierend. Er siedet bei 46,6° und verdampft auch in viel niedrigerer Temperatur in lufterfülltem oder luftleerem Raume unter bedeutender Kälteerzeugung. Er hat einen widrigen Geruch und einen brennend-gewürzhaften Geschmack. Er verbrennt, an der Luft entzündet, mit heller Flamme zu Kohlensäure und schwefeliger Säure. Er löst den Phosphor schnell und reichlich zu einer farblosen Flüssigkeit auf, welche, an Papier gebracht, sich an der Luft in einigen Minuten entzündet (die neuere Angabe Gannal's, dafs der Phosphor aus dem Schwefelkohlenstoff den Kohlenstoff in Gestalt kleiner Diamantkrystalle ausscheide, hat sich nicht bestätigt). Er löst das Iod mit lebhaft violetter Farbe, bildet mit Hydrothionsäure eine eigenthümliche rothbraune ölige Säure, und löset sich in Weingeist, Aether und Oelen, nicht im Wasser.

Mit dem Stickstoff bildet der Kohlenstoff das *Cyan* oder *Cyanogen* (12 Kohlenstoff auf 14 Stickstoff). Man erhält es in Gasgestalt durch Erhitzen des trockenen Cyanquecksilbers; wird jedoch die Operation in einer zugeschmolzenen Glasröhre vorgenommen, so verdichtet es sich im abgekühlten Ende derselben zu einer dünnen, farblosen Flüssigkeit, noch bei — 17,8° C. nicht gefrierend, von ungefähr 0,9 specifischem Gewichte. Als Gas erscheint das Cyan farblos, von 1,8026 specifischem Gewichte und von sehr stechendem, eigenthümlichem Geruche. Es ent-

hält in 1 Maſs auch 1 Maſs Stickgas. An der Luft entzündet verbrennt es mit kermesinrother Flamme; mit Sauerstoffgas gemengt und durch den elektrischen Funken in der Glasröhre verpufft, wobei diese oft zerschmettert wird, verbraucht 1 Maſs Cyangas 2 Maſs Sauerstoffgas und zerfällt damit in 1 Maſs Stickgas und 2 Maſs kohlensaures Gas. Ein Maſs Wasser verschluckt 4,5 Maſs Cyangas; doch bräunt sich die anfangs farblose Flüssigkeit bald durch Zersetzung des Cyan's. Auch Weingeist, Aether und Oel absorbiren das Cyangas. Die *Cyanmetalle* erhält man vorzüglich durch Zusammenbringen von Blausäure mit Metalloxyden und Abdampfen. Sie halten theils bei abgehaltener Luft die Glühhitze aus, wie das Cyankalium, theils entwickeln sie hierbei Stickgas, während Metall und Kohle bleibt, wie das Cyaneisen, theils entwickeln sie das unzersetzte Cyan, während reines Metall bleibt, wie das Cyanquecksilber. Die Cyanmetalle haben Neigung sich unter einander zu vereinigen. Lösen sie sich in Wasser auf, so läſst sich diese Auflösung als die von blausaurem Metalloxyd betrachten, und die meisten entwickeln auch, mit wässeriger Salzsäure übergossen, Blausäure.

Die übrigen wichtigeren Verbindungen des Cyan's sind: die *cyanige Säure*, die *Knallsäure*, die *Cyansäure*, die *Blausäure*, das *Chlorcyan*, das *Schwefelcyan*, die *Schwefelblausäure*, die *Hydrothion-Schwefelblausäure* und das *hydrothionsaure Cyan*.

Die *cyanige Säure* (26 Cyan auf 8 Sauerstoff) ist eine wasserhelle, sehr flüchtige Flüssigkeit von stechend saurem Geruch, stark zu Thränen reizend, die sich mit Wasser sogleich unter Erhitzung in kohlensaures Ammoniak zersetzt. Die cyanigsauern Salze verpuffen nicht in der Hitze und einige halten bei abgehaltener Luft und Feuchtigkeit die Glühhitze ohne Zersezzung aus.

Die *Knallsäure* scheint dieselbe Zusammensetzung zu haben, wie die cyanige Säure, ohne daſs man bis jetzt den Grund anzugeben weiſs, warum sich ihre Salze so verschieden von denen der cyanigsauern verhalten. Die knallsauern Salze verpuffen nämlich alle sehr heftig in der Hitze und zu ihnen ist das *Howardsche Knallsilber* und *Knallquecksilber* zu rechnen.

Die *Cyansäure* (26 Cyan auf 16 Sauerstoff) krystallisirt bei der Sublimation in harten farblosen Nadeln und aus der Auflösung in heiſsem Vitriolöl in Quadratoktaedern. Sie verdampft etwas

über dem Siedepuncte des Quecksilbers, zeigt keinen deutlich sauern Geschmack und wirkt zu 2 Granen nicht giftig auf kleine Thiere. Sie löset sich wenig in Wasser und schiefst daraus in wasserhaltenden, durchsichtigen, schiefen rhombischen Säulen an; in kochender Salpetersäure und Schwefelsäure löset sie sich ohne Zersetzung. Die cyansauern Salze verpuffen nicht in der Hitze und werden durch Erhitzen mit Wasser nicht zersetzt.

Die *Blausäure* (26 Cyan auf 1 Wasserstoff) findet sich bereits gebildet und mit flüchtigem Oele verbunden in denjenigen Pflanzentheilen, welche einen Bittermandel-Geruch und Geschmack besitzen. Man stellt sie theils durch Destillation des blausauern Eisenoxydul-Kali's mit wässeriger Schwefelsäure dar, theils durch Destillation des Cyanquecksilbers mit Salzsäure oder Hindurchleiten von hydrothionsauerem Gas durch in Wasser gelöstes Cyanquecksilber. Im durch Chlorkalium entwässerten Zustande ist sie eine wasserhelle Flüssigkeit, von 0,7 specifischem Gewichte, deren Siedepunct schon bei 26,5° C. liegt, Lackmus kaum röthend, von starkem Bittermandel-Geruch, eigenthümlich bitterm und scharfem Geschmack und höchst giftiger, narkotischer Wirkung. Die Blausäure verbrennt, an der Luft entzündet, mit Flamme zu Wasser, kohlensauerem und Stickgas. Sie bräunt und verdickt sich bei längerem Aufbewahren unter Bildung von Ammoniak und von einer braunen Substanz, dem Stickkohlenstoff. Die Blausäure mischt sich nach jedem Verhältnifs mit Wasser und Weingeist. Sie liefert mit den Salzbasen die blausauern Salze, welche oft schon beim Krystallisiren oder gelinden Erwärmen in Cyanmetalle übergehen und welche grofse Neigung haben, sich unter einander zu blausauern Doppelsalzen zu vereinigen, von denen das blausaure Eisenoxydul-Kali das bekannteste ist.

Das *Einfach-Chlorcyan* (26 Cyan auf 35,4 Chlor) krystallisirt bei — 18° C. in langen durchsichtigen Nadeln, schmilzt bei — 12 bis 15° C., ist bei gewöhnlicher Temperatur gasförmig und zeigt bei + 20° eine Spannung von 4 Atmosphären. Es riecht unerträglich und erregt Thränen, es wirkt sehr ätzend auf die Haut und ist höchst giftig. Das *Doppelt-Chlorcyan* (26 Cyan auf 70,8 Chlor) krystallisirt in weifsen glänzenden Nadeln von 1,32 specifischem Gewicht, bei 140° C. schmelzend und bei 190° siedend; es riecht nach Chlor und nach Mäusen,

hat einen schwachen Geschmack, wirkt höchst giftig und zerfällt mit Wasser allmälig in Salzsäure und Cyansäure.

Das *Schwefelcyan* (26 Cyan auf 32 Schwefel) fällt beim Behandeln des wässerigen schwefelblausauern Kali's mit Chlor oder Salpetersäure als ein pomeranzengelbes Pulver nieder. Die *Schwefelblausäure* (58 Schwefelcyan auf 1 Wasserstoff) kennt man in Verbindung mit Wasser und Salzbasen. Sie wirkt gleich der Blausäure stark narkotisch-giftig, röthet Lackmus stärker als diese und zeigt einen sauern, nicht den bittermandelartigen, Geschmack; sie wird durch die lebhafte gelbrothe Färbung erkannt, welche sie Eisenoxydsalzen ertheilt; ihre Verbindungen mit Metalloxyden gehen beim Erhitzen in Schwefelcyan-Metalle über. Mit Hydrothionsäure erzeugt sie die *Hydrothion-Schwefelblausäure*, welche eine wasserhelle, ölige, leicht zersetzbare Flüssigkeit darstellt.

Beim Zusammenbringen von Cyangas mit hydrothionsauerem Gas verdichten sich diese beiden Gase zu krystallinischem *hydrothionsauerem Cyan*, welches bei weniger Hydrothionsäure gelb und leicht im Wasser löslich, bei mehr Hydrothionsäure gelbroth und schwierig im Wasser löslich ist.

G.

Koluren.

Coluri; Colures; *Colures*; sind zwei auf der Himmelskugel durch beide Pole gehende Kreise, deren einer durch die beiden Nachtgleichenpuncte, der andere durch die beiden Sonnenwendepuncte geht; jener heiſst der Kolur der Nachtgleichen (*colurus aequinoctiorum; colure des équinoxes*), der andere der Kolur der Sonnenwenden (*colurus solstitiorum; colure des solstices*). Als Ursprung des Wortes giebt Kepler[1] Folgendes an: das griechische Wort *κόλουρος* (von *κόλος* verstümmelt, *οὐρά* der Schwanz) beziehe sich hier darauf, daſs wir diesen Kreis immer nur verstümmelt, nämlich sein dem unteren Pole nächstes Ende nicht, sehen. *B.*

1 Epitome L. II. N. IX. X.

Komet.

Cometa, stella caudata vel crinita; Comète; *Comet.*

Kometen oder Cometen (von κόμη das Haar, daher κομήτης sc. ἀστήρ behaarter Stern, oder von *coma* das Haar, weswegen auch Haarstern, Schwanzstern genannt) sind diejenigen Sterne, welche durch eine neblige Umhüllung, oft durch einen langen, glänzenden Schweif, sich von den übrigen Sternen unterscheiden. Da sie auf ihrer sehr excentrischen Bahn um die Sonne nur kurze Zeit der Erde nahe genug kommen, um von uns beobachtet zu werden, so hat man sie lange Zeit als ganz zufällige Erscheinungen, als Meteore, angesehen, die überhaupt nur von kurzer Dauer wären. Gewöhnlich bemerkte man sie in den frühern Zeiten erst dann, wenn sie sehr glänzend am Himmel standen, und ward daher verleitet, sie für plötzlich entstanden anzusehen; indeſs hätte die bei ihrem Verschwinden doch so oft gemachte Beobachtung, daſs sie eine sehr langsame scheinbare Bewegung zeigen, wenn sie an Gröſse abnehmen, zu dem Schlusse führen sollen, daſs beide Umstände eine zunehmende Entfernung von der Erde anzeigten und ihr Unsichtbarwerden kein Verschwinden sey, sondern nur durch einen zu groſsen Abstand von uns und von der Sonne hervorgebracht werde. Diese Bemerkung mag es auch gewesen seyn, die schon die Pythagoräer veranlaſste, sie für dauernde Weltkörper zu halten [1], obgleich die Meinung, daſs sie Meteore wären, sich noch bis in späte Zeiten bei andern Astronomen erhalten hat. Seneca zweifelte nicht daran, daſs sie als dauernde Weltkörper bestimmte Bahnen durchlaufen [2]; aber selbst Kepler, der ihnen eine geradlinige Bewegung beilegte, konnte sich von der Vorstellung, daſs sie veränderliche Erscheinungen wären, nicht losreiſsen [3].

Bahnen der Kometen.

Aus den älteren Zeiten sind uns zwar viele Nachrichten von Kometen aufbehalten worden, aber nur für wenige derselben sind

1 Plutarch. de plac. philos. III. 2.

2 Quaest. nat. VII. 13.

3 Kepler de Cometis. Aug. Vind. 1619. Vgl. Montucla hist. d. Math. II. 621.

sie so beschaffen, dafs sich eine selbst nur wenig zuverlässige Berechnung ihrer Bahn daraus ableiten läfst. Was man von diesen frühern Kometen auffinden konnte, ist von mehreren Schriftstellern gesammelt worden, und vorzüglich haben Riccioli[1], Lubienitzki[2] und Hevel[3] vieles zusammengetragen, die letzten beiden aber auch mit unerträglicher Weitschweifigkeit die unnützesten Dinge mit aufgenommen.

Da von der Berechnung der Bahn schon im Art. *Bahn* gehandelt worden ist und dort auch die frühern Meinungen über diesen Gegenstand angeführt worden sind[4], so will ich hier nur noch bemerken, dafs Halley zuerst für ältere Kometen die Bahnen zu berechnen suchte und bej aller Unvollkommenheit der Beobachtungen doch eine ziemliche Anzahl von Kometen fand, deren Bahnen sich, als parabolisch betrachtet, bestimmen liefsen[5]; dafs später vorzüglich Pingré[6] sich mit der Berechnung älterer Kometen beschäftigt hat, und dafs, nachdem von neuern Beobachtern und Berechnern zahlreiche Beiträge geliefert worden waren, Olbers das vollständigste Verzeichnifs der berechneten Bahnen, mit den nöthigen Nachweisungen über die Quellen, mitgetheilt hat[7].

Unter den 129 Kometen, deren Bahnen dort angegeben sind, und den seitdem noch bekannt gewordenen spätern Kometen sind nur wenige, deren Bahnen hier näher erwähnt werden müssen. Schon Halley erkannte, dafs die Kometen, von denen sich in den Jahren 1456, 1531, 1607, 1682 Beobachtungen finden, nicht verschiedene Weltkörper waren, sondern dafs derselbe Komet, in 75 Jahren einen Umlauf um die Sonne vollendend, mehrmals beobachtet worden sey. Halley's Berechnung ergab[8], dafs dieser Komet sich der Sonne bis auf 12 Mill. Meilen

1 Almag. nov. Bononiae 1651.

2 Theatr. cometarum. Lugd. Bat. 1681.

3 Cometographia. Gedani 1668.

4 Th. I. S. 680.

5 Tabulae astronomicae. Lond. 1752. 4.

6 Cometographie. 2 Tomes. Paris 1765.

7 Schumacher's astron. Abhandl. 1. u. 3. Hft.

8 Tab. astron., wo sich eine Abh. de motu cometarum elliptico findet, in welcher Halley umständlich die Gründe für jene Behauptung angiebt.

nähere und sich bis auf 730 Millionen Meilen von ihr entferne. Sein Wiedererscheinen am Ende des Jahres 1758 und im Jahre 1759 bestätigte diese Meinung vollkommen [1], und es läfst sich mit Sicherheit erwarten, dafs er im Jahre 1835, wo er nach Damoiseau am 16. Nov. seine Sonnennähe erreichen wird [2], vor der Sonnennähe am besten sich den Bewohnern der Erde wieder zeigen wird.

Für den im Jahre 1815 beobachteten Kometen, den Olbers entdeckte, fand Bessel, dafs die Beobachtungen eine ziemlich kurze elliptische Bahn und eine Umlaufszeit von 74 Jahren andeuten, in welcher der Komet in der Sonnennähe 25, in der Sonnenferne 710 Millionen Meilen von der Sonne entfernt ist [3].

Weit merkwürdiger ist noch der Enkesche Komet. Am 26. Nov. 1818 ward nämlich ein Komet von Pons entdeckt, aus dessen scheinbarem Laufe Enke sehr bald fand, dafs er sich in einer sehr kurzen Ellipse in 4 bis 5 Jahren um die Sonne bewege. Er fand, dafs die Elemente der Bahn mit den für einen Kometen von 1805 gefundenen Elementen, der auch von der Parabel abzuweichen schien, nahe übereinstimmten, und dafs die Differenzen bei gehöriger Rücksicht auf die Perturbationen sich noch vermindern würden. Olbers fügte hierzu die Bemerkung, dafs der Komet von 1795 wohl eben dieser Weltkörper seyn könnte, und dafs der im Jahre 1786 von Messier beobachtete Komet, dessen Bahn, weil er nur an 2 Tagen beobachtet worden war, sich gar nicht hatte berechnen lassen, gerade da erschienen sey, wo dieser Komet erscheinen mufs, wenn er im Januar seine Sonnennähe erreicht. Enke zeigte nun durch genaue Berechnung, dafs dieser Komet wirklich in den angeführten Jahren beobachtet worden sey und dafs er im Jahre 1822 seine Sonnennähe abermals erreichen, dann aber in unsern nördlichen Gegenden nicht gut sichtbar seyn, wohl aber auf der südlichen Halbkugel beobachtet werden könne. Wirklich wurde er am 2. Jun. 1822 von Rümker in Paramatta entdeckt und dann anhaltend beobachtet; sein Lauf stimmte mit der Enkeschen Vorausberechnung vollkommen überein, und Enke gründete auf diese Beobachtun-

1 Vgl. Astr. Jahrb. 1828. S. 144.

2 Annales de Ch. et de Phys. IX. 193.

3 Abh. der Berlin. Acad. für 1812. S. 119. Astron. Zeitschr. I. 283. 350.

gen eine neue Vorausberechnung auf das Jahr 1825, die mit den in diesem Jahre von vielen Astronomen angestellten Beobachtungen so vollkommen zusammentraf, dafs sie als das glänzendste Beispiel astronomischer Berechnungen allgemeine Bewunderung erregte. Auch im Jahre 1828 hat sich die Vorausberechnung bei abermaliger Erscheinung des Kometen bewährt[1]. Dieser Komet vollendet in 3 Jahren 110 Tagen einen Umlauf um die Sonne und nähert sich ihr auf $6\frac{1}{2}$ Millionen Meilen, statt dafs der entfernteste Theil seiner Bahn 85 Millionen Meilen (nicht so weit als Jupiter) von der Sonne entfernt ist. Die genaue Berechnung dieser wiederholten Umläufe zeigte, dafs man bei diesem Kometen eine kleine, nicht in der Theorie der Attraction begründete Correction anbringen mufste, um die Beobachtungen darzustellen. Es scheint eine Verzögerung der Rückkehr zum Perihelio statt zu finden, die mit Abnahme der Excentricität der Bahn verbunden ist und die ganz das Ansehen hat, als ob sie von einem Widerstande des Aethers hervorgebracht würde; und ein solcher Widerstand wäre hier wohl nicht so ganz unerwartet, da ein so wenig dichter Weltkörper, wie es dieser Komet gewifs ist, weit mehr die Folgen vom Widerstande eines vorhandenen Aethers zeigen mufs, als die so sehr viel Masse enthaltenden Planeten. Dafs der Komet namentlich in der Materie des Zodiakallichtes, durch welche er sich fortbewegt und die wohl eine in Vergleichung gegen den Kometen nicht ganz unerhebliche Dichtigkeit haben mag, einen Widerstand leiden könne, darauf hat besonders Olbers aufmerksam gemacht.

Noch ein Komet von kurzer Umlaufsperiode ist im Jahre 1826 bekannt geworden. Schon früher hatte der am Ende des Jahres 1805 erschienene kleine Komet die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich gezogen und vorzüglich hatte Gauss über ihn die doppelte Bemerkung gemacht[2], dafs sein scheinbarer Lauf stark von einer Parabel abweiche und dafs seine Bahn sehr nahe mit derjenigen übereinstimme, in welcher der Komet von 1772 sich bewegte. Da sich indefs über die Periode der Wie-

1 Astr. Jahrb. 1822. S. 195. 1823. S. 211. 1826. S. 106. 129. 1828. S. 200. De Zach corr. astr. XIII. 183. 382. Schumacher's Astron. Nachr. Nr. 148. 150. 162.

2 De Zach Mon. Corr. XIII. 85. XIV. 78.

derkehr und den Grund der Ungleichheit in den Elementen beider Bahnen nichts mit Gewifsheit schliefsen liefs, so blieb die Frage, ob ein und derselbe Komet zweimal beobachtet worden sey, damals unentschieden. Erst 1826, als im März ein Komet erschien, dessen Bahn mit den Bahnen jener beiden Kometen nahe übereinstimmte, machte von Biela bekannt, dafs er die Rückkehr dieses Kometen vermuthet habe. Er hatte also, wie es scheint, die Zwischenzeit vom Februar 1772 bis zum Ende Decembers 1805 als einen Zeitraum mehrerer Umläufe betrachtet und bemerkt, dafs eine Umlaufszeit von 6 Jahren und 9 Monaten in jener Zwischenzeit 5 mal aufgehe, eine solche Umlaufszeit aber den Kometen zum dritten Male seit 1805 im März 1826 in die Sonnennähe bringe. Die Beobachtungen von 1826 zeigten auch zwei andern Berechnern, Clausen und Gambart, dafs der Komet sich in einer Ellipse von 6¾ Jahren bewege, und so haben alle drei einen Antheil an der Entdeckung, dafs auch dieser Komet eine so kurze Periode hat[1]. Die Sonnennähe dieses Kometen liegt der Erdbahn sehr nahe und in der Sonnenferne erreicht er eine Entfernung von 127 Millionen Meilen. Da derselbe bei seiner Sonnennähe der Erdbahn sehr nahe kömmt, so ist ein sehr nahes Zusammentreffen mit der Erde selbst möglich; bei seinem letzten Erscheinen war der kleinste Abstand seiner Bahn von der Erdbahn nur 66 Erddurchmesser, aber die Erde befand sich weit von diesem Puncte entfernt. Käme er gerade am Anfange des Decembers in der Gegend seiner Bahn an, welche der Erdbahn so nahe ist, so würde er sehr in der Nähe der Erde, die sich an diesen Tagen in eben der Gegend befindet, vorbeigehen, so wie es schon einigermafsen 1805 der Fall war. Für seine nächste Wiederkehr giebt Olbers, zum Theil nach Damoiseau's Berechnungen, folgende Bestimmungen[2]. Der Komet gelangt am 28. Nov. 1832 zum Perihelio und seine Bahn ist in dem nächsten Puncte nur 4⅔ Erdhalbmesser von der Erdbahn entfernt, aber der Komet erreicht diesen Punct schon am 29. Oct., statt dafs die Erde erst am 30. Nov. dahin gelangt. Ein nahes Zusammentreffen beider Weltkörper ist also sobald wenigstens nicht möglich.

Als einen merkwürdigen Kometen von kurzer Umlaufszeit

1 Schumacher's astr. Nachr. IV. 466. 470.

2 Schumacher's astr. Nachr. Nr. 128. Astr. Jahrb. 1829. S. 124. 144.

mufs ich noch den von 1770 erwähnen, dessen damalige Bahn eine in $5\frac{1}{2}$ Jahren zu durchlaufende Ellipse war, der aber, wie Laplace gezeigt hat, durch Störungen des Jupiter im Jahre 1767 in diese Bahn gezogen und im Jahre 1779 durch ähnliche Störungen wieder in eine viel weitere Bahn versetzt wurde[1].

Von andern Kometen, deren Umlaufszeit man berechnet hat, kann ich hier, der Kürze wegen, nichts anführen, sondern mufs auf die oben erwähnte Olberssche Tafel verweisen.

Ob alle Kometenbahnen Ellipsen sind, ist ungewifs; bei einigen wenigen scheint die Abweichung von der Parabel so zu seyn, dafs man die Bahn für hyperbolisch halten müfste. Namentlich ist dieses bei dem Kometen von 1771 und dem zweiten von 1818 der Fall[2].

Die Bahnen der Kometen sind aber nicht blofs darin sehr ungleich, dafs einige ziemlich kurze, andere so lange Ellipsen sind, dafs die Umlaufszeit mehrere Jahrtausende beträgt, andere endlich vielleicht gar Hyperbeln seyn mögen, sondern auch in Rücksicht der Abstände, welche die Kometen in der Sonnennähe erreichen, findet sich die gröfste Ungleichheit. Der Komet, welcher unter den berechneten der Sonne am nächsten gekommen ist, war der von 1680, der bei seiner Sonnennähe nur 128000 Meilen vom Mittelpuncte der Sonne, also nur 32000 Meilen von ihrer Oberfläche entfernt blieb; der Komet von 1729 dagegen näherte sich ihr nicht weiter, als bis auf 84 Millionen Meilen, so dafs selbst die nächsten Theile seiner Bahn nur wenig innerhalb der Jupitersbahn liegen. In Rücksicht der Lage der Bahnen findet die mannigfaltigste Verschiedenheit, sowohl in der Lage der Knotenlinien, als in der Neigung, statt. Es giebt ungefähr eben so viele rückläufige als rechtläufige Kometen und der Neigungswinkel der Ebene ihrer Bahn ist bei einigen sehr nahe ein rechter Winkel.

Die Zahl der Kometen mufs sehr grofs seyn, denn da jetzt deren in jedem Jahre beobachtet werden, so läfst sich auf eine grofse Anzahl derer, die in unsern Gesichtskreis kommen, schliefsen, und sehr viele mögen ihre Umläufe um die Sonne so voll-

1 Eine nach Laplace's Angaben gezeichnete Figur in Brandes Vorles. über die Astronomie I. Tafel X. macht diefs noch deutlicher. Laplace Méc. cél. T. IV. p. 232.

2 Astr. Jahrb. 1824. S. 145. De Zach Corr. astr. V. 557.

enden, dafs sie auf der Erde nie sichtbar werden. Gewifs mufs ihre Anzahl in die Tausende gehen. Wie grofs der Raum ist, in welchen die Kometen kommen müssen, um uns sichtbar zu werden, darüber läfst sich, da er nach der Gröfse und dem Glanze der Kometen sehr ungleich seyn mufs, nichts bestimmen. Der grofse Komet von 1811 ward entdeckt, obgleich man von seiner Ankunft nichts wissen konnte, als er noch 56 Millionen Meilen von der Sonne und 40 Millionen Meilen von der Erde entfernt war, und er wurde im folgenden Jahre, als man seinen Ort kannte, noch wieder aufgefunden, als er 90 Millionen Meilen von der Sonne und 70 Millionen Meilen von der Erde entfernt war. Diese Entfernungen möchten auch wohl ungefähr die Grenzen seyn, über welche hinaus kaum noch eine Sichtbarkeit, wenigstens mit den gewöhnlichern Hülfsmitteln, statt findet.

Die Frage, ob je ein Komet mit der Erde zusammentreffen könne, hat mehrmals die Aufmerksamkeit des gröfsern Publicums auf sich gezogen. Jede Kometenbahn durchschneidet die Ebene, worin die Erdbahn liegt, in zwei Puncten; diese Puncte liegen in den meisten Fällen weit entfernt von der Erdbahn, indem es schon ein seltenes Zusammentreffen ist, wenn der Komet gerade dann, wenn er eben so weit als die Erde von der Sonne entfernt ist, von der nördlichen Seite der Ebene der Erdbahn zur südlichen, oder umgekehrt, übergeht; es ist also im Allgemeinen nur bei sehr wenigen Kometen die Möglichkeit eines nahen Zusammentreffens mit der Erde vorhanden, indem höchst selten einer jener Durchschnittspuncte in die Linie selbst, welche die Erde durchläuft, fallen wird. Aber wenn dieses auch der Fall ist, wie es bei dem Bielaschen Kometen beinahe zutrifft, so kann der Komet an 364 Tagen im Jahre durch diesen Punct gehen, ohne der Erde irgend nahe zu kommen, und nur wenn er an demselben Tage, wo die Erde sich in jenem Puncte befindet, dahin gelangt, kann er ihr nahe kommen. Ja diese Zeit ist noch in viel engere Grenzen eingeschlossen. Die Erde durchläuft 1000 Meilen in 4 Minuten; um der Erde bis auf 8000 Meilen nahe zu kommen, mufs der Komet also schon in jenem Puncte in eben der Stunde, in welcher die Erde ihn erreicht, ankommen. Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ist also in jedem Falle höchst gering. Das Jahr hat 8766 Stunden und unter diesen ist nur *eine*, die gefährlich seyn

könnte[1]. Auf diese Betrachtungen gründet sich diejenige Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche angiebt, wie viele Fälle des Nichtzusammentreffens dem einzigen Falle des Zusammentreffens gegenüber stehen. Dafs übrigens, selbst bei sehr bedeutender Annäherung des Kometen, die Erde von seiner anziehenden Kraft wenig Nachtheile erfahren würde, läfst sich bei der geringen Masse dieser Himmelskörper wohl mit Sicherheit annehmen. Nach LAPLACE's Berechnung[2] ist der Komet von 1770 sehr nahe an dem Jupiter und seinen Monden vorbeigegangen, ohne in deren Laufe merkliche Störungen zu bewirken.

Natur der Kometen.

Ueber die Natur der Kometen wissen wir so wenig, dafs wir selbst die wichtige Frage, ob sie mit eignem Lichte leuchten oder ihr Licht blofs von der Sonne empfangen, noch nicht vollkommen beantworten können. Für die Meinung, dafs sie selbst leuchtend sind, hat man angeführt, dafs man niemals sie halb erleuchtet oder Lichtphasen zeigend gesehen habe, dafs ihr Licht zuweilen zu glänzend sey, um für zurückgeworfenes gehalten zu werden, und dafs die Abnahme der Intensität ihres Lichtes nicht den zunehmenden Abständen von der Sonne angemessen sey. Dafs LAHIRE an dem Kometen von 1682, CACCIATORE an dem von 1819 Lichtphasen zu beobachten glaubten, kann hier nicht sehr in Betrachtung kommen, da in Rücksicht auf die ersteren Beobachtungen HOOKE's gleichzeitige Beobachtungen zeigen, dafs es keine Phasen eines kugelförmigen Kernes waren, was LAHIRE beobachtete, und CACCIATORE's Beobachtungen wohl Veränderungen im Kometen selbst andeuten können, aber nicht durch eine Erleuchtung von der Sonne erklärt werden, indem der am meisten erleuchtete Theil eine Zeit lang nicht gegen die Sonne zugekehrt war, sondern die durch die Hörner gezogene Linie nach dem Schweife zu ging[3]. Aber

1 Eine vollständige Beantwortung der Frage, welche Wahrscheinlichkeit ein Zusammentreffen eines Kometen mit der Erde habe, ist von OLBERS gegeben worden. V. Zach Mon. Corr. XXII. 409. und Schumacher astr. Nachr. Nr. 128. Unvollkommener hat DU SEJOUR eben die Frage beantwortet: Traité sur les comètes.

2 Mécan. cél. Tome IV. p. 232.

3 Ann. de Ch. et Phys. XIV. 217.

wenn gleich solche Lichtphasen nicht statt finden, so ist doch dieses darum kein Grund gegen eine Erleuchtung von der Sonne, weil vielleicht kein Komet einen so dichten kugelförmigen Kern hat, der einen Schatten werfen oder dessen von der Sonne abgekehrte Seite dunkel erscheinen könnte. Selbst der dichteste Theil des Kometen mag wohl als eine blofs verdichtete Dunstmasse durch und durch erleuchtet werden und daher nichts einer Phase Aehnliches darbieten.

Auf den grofsen Glanz des Kometen von 1807 hat besonders Schröter[1] viel Gewicht gelegt, um die Meinung, er habe eigenthümliches Licht gehabt, zu unterstützen. Aber Olbers bemerkt[2], dafs dieser allerdings unter den Kometen sich auszeichnende und mit vorzüglich lebhaftem Lichte glänzende Weltkörper doch weit hinter dem zurückblieb, was ein Planet in derselben Stellung hätte zeigen müssen. Nach der Entfernung von der Sonne, die er im Anfange seiner Erscheinung hatte, würde die Intensität seines Lichtes in jedem einzelnen Puncte 50 mal so grofs, als die des Jupiter gewesen seyn, wenn er das Licht eben so gut, als dieser, zurückgeworfen hätte; statt dessen aber war die beobachtete Intensität des Lichtes nur wenig gröfser, als die des Saturn. Und so ist, bemerkt Olbers, bei allen Kometen der Grad ihrer Helligkeit immer sehr geringe, wenn auch die gesammte Lichtstärke wegen der scheinbaren Gröfse ihres Lichtnebels zuweilen recht bedeutend ist.

Ueber die Zunahme der Erleuchtung bei der Annäherung zur Sonne und über die Abnahme derselben bei der gröfsern Entfernung von derselben läfst sich wegen der Veränderungen, die der Komet selbst erleidet und welche zuweilen höchst auffallend sind, nicht genau urtheilen. Indefs bemerkt Olbers in der schon angeführten Abhandlung, dafs die gesammte Lichtstärke keineswegs allein nach Mafsgabe des gröfsern Abstandes von der Erde, sondern vorzüglich auch nach Mafsgabe des gröfsern Abstandes von der Sonne abnehme und dafs insbesondere beim Verschwinden des Kometen nicht seine geringe scheinbare Gröfse, sondern das immer matter werdende Licht desselben die Ursache des Unsichtbarwerdens sey[3].

1 Ueber den grofsen Cometen von 1807 (Göttingen, Vandenhoek. 1811.) S. 74. 105.

2 Astr. Jahrb. 1819. S. 193.

3 Eben das bemerkt Flaugergues. Journ. de Phys. LXXXIV. 179.

Der bedeutendste Grund für ein eigenthümliches Licht des Kometennebels ist noch der von HERSCHEL mehrmals angeführte, daſs ein so dünner Nebel, der das Licht der Sterne ohne irgend eine merkliche Schwächung durchlasse, wohl nicht Sonnenlicht genug zurückwerfen könne, um uns sichtbar zu werden. Indeſs scheint doch auch dieses unerwiesen, und man kann wohl nicht anders, als OLBERS beistimmen, der die Kometen für an sich dunkle Körper hält, welche uus durch ein zurückgeworfenes Sonnenlicht sichtbar werden [1]. Und diese Meinung hat kürzlich eine neue Stütze durch ARAGO's Behauptung erhalten, daſs sich an dem Kometen von 1819 Spuren von Polarisirung des Lichtes zeigten, die sich nur bei reflectirtem Lichte so zeigen können [2].

Die eben schon erwähnte Frage, ob die Kometen einen festen Kern haben, ist zwar auch nicht gerade völlig entschieden, doch scheinen sich viele Gründe für die Meinung zu vereinigen, daſs selbst der glänzendste Theil des Kometen, den man als den eigentlichen Kern ansehen müſste, nur verdichteter Nebel ist. Die beste Gelegenheit, um hierüber zu entscheiden, wäre der Vorübergang eines Kometen vor der Sonne, wo ein undurchsichtiger Kern sich uns als dunkler Fleck zeigen müſste; aber eine solche Beobachtung eines Kometen vor der Sonne ist noch nicht mit Sicherheit oder wenigstens nicht mit Genauigkeit angestellt worden [3]. Der Komet, welcher im Juli 1819 beobachtet wurde, war, wie die nachherige Berechnung zeigte, am 26. Juni Morgens durch die Sonne gegangen; aber da dieses allen Beobachtungen des Kometen vorausging, so hatte niemand seine Aufmerksamkeit darauf richten können. Unter den Beobachtern, welche zufällig um diese Zeit die Sonne beobachteten, haben VON GRUITHUISEN, WILDT und PASTORF einen Fleck mitten in der Sonne gesehen, von welchem man glauben kann, daſs es der Komet gewesen sey, aber diese Beobachtungen sind zu unbestimmt, um viele Belehrung daraus herzunehmen [4]. Eine

1 SCHRÖTER hat mehrmals die entgegengesetzte Meinung geäuſsert, s. Beobacht. über den Cometen von 1811 (Göttingen 1815) S. 246, und ebenso HERSCHEL.

2 Biblioth. univers. XXXIV. p. 247. Annal. de Chim. et Phys. XIII. 108.

3 Vergl. Astr. Jahrb. 1804. S. 185. 208.

4 Schumacher astr. Nachr. Nr. 87. Astr. Jahrb. 1823. S. 138.

alte Angabe, als ob einmal ein Komet den Mond verdunkelt habe, ist als mifsverstanden nachgewiesen worden [1].

Der Umstand, dafs man nie den Schatten eines Kometenkernes oder eine unerleuchtete Seite wahrgenommen hat, macht es wahrscheinlich, dafs diese Kerne der Kometen entweder keine festen Körper sind, oder eine höchst unbedeutende Gröfse haben müssen. Dieses wird noch mehr dadurch bestätigt, dafs man zuweilen in dem Nebel des Kometen auch nicht eine Spur eines nur mit einigem Rechte so zu nennenden Kernes hat finden können, und dafs man mehrmals Fixsterne, selbst durch die Mitte des Kometen, erblickte. In dem Kometen vom December 1798 konnte Olbers gar keinen Kern entdecken, und der Kern, den Messier gesehen zu haben glaubt, konnte auch nur 27 Meilen Durchmesser haben. Bei Gelegenheit dieses Kometen bemerkt Olbers, dafs er nur in einem einzigen der bis dahin von ihm beobachteten Kometen einen Kern, den man für einen festen Körper halten konnte, gesehen habe, und in jenem einzigen Falle war es auch ein sehr schlecht begrenzter Kern, also vermuthlich kein fester Körper [2]. Olbers sah einen Stern 7ter bis 8ter Gröfse fast durch die Mitte des im Juni 1825 erschienenen Kometen, und das Licht dieses Sternes brachte ein beinahe völliges Unsichtbarwerden des Kometennebels hervor, während das Licht des Sternes ungeändert blieb [3]. Eben diese Sichtbarkeit von Sternen durch den Kometen hat öfter statt gefunden [4]. Als den mattesten Nebel, den je ein Komet ihm gezeigt habe, beschrieb Pons den Kometen vom Februar 1818 [5].

Bei andern Kometen hat man freilich einen ziemlich deutlichen Kern gesehen, aber meistens sehr klein, immer schlecht begrenzt und stets von viel matterem Lichte, als es dem von einem festen Körper zurückgeworfenen Sonnenlichte angemessen wäre. In dem Kometen vom December 1805, den ich unter dem Namen des Bielaschen angeführt habe, zeigte sich ein Kern,

1 De Zach Mon. Corr. XXIII. 196. De Zach Corresp. astronomique. VIII. 188. 390.

2 Astr. Jahrb. 1802. S. 200.

3 Astr. Jahrb. 1828. S. 151. Ebenso der Enkesche Komet. Schum. astr. Nachr. Nr. 154.

4 Mehrere Beispiele giebt von Zach an, Corresp. astron. VII. 232. VIII. 87., und Herschel Phil. Tr. 1795. p. 60. und 1807. p. 266.

5 Astr. Jahrb. 1821. S. 159.

den SCHRÖTER zu 30 Meilen Durchmesser berechnet [1]. In dem grösern Kometen von 1825 beobachtete HERSCHEL zwar einen Kern, der aber keinen lebhaften Glanz hatte, sondern schlecht begrenzt, doch nur als ein mehr glänzender Nebel erschien [2]. Selbst in dem grofsen Kometen von 1811 hatte der Körper, den HERSCHEL planetarisch nennt, nur etwa 100 Meilen im Durchmesser, und obgleich SCHRÖTER den Kern gröfser angiebt, so kann man doch den von ihm abgemessenen Körper wohl sicher nicht für einen festen Körper annehmen [3]. Mehr hervorglänzend zeigte sich ein Kern in dem Kometen vom Juli 1819 [4] und am meisten mit hellem Lichte in dem von 1807. Bei dem letztern findet sich, in Rücksicht auf die Bestimmung der scheinbaren Gröfse dieses Kernes, eben die Verschiedenheit zwischen HERSCHEL's und SCHRÖTER's Angaben, wie bei dem Kometen von 1811, indem HERSCHEL ihm nur einen Durchmesser $= \frac{1}{15}$ des Erddurchmessers beilegt, SCHÖTER dagegen seinen Durchmesser nahe an 1000 Meilen findet [5]. Welche Angabe man aber auch annimmt, so bleibt die Vermuthung, dafs dieser Kern kein fester Körper seyn konnte, weil sein Glanz dazu nicht lebhaft genug war, immer gleich beachtenswerth. Als eine noch ganz einzeln dastehende Beobachtung, die vielleicht auch mehr die neblige Hülle, als den Kern des Kometen betrifft, erwähne ich hier noch DUNLOP's Behauptung, dafs die periodisch wiederkehrenden gleichen Erscheinungen des einen Kometen von 1825 auf eine Rotation in 19 St. 36′ hindeuteten und dafs die Rotationsaxe in der Richtung des Schweifes lag [6].

In Rücksicht ihrer übrigen Beschaffenheit scheinen die Kometen, wiewohl sie alle in einen Nebel gehüllt sind und die meisten einen von der Sonne abgekehrten Schweif haben, dennoch sehr verschieden zu seyn.

Ueber den Kometen von 1807 hat SCHRÖTER sehr vollständige Beobachtungen angestellt und den Durchmesser seines Lichtnebels 30000 bis 44000 Meilen gefunden. Dabei war es merk-

1 Astr. Jahrb. 1809. S. 142. 1829. S. 124.

2 Bibl. univ. XXXIV. 87.

3 Phil. Tr. 1812. p. 118. SCHRÖTER über d. Com. v. 1811. S. 223.

4 Astr. Jahrb. 1821. S. 179.

5 Phil. Tr. 1808. p. 156. SCHRÖTER a. a. O. S. 170.

6 Edinb. Journ. of Science 1827. Jan. 24.

würdig, dafs diese Gröfse, während der Komet sich von der Erde und von der Sonne entfernte, in vierzehn Tagen von 26000 bis auf 44000 Meilen zugenommen hatte und auch nachher, bei noch mehr wachsender Entfernung von der Sonne, nicht sehr abnahm. Diese helle Atmosphäre scheint bei manchen Kometen zwar gegen die Mitte hin etwas dichter zu seyn, aber keinen dichtern Kern zu umhüllen. Bei manchen Kometen ist sie nach aufsen hin etwas mehr begrenzt, bei andern mehr verwaschen. Oft verhüllt sie den eigentlichen Kern so, dafs man diesen gar nicht als irgend deutlich begrenzt sehen kann[1], in andern Fällen scheint sie dagegen den Körper, den man den Kern nennen müfste, fast ganz unverhüllt zu zeigen[2]. In vielen Fällen ist diese atmosphärische Hülle, die den Kopf des Kometen ausmacht, die ihn, verwaschen nach aufsen hin sich verlierend, als Haar umgiebt, nach der von der Sonne abgewandten Seite ausgedehnter und bildet dort den Schweif; in andern Fällen dagegen ist sie von dem Schweife durch einen leeren Zwischenraum, in welchem sich keine leuchtende oder erleuchtete Materie befindet, getrennt. Das letzte war bei dem schönen Kometen von 1811 der Fall, dessen kleiner Kern mit einer glänzenden Atmosphäre von 27000 Meilen im Durchmesser umgeben war; aber über dieser befand sich ein dunkler Raum, dessen Durchmesser nahe an oder vielleicht über 100000 Meilen betrug, der von einer zweiten leuchtenden Hülle, deren ganzen Durchmesser Schröter zu 205000 Meilen angiebt, umgeben war, und diese erst bildete, nach der von der Sonne abgekehrten Seite ausgedehnt, den langen, schönen Schweif des Kometen[3]. Diese einzelnen Theile erlitten während der langen Zeit der Sichtbarkeit dieses Kometen mancherlei Aenderungen, von denen ich bei der Beschreibung seines Schweifes noch Einiges anführen mufs. Aehnliche Aenderungen zeigen die Kometen sehr oft, und dadurch wird es so schwer, zu entscheiden,

1 Schröter erzählt dieses zum Beispiel von dem Kometen von 1807 am 6. Dec. (S. 149.)

2 Das war nach Herschel's Bemerkung bei dem zweiten Kometen von 1811 der Fall. Phil. Tr. 1812.

3 Herschel's und Schröter's Messungen stimmen hier nicht ganz überein, offenbar weil die verwaschenen Grenzen der dunkeln Atmosphäre keine strenge Bestimmung gestatteten. Phil. Tr. 1812. p. 118. Schröter am ang. Orte S. 267.

welche Aenderungen dem veränderten Stande gegen Sonne und Erde zuzuschreiben sind und welche dagegen in der Materie des Kometen statt finden. Aber eben diese Aenderungen machen es auch desto mehr zweifelhaft, ob selbst der Kern ein fester planetarischer Körper ist, und lassen eher vermuthen, daſs von diesem selbst, wie von einem der Verflüchtigung fähigen Körper, bedeutende Theile in die sich eben dadurch verdichtende Atmosphäre übergehen und als den Schweif bildend ganz vom Kometen getrennt werden mögen. Solche oft sehr groſse Veränderungen hat man an mehreren Kometen beobachtet. Olbers hat dieses zum Beispiel an dem von Messier beobachteten Kometen von 1780 nachgewiesen. Da dieser nach der Entdeckung sich der Erde näherte, so hätte er, wenn er selbst leuchtend war, sich allmälig etwas besser zeigen müssen, dagegen, wenn er sein Licht von der Sonne empfing, von welcher er sich entfernte, so muſste er ein nach und nach stark abnehmendes Licht zeigen. Beides war nicht der Fall, sondern eine Zeit lang nahm der Komet an Lichtstärke zu, so daſs er am 8. Nov. gut mit bloſsem Auge zu sehen war, statt daſs man ihn am 26. Oct. noch nicht mit einem Nachtfernrohre von 2 Fuſs hatte erkennen können; dagegen war er am 21. Nov. wieder ganz schwach und hörte mit dem 3. Dec. auf, sichtbar zu seyn, obgleich er unterdeſs der Erde näher gekommen war[1]. Ganz ähnliche Vergleichungen stellt Enke über den sehr lichtschwachen Kometen im Febr. 1818 an. Man mochte ihn als selbstleuchtend oder als von der Sonne erleuchtet ansehen, so hätte er am 1. Mai, als man ihn aus dem Gesichte verlor, viel mehr Licht haben sollen, als im Februar, wo er sich am besten zeigte; es muſste also in ihm nach seiner Sonnennähe eine Veränderung, die fast einer allmäligen Auflösung ähnlich sah, vorgegangen seyn[2]. Aehnliche Beobachtungen lieſsen sich mehrere anführen[3]. Die merkwürdigste ist vielleicht die, welche Burckhardt von dem Kometen von 1770 anführt, der gegen das Ende seiner Sichtbarkeit 48 mal so groſs, als bei den frühern Beobachtungen war.

1 Astr. Jahrb. 1819. S. 197.

2 Astr. Jahrb. 1821. S. 165.

3 De Zach Corr. astr. IV. 619.

Schweife der Kometen.

Der Schweif des Kometen (*cauda cometae;* la queue de la comète; *the tail of a Comet*) ist eine den Kometen begleitende, von seiner Nebelhülle fast immer nach der von der Sonne abgewandten Seite ausgehende, Lichterscheinuug, die von nebligem Ansehen und allemal dünne genug ist, um das Licht der Sterne beinahe ganz ungeschwächt durchzulassen. Man hat das Ansehen der Kometenschweife mit dem Nordlichte verglichen und daran denn freilich auch die Vermuthung, dafs sie mit eignem Lichte glänzen, geknüpft.

Der Schweif der Kometen hat oft eine sehr grofse Länge, so dafs er am Himmel zuweilen 90 Grade eingenommen hat, und auch in Fällen, wo seine scheinbare Länge nicht so viel betrug, zeigt doch die Berechnung, dafs die wirkliche Länge oft sehr grofs war. Da ich an einem andern Orte die Länge und Gestalt der Schweife mehrerer Kometen angegeben habe[1], so will ich nur von dem Kometen von 1811 anführen, dafs sein deutlich sichtbarer Schweif eine Länge von 12 Millionen Meilen hatte und dafs sein Durchmesser in der Nähe des Kometen 200000 Meilen, gegen das Ende hin 1200000 Meilen betrug. Herschel fand die Länge des Schweifes sogar, indem er ohne Zweifel die für andere Beobachter zu schwach leuchtenden entferntern Theile des Schweifes noch wahrnehmen konnte, 22 Millionen Meilen.

Die Gröfse dieser Schweife richtet sich bei den verschiedenen Kometen nicht allein danach, ob sie im Perihelio der Sonne sehr nahe kommen. Denn obgleich allerdings die Kometen von 1680, 1665, 1769, 1577, 1744 als solche angeführt werden können, die bei grofser Annäherung zur Sonne sehr schöne Schweife hatten, und obgleich es einigermafsen als Regel gilt, dafs die der Sonne nahe kommenden Kometen schöne Schweife zeigen, so haben doch auch andere sich durch lange Schweife ausgezeichnet, ohne der Sonne so nahe zu kommen. Unter diesen gehört der erste Komet von 1811 zu den merkwürdigsten, da er sich der Sonne nicht einmal bis zu der Entfernung, wo die Erde sich befindet, näherte und doch als einer der Kometen, die einen ausgezeichneten Schweif hatten, genannt werden mufs. Andere Kometen, die der Sonne näher kamen und die

1 Unterhaltungen für Freunde d. Phys. u. Astron. S. 78.

auch grofs genug waren, um, wie wir urtheilen würden, Materie genug zu einem langen Schweife zu enthalten, haben dennoch keinen bedeutenden Schweif gehabt, zum Beispiel der von 1652, dessen Durchmesser gegen 30000 Meilen, die Länge des Schweifes höchstens 700000 Meilen betrug. Indefs ist es wohl gewifs, dafs die Schweife erst um die Zeit, da der Komet die Sonnennähe erreicht, sich ausbilden, und bei der gröfsern Entfernung von der Sonne nehmen sie wieder ab.

Nach Verschiedenheit der Stellungen des Kometen und seines Schweifes gegen die Erde können die scheinbaren Formen des Schweifes sehr verschieden seyn, wenn auch in der wahren Gestalt desselben keine Veränderung vorgeht, und auf solchen Verschiedenheiten beruhte es zum Theil, wenn man ehemals die Kometen bald bärtig, bald geschweift u. s. w. nannte. Aber auch in der wahren Gestalt des Schweifes sind mannigfaltige Verschiedenheiten, so dafs eine Beschreibung mehrerer Kometen nöthig wäre, um alle Merkwürdigkeiten aufzuzählen. Als Hauptumstände, die immer vorkommen, kann man indefs angeben, dafs der Schweif von der Sonne abgekehrt ist[1], dafs er seiner Hauptrichtung nach in der Ebene der Kometenbahn liegt, dafs er in einiger Entfernung vom Kometen eine Zurückbeugung zeigt, dafs seine in der Bahn vorangehende Seite schärfer begrenzt scheint.

Um bei der Reichhaltigkeit des Gegenstandes nicht über die Grenzen der hier angemessenen Darstellung hinaus zu gehen, werde ich blofs aus den Beschreibungen derjenigen zwei neuern Kometen, über welche Herschel und Schröter vollständigere Beobachtungen angestellt haben, einige Umstände mittheilen und von andern Kometen nur gelegentlich etwas erwähnen.

Der Komet von 1807[2] wurde erst nach seiner Sonnennähe sichtbar. Er hatte ein schönes weifses Licht, dessen Intensität aber doch Schröter am 9. Oct., als der Komet 16 Millionen Meilen von der Sonne entfernt war, nur etwas gröfser als bei dem Uranus angiebt. Der Schweif litt mehrere Veränderungen. Am 19. Oct. war er gegen das Ende hin breiter als am Kopfe, am 20. Oct. hatte er die beträchtliche Breite am Ende fast ganz

1 Und doch leidet selbst diese Regel Ausnahmen.

2 Schröter's Beobachtungen des grofsen Cometen von 1807. Göttingen 1811. und Phil. Trans. 1808. p. 145.

verloren und lief in zwei Spitzen aus, die an den folgenden Tagen noch auffallender wurden. Schon am 20. Oct. hatte Olbers bemerkt, dafs die nördliche, vorangehende Seite des Schweifes sich in gerader Richtung stark verlängert hatte und dafs so ein doppelter Schweif entstanden war, indem der breitere, schon immer etwas gekrümmte Schweif, von diesem geraden Schweife abweichend, getrennt fortlief. Diese Trennung beider Schweife beobachtete in den folgenden Tagen auch Schröter und fand am 22. Oct. den Durchmesser des Lichtnebels 29400, die Länge des Schweifes 1820000 Meilen; aber nach Olbers Beobachtung konnte man ihn noch in viel gröfserer Entfernung erkennen. Am 23. October konnte Schröter Anfangs von diesem nördlichen Schweife nichts mehr auffinden, sondern blofs der südliche breitere Schweif war noch zu sehen; aber nachher ward abwechselnd, momentan hervorglänzend, auch der gerade, nördliche Schweif wieder kenntlich und zwar, gegen die sonst gewöhnliche Art der Erscheinung, erschien dieser in gröfserem Abstande vom Kometen heller, als in den zwischenliegenden Theilen. Ebenso zeigte er sich am 25. Oct., so wie die Nordlichtstrahlen fortzuschiefsen scheinen, bald theilweise, bald ganz; der südliche Schweif, dessen convexe Seite mehr Licht als die andere hatte, zeigte sich beständig und ohne solche Strahlenschüsse. Am 29. Oct. erschien der südliche Hauptschweif viel kürzer, als einige Tage früher, und von dem nördlichen Schweife blieben nur ebenso schwache Spuren noch sichtbar. Der Durchmesser des Lichtnebels hatte am Ende des Octobers bis auf 35000 Meilen im Durchmesser zugenommen und nahm auch nachher noch mehr zu. Die folgenden Beobachtungen übergehe ich.

Bei diesem Kometen erschien, wie Schröter ausdrücklich bemerkt, der Schweif wie eine Fortsetzung des den Kopf des Kometen ausmachenden Lichtnebels; der grofse Komet von 1811 zeigte sich dagegen ganz anders[1]. Alle Beobachter erkannten an ihm mit zureichender Deutlichkeit einen dunkeln Zwischenraum zwischen dem kugelförmigen, nebligen Hauptkörper, in welchem Herschel und Schröter einen dichtern Kern wahrnahmen, und der konoidischen Hülle, die jenen Hauptkörper gegen die Sonne hin halbkugelförmig umgab und sich von der

1 Schröter's Beobachtungen über den grofsen Cometen von 1811. Göttingen 1815. Phil. Transact. 1812. p. 115.

Sonne abwärts in Form zweier langen Schweife oder eigentlich in der Form eines hohlen Konoides fort erstreckte. Es war nämlich aus der ganzen Ansicht dieses Schweifes wohl zu schliefsen, dafs er nur darum an beiden Seiten viel glänzender, in der Mitte dagegen der ganzen Länge nach matt erschien, weil die Gesichtslinie an den Seiten durch viele hinter einander liegende Theilchen der nur dünnen, ungefähr einen hohlen Kegel bildenden, Schicht ging, die uns das Licht zusendete; da wo die Gesichtslinie diese dünne Schicht ungefähr senkrecht durchschnitt, traf sie auf zu wenige solche Theilchen und deswegen war hier das Licht so sehr schwach.

Derjenige Raum, welcher zwischen dem hellen kugelförmigen Körper und diesem konoidischen Mantel dunkel erschien, war so durchsichtig, dafs Herschel sehr kleine Sterne durch ihn erkannte; ob er, wie Herschel glaubt, mit einer elastischen Atmosphäre erfüllt war, bleibt wohl sehr zweifelhaft, da wir diese unsichtbare Atmosphäre mit gleichem Rechte als im Innern des Schweifkonoids bis auf 12 Millionen Meilen ausgedehnt annehmen könnten. Ueber die Veränderungen, die der Schweif nach und nach zeigte, besitzen wir mehrere Beobachtungen, unter welchen die von Schröter, Herschel und Harding die vorzüglichsten sind. Aus diesen werde ich das Wichtigste nebst den von mir aus den Beobachtungen berechneten Resultaten hier mittheilen[1].

Bei den ersten Beobachtungen dieses Kometen ist auf den Schweif, der nicht sehr bedeutend gewesen seyn mufs, nicht viel Rücksicht genommen worden; aus den gegen Ende des August angestellten Beobachtungen scheint sich schon eine sehr ansehnliche wahre Gröfse des Schweifes zu ergeben[2], indefs erlaubte die ungünstige Stellung des Kometen keine genaue Angabe; aber schon am 10. Sept. ward die vorangehende Seite des Schweifkonoids 10 Millionen, die nachfolgende 12 Millionen Meilen lang gefunden und in dieser Länge erhielt der Schweif sich lange Zeit. Die konoidische Dunsthülle hatte um diese Zeit schon in einer Entfernung von 4 Millionen Meilen vom Kometen einen Halbmesser von 600000 Meilen; aber diese Weite des hohlen glänzenden Schweifes nahm schon im November so ab, dafs am

1 Astron. Zeitschr. von v. Lindenau. I. 394.

2 Olbers Beob. in v. Zach's mon. Corr. XXV. 4.

16. Nov. der Halbmesser nur noch 160000 Meilen oder am 21. Nov. 240000 Meilen in etwa 5 Millionen Meilen Entfernung vom Kometen betrug; und ungefähr so verhielt es sich auch im December, wo jedoch Harding am 9. Dec. den Halbmesser in eben der Entfernung noch wieder zu 290000 Meilen angab. Wenn man dieses Schweifkonoid als einen Kegel mit etwas gekrümmter Axe ansieht, so machte die Seitenlinie des Kegels mit seiner Axe am 18. Sept. einen Winkel von $7\frac{1}{2}$ Gr., am 11. Oct. einen Winkel von 5 Gr., in der Mitte des November einen Winkel von $1\frac{1}{6}$ Gr., am 6. Dec. einen Winkel von 1 Grad.

Schröter giebt mehrere kleine Veränderungen an, die der Komet selbst und sein Schweif erlitten; den dunkeln Raum zwischen der Kometenkugel und der konoidischen Lichthülle glaubte er zuweilen genau dem umgebenden Blau des Himmels gleich, zuweilen etwas heller zu sehen; am 16. Oct. zeigte sich auf kurze Zeit ein Nebenschweif am vorangehenden Schweife, so wie einige Tage früher Olbers etwas Aehnliches am nachfolgenden Schweife gesehen hatte; aber im November traten auffallendere Aenderungen ein. Am 7. Nov. zeigte sich an dem nachfolgenden Schweife ein an der den Kopf umgebenden Nebelhülle anfangender dritter Schweif, der aufserhalb des grofsen Schweifes lag; am 9. Nov. hatte sich noch ein zweiter solcher Nebenschweif an der andern Seite gebildet, so dafs das Schweifkonoid ungefähr aussah, als ob es noch von einem zweiten, das erstere umfassenden und berührenden, Schweifkonoide umgeben sey, oder es erschienen noch zwei Schweife, die beiden Hauptschweife umfassend und am Scheitel berührend. Beide Nebenschweife zeigten sich einige Tage nachher nicht mehr. Im December waren die beiden Schweife in der Nähe des Kometen nicht mehr gut als getrennt zu unterscheiden, weil ihr Zwischenraum mit Lichtdünsten gefüllt war, und ebenso war der dunkle Raum um den Kometen herum nicht mehr gut zu erkennen, weiter vom Kometen entfernt aber trennten sich beide Schweife; indefs zeigten sich darin an verschiedenen Abenden Ungleichheiten, indem zuweilen schon in geringerer Entfernung vom Kometen, zuweilen erst in gröfserer Entfernung, diese Trennung der beiden Schweife von einander kenntlich wurde und bald der eine, bald der andere Schweif der längere war; am 18. December war wieder ein Nebenschweif sichtbar. — Aehnliche Veränderungen zeigen Harding's schöne Abbildun-

gen dieses Kometen[1], nach welchen man den doppelten Hauptschweif am 8. October als durch einen dunklern Zwischenraum getheilt, am 16. October einen kleinen Nebenschweif, am 6. und 16. December wieder einen Nebenschweif sah u. s. w. Piazzi bemerkt, dafs die Aenderungen oft so schnell auf einander gefolgt seyen, dafs es nöthig gewesen wäre, jede Stunde eine neue Zeichnung zu machen, wenn man sie alle hätte darstellen wollen; besonders in dem nördlichern Schweife hätten sich so oft abgerissene Stellen, Sprünge und Ungleichheiten gezeigt, er sey bald zweispitzig, bald dreispitzig u. s. w. gewesen[2]. Allerdings stimmen hiermit manche von Schröter's Beobachtungen überein, zum Beispiel am 8. Nov., am 21. Nov., am 18. Dec., auf welche Schröter selbst vorzüglich aufmerksam macht. In Rücksicht der wichtigsten und dauernden Veränderungen bemerkt Herschel, dafs schon um den 9. Nov. die planetarische Scheibe, wie er den in dem runden Nebel beobachteten Kern nennt, nicht gut mehr zu erkennen und am 13. Nov. ganz verhüllt war. Um eben diese Zeit fing der leere Zwischenraum zwischen dem kugelförmigen Kometennebel und der konoidischen Umhüllung an, sich zu verlieren, und beide leuchtenden Erscheinungen vermischten sich mit einander; aber am 9. Dec. zeigte sich eine schmale Trennung wieder, die indefs nicht von langer Dauer war. Die Frage, ob diese als Doppelschweif den Kometen umgebende Lichterscheinung wirklich als ein Konoid anzusehen sey, oder ob es nicht als ein ebener Ring, der in zwei Schweife auslief, angesehen werden könne, hat Herschel bestimmt beantwortet, indem er zeigt, dafs ein solcher ebener Ring nicht in den verschiedenen Stellungen des Kometen gegen die Erde, als ihn halbkreisförmig umgebend, erscheinen konnte. Meine Berechnungen über die Gestalt dieses Schweifkonoids zeigen auch eben das in Beziehung auf die vom Kometen entfernter liegenden Theile, indem sie wohl nicht so gut unter sich übereinstimmen könnten, wenn die beiden scheinbaren Schweife als zwei in der Ebene der Kometenbahn liegende wirklich getrennte Schweife anzusehen wären.

Es ist wahrscheinlich, dafs unter den ältern Kometen mehrere, die uns als zwei oder mehr Schweife zeigend beschrieben

1 v. Zach's Mon. Correspond. XXVII. 299.

2 Della cometa dell' anno 1811, osserv. nella spec. di Palermo.

werden, zum Beispiel der von 1769, eben solche Schweifkonoide um sich hatten und daſs dieses auch bei dem schönen Kometen von 1744, an welchem DE CHESEAUX sechs Schweife beobachtete, der Fall war[1].

Unter den zahlreichen Merkwürdigkeiten, welche die Kometenschweife darbieten, muſs ich noch die erwähnen, daſs der Komet von 1824 eine kurze Zeit lang einen gegen die Sonne zu gerichteten Schweif hatte[2], von dem OLBERS glaubt, man könne ihn nicht als bloſs scheinbar in die gegen die Sonne gerichtete Linie fallend ansehen. Etwas Aehnliches bemerkt STRUVE bei der im Jahre 1828 beobachteten Erscheinung des Enkeschen Kometen[3], daſs nämlich der hellste Theil desselben, in welchem man zwar keinen Kern entdecken konnte, der sich aber doch als Kernnebel hinreichend auszeichnete, nicht an der der Sonne zugekehrten Seite lag, und daſs der Nebel, der diesen hellern Theil umgab, sich an der beinahe gegen die Sonne zugewandten Seite, der Lage jenes Kernnebels gegenüber, so matt verwaschen zeigte, wie man es am Ende des Schweifes zu sehen gewohnt ist, statt daſs die entgegengesetzte Begrenzung, nämlich an der von der Sonne abgekehrten Seite, bestimmter war.

Endlich darf ich ein, wahrscheinlich nicht im Kometenschweife selbst liegendes, Phänomen doch nicht unerwähnt lassen, welches von vielen Beobachtern wahrgenommen und selbst von SCHRÖTER noch als dem Kometen eigenthümlich angeführt worden ist. Dieses ist das Scintilliren oder Strahlenschieſsen, was man im Schweife der Kometen oft bemerkt hat. Von ältern Beobachtungen will ich nur die von CYSATUS und KEPLER am Kometen von 1618 angestellten anführen[4], die mehrmals ein plötzliches Sichtbarwerden der entferntern Theile des Schweifes und ein eben so plötzliches Verschwinden beobachteten; CYSATUS sagt zum Beispiel, am 7. Dec. habe man zuweilen ein Funkeln des Kometen selbst bemerkt und dann habe zugleich der

1 Loys de Cheseaux traité de la comète etc. Lausanne 1744.

2 Astr. Jahrb. 1827. S. 133. 185.

3 Schumacher astr. Nachr. Nr. 154.

4 Cysati mathemata astron. de loco, motu, magnitudine et causis cometae anno 1618, 1619 observ. Ingolst. 1619. Kepleri libri tres de cometis. FLAUGERGUES führt noch mehr Beobachtungen an. Journ. de Phys. LXXXIV. 177.

Schweif eine wellenartige Bewegung gezeigt, eine plötzliche Verlängerung und ein Breiterwerden und dann wieder ein Verkürzen der Schweifstrahlen. Schröter beobachtete eben diese Erscheinung, die er mit dem Strahlenschieſsen der Nordlichter vergleicht, an dem Kometen von 1807 und hält sie für einen Beweis einer wirklichen Veränderung in dem Lichte des Kometen, die von einer Naturkraft bewirkt werde, welche der elektrischen oder galvanischen ähnlich sey, indem diese Lichtwechsel sich in wenigen Secunden auf 1 Million Meilen fortpflanzen müſsten. So sehr aber auch Schröter diesen momentanen Lichtwechsel als etwas den Kometenschweifen Eigenthümliches vertheidigt, so gestehe ich doch, daſs ich mir diese Veränderungen durchaus nicht anders als bloſs scheinbar denken kann und hierin auch Olbers Autorität für mich hat. So wie nämlich das Funkeln der Sterne durch den ungleichen Zustand unserer Atmosphäre, durch ein Vorüberziehen ungleich brechender Luft- und Dunstmassen, bewirkt wird, so scheint auch jenes Strahlenschieſsen nur in der ungleichen Durchsichtigkeit der Atmosphäre, deren momentane Aenderungen uns nur bei so matt leuchtenden Gegenständen kenntlich werden, seinen Grund zu haben. Einen Hauptgrund gegen eine im Schweife selbst vorgehende Veränderung hat Olbers angeführt und diesen halte ich für unwiderleglich. Wir wissen, daſs das Licht ungefähr 24 Sec. braucht, um 1 Million Meilen zu durchlaufen, und haben gar keinen Grund anzunehmen, daſs das Licht eines Kometenschweifes sich hierin anders verhalte. Gesetzt nun, das eine Ende des Kometenschweifes sey 1 Million Meilen weiter von unserm Auge entfernt, als das andere, und beide würden vollkommen gleichzeitig heller leuchtend, so könnte jene wahrhaft momentan den ganzen Schweif durchfliegende Erhellung uns doch am entferntern Ende erst 24 Secunden später als am nähern Ende sichtbar werden. Da nun in einigen Fällen diese Erscheinungen für noch gröſsere Unterschiede der Entfernungen statt gefunden haben, ohne merkliche Zeitverschiedenheit, so scheint es, daſs man gar nicht annehmen darf, daſs sie auf reellen Veränderungen im Zustande der Kometen beruhen[1].

1 Schröter's Einwürfe hingegen (in den Beobachtungen des Cometen von 1811. S. 281.) scheinen mir nicht hinreichend begründet.

Vermuthungen über die Entstehung der Schweife und über die Ausbildung der Kometen überhaupt.

Unter den Meinungen über die Bildung der Schweife will ich zuerst diejenige anführen, welche zu mathematischen Untersuchungen geeignet mir am meisten für sich zu haben scheint. Obgleich Kepler schon etwas Aehnliches geäufsert hatte, so ist doch wohl Newton als der Erste zu nennen, der die Behauptung, die Schweife entständen aus Theilchen, welche mit großser Schnelligkeit von der Sonne abwärts getrieben werden, näher untersucht hat[1]. Er zeigt, dafs alle Erscheinungen der Schweife, namentlich ihre Zurückbeugung hinter den verlängerten Radius Vector des Kometen, ihre Krümmung, die ungleiche Gröfse dieser Krümmung, die uns nur dann kenntlich wird, wenn unser Auge von der Ebene der Kometenbahn ziemlich entfernt ist, beweisen, dafs die Schweife aus Theilen entstehen, die vom Kopfe des Kometen von der Sonne abwärts aufsteigen. So wie der Rauch in der Luft gerade aufsteigt von einem ruhenden Körper, aber eine schiefe Rauchsäule giebt, wenn der Körper immer den Ort verläfst, von wo die früher aufgestiegenen Theile ausgingen, so müsse auch diese vom Kometen aufsteigende Materie einen rückwärts abweichenden Schweif hervorbringen, und diese Abweichung müsse geringer seyn in der Sonnennähe, wo das Aufsteigen der Theilchen schneller sey. Die gröfsere Helligkeit der vorangehenden Seite des Schweifes, welche man so sehr oft viel schärfer begrenzt und glänzender, als die nachfolgende, gesehen hat, erklärt Newton, wohl nicht ganz genügend, daraus, dafs der den Schweif bildende Dunst hier etwas neuer und deshalb dichter sey. Die Zeit, in welcher diese Materie vom Kopfe bis zum Ende des Schweifes aufsteige, könne man ungefähr kennen lernen, wenn man vom Ende des Schweifes eine gerade Linie nach der Sonne ziehe und den Punct bemerke, wo sie die Kometenbahn schneide; dieser Punct würde der genaue Punct seyn, von welchem die am Ende angekommenen Theile ausgegangen waren, wenn die Schweiftheilchen nicht die mit dem Kometen schon erlangte Geschwindigkeit behielten; bei einer genauern Bestimmung müsse man

1 Princip. phil. nat. Ed. 3. p. 511.

hierauf Rücksicht nehmen. Auf diese Weise ergebe sich, daſs bei dem Kometen von 1680 der am 10. Dec. beobachtete Schweif in zwei Tagen, der am 25. Januar beobachtete Schweif in 45 Tagen aufgestiegen sey, und daſs der während der ganzen Sichtbarkeit des Kometen gebildete Schweif fast alle die Theilchen enthielt, die seit der Zeit des Perihelii aufgestiegen waren. Die folgenden Schlüsse scheinen mir nicht so klar. Newton sagt nämlich zuerst, da die schnelle Bewegung dieser feinen Schweiftheilchen ungeändert fortdauere, so finde gar kein Widerstand im Himmelsraume statt; dann sagt er aber doch auch, die Himmelsluft (*aura aetherea*) werde durch die Sonnenstrahlen erwärmt, werde dadurch specifisch leichter und reiſse so, indem sie von der Sonne aufsteige, die Schweiftheilchen mit sich fort, die uns durch ihre Zurückwerfung des Lichtes sichtbar werden. Kepler's Meinung, daſs die Sonnenstrahlen diese Theilchen mit fortreiſsen, scheint ihm weniger angemessen.

Aehnliche Vorstellungen, wie Newton sich von dem Entstehen der Schweife machte, haben auch andere nachher mehrmals dargelegt, jedoch, so viel mir bekannt ist, ohne die Untersuchung weiter zu fördern. Heinsius [1] sucht die einzelnen Umstände, welche in Beziehung auf den Kometen von 1744 eine Verlängerung des Schweifes begünstigen oder hindern muſsten, genauer anzugeben und thut dieses, so weit es ohne strenge Rechnung möglich ist, auf eine recht genügende Weise, wenn er gleich darin zu fehlen scheint, daſs er die Veränderungen alle theoretisch zu erklären sucht und auf zufällige Aenderungen, die bei andern Kometen wenigstens oft ganz unleugbar scheinen, keine Rücksicht nimmt. De Cheseaux hat eben diesen Schweif ganz nach Newton's Anleitung berechnet und auch über den Kometen von 1577 und den von 1680 einige Berechnungen angestellt; so sehr er sich aber auch als gründlichen Forscher zeigt, so scheinen mir seine Bemerkungen doch kein neues Licht über diesen Gegenstand zu verbreiten [2].

Daſs sich der Schweif als ein vom Kometen aufsteigender Dunst betrachten lasse, der durch irgend eine Kraft von der Sonne abwärts getrieben werde, entweder indem er als leichtere Materie in dem den Weltraum erfüllenden Aether aufsteige, oder

1 Beschreibung des 1744 erschienenen Cometen. S. 42.

2 Traité de la comète de 1744. p. 162. 170. 171.

indem er durch eine eigenthümliche abstofsende Kraft von der Sonne zurückgestofsen werde, oder indem die Sonnenstrahlen ihn mit fortrissen, ist von Mehreren behauptet worden; namentlich haben Herschel, Laplace[1] und Nicollet[2] diesen Gedanken geäufsert; Fischer nennt diese Kraft[3] eine negative Schwere; alle aber begnügen sich, nur bei der Betrachtung im Allgemeinen stehen zu bleiben. Ob man nun dabei an Elektricität, wie de Luc[4] und Bellani[5], oder an eine Entstehung aus der Sonnenatmosphäre, wie Mairan[6], denkt, ist ziemlich gleichgültig, da wir über die physische Beschaffenheit des Schweifes so sehr wenig wissen.

Flaugergues hat in seiner Kritik aller Meinungen über die Kometenschweife auch diese Newtonsche Hypothese zu widerlegen gesucht[7]. Er bemerkt allerdings mit Recht, dafs es nicht erwiesen sey, dafs die Wärme, welcher die Kometen in der Nähe der Sonne ausgesetzt sind, so sehr grofs sey[8], dafs auch Kometen, welche sich der Sonne nicht so sehr näherten, lange Schweife gehabt haben, und dafs bei der Berechnung Newton's, bis zu welchem verdünnten Zustande Luft und ähnliche elastische Fluida sich ausdehnen können, der Zweifel übrig bleibe, ob so verdünnte Materien denn noch Licht genug, um uns sichtbar zu werden, reflectiren können. Diese Einwürfe, welche die uns unbekannte natürliche Beschaffenheit der Schweife betreffen, lassen sich nicht widerlegen. Derjenige Einwurf aber, welcher den mathematischen Theil der Newtonschen Theorie betrifft, ist unrichtig. Flaugergues nämlich glaubt, nach dieser Theorie müsse der Schweif immer dem Kometen folgen, da er doch nach dem Perihelio, als von der Sonne abgewandt, dem

1 Expos. du syst. du monde. Liv. 2, chap. 5.

2 Biblioth. univ. XXXIV. 247.

3 Astr. Jahrb. 1823. S. 96.

4 Astr. Jahrb. 1803. S. 92.

5 Journ. de Physique. XCI. 401.

6 Traité de l'aurore boréale. Paris 1732.

7 Journ. de Phys. LXXXIV. 173. LXXXV. 193. LXXXVI. 101. LXXXVII. 81.

8 Flaugergues berechnet sie für die ganzen 55 Tage, die der Komet in einer geringern Entfernung, als die der Erde von der Sonne, zubrachte, als etwa der Wärme des kochenden Wassers gleich. Aber alle diese Rechnungen sind sehr unsicher.

Kometen vielmehr einigermaſsen vorangehe. Allerdings bleiben die entferntern Schweiftheilchen nicht bloſs nach dieser Theorie, sondern auch nach den Beobachtungen etwas hinter dem Radius Vector des Kometen zurück, aber Flaugergues hätte nur die Berechnung auf nähere Theilchen anwenden und darauf Rücksicht nehmen sollen, daſs gewiſs eine Kraft, welche die Theilchen von der Sonne abwärts treibt, da seyn muſs, so würde er diesen Einwurf, der sich durch meine nachher folgenden Rechnungen noch mehr widerlegt zeigt, nicht gemacht haben. Daſs dagegen die Ansicht Newton's, als ob der Schweif in einem Medium aufstiege, weder recht deutlich, noch auch recht angemessen scheine, habe ich schon bemerkt und führe daher nicht an, was Flaugergues über diesen Gegenstand sagt. Was endlich die weitläuftigen Beweise betrifft, welche Flaugergues gegen Kepler's Meinung aufführt, daſs die Sonnenstrahlen die Schweiftheilchen mit sich fortreiſsen, so wird das Resultat, daſs etwas Aehnliches auf der Erde durchaus nicht bemerkbar sey, wohl von niemand bezweifelt werden.

Woher aber auch jene hypothetisch angenommene abstoſsende Kraft der Sonne auf die Theilchen des Kometenschweifes entstehen möge, so läſst sich doch nicht leugnen, daſs ein Phänomen, welches so klar auf eine abstoſsende Kraft hinzudeuten scheint, uns wohl zu Versuchen, dasselbe vermittelst einer solchen Kraft zu erklären, auffordern muſs; ich gehe daher zu den neuern auf diese Hypothese gegründeten Betrachtungen fort.

Olbers [1], veranlaſst durch die merkwürdige Gestalt des Schweifes des Kometen von 1811, knüpfte an die Ansicht, daſs eine abstoſsende Kraft die Schweiftheilchen von der Sonne entferne, folgende Schlüsse. Da bei jenem Kometen die Schweifmaterie ein hohles Konoid, vom Körper des Kometen getrennt und diesen umgebend, bildete, so muſste man, bemerkt Olbers, annehmen, daſs die von dem Kometen und seiner eigenthümlichen Atmosphäre entwickelten Dämpfe sowohl von ihm, als auch von der Sonne abgestoſsen werden. Sie müssen sich also dort anhäufen, wo die Repulsivkraft des Kometen von der Repulsivkraft der Sonne überwogen zu werden anfängt, und wir sehen daher das Phänomen eines hohlen Schweifkonoids nur dann, wenn die abstoſsende Kraft des Kometen groſs genug ist,

1 v. Zach Mon. Corr. XXV. 1.

um die Schweiftheilchen an der gegen die Sonne zu gekehrten Seite bis über die kugelförmige Atmosphäre des Kometen hinaus zu treiben. Der Komet von 1811 blieb weit von der Sonne entfernt und da jene Repulsivkraft der Sonne vermuthlich in gröfseren Entfernungen von der Sonne abnimmt, so konnte bei ihm jene Erscheinung um so eher entstehen, da selbst eine nicht so sehr starke Repulsivkraft des Kometen schon hinreichte, die bei ihm so reichlich entwickelte Schweifmaterie über die Grenzen der eigentlichen Atmosphäre hinaus, gegen die Sonne hin, zu entfernen. Dieser Betrachtung gemäfs können wir, wie Olbers bemerkt, vermuthen, dafs es erstlich Kometen giebt, welche keine der Repulsivkraft der Sonne unterworfene Materie entwickeln und daher ohne Schweif erscheinen, zweitens Kometen, deren Schweifmaterie von der Sonne abgestofsen wird, ohne dafs der Komet eine merkliche abstofsende Kraft auf sie ausübt, drittens Kometen, deren Schweifmaterie der Repulsivkraft beider Körper, der Sonne und des Kometen, in merklichem Grade unterworfen ist. Wenn sich von einem Kometen ungleichartige Stoffe entwickeln, so können mehrere Schweife entstehen. Diejenigen Theilchen, welche mit mehr Gewalt von der Sonne abwärts fortgestofsen werden, müssen einen weniger zurückgebeugten Schweif bilden, und auf diese Weise scheinen die beiden Schweife des Kometen von 1807 und die ähnlichen an ältern Kometen beobachteten Phänomene erklärt werden zu müssen. Wenn von dem Kometen verschiedenartige Materien sich entwickeln, die auch vom Kometen selbst mit ungleicher Gewalt abgestofsen werden, so können sich mehrere einander umgebende Konoide bilden, und dieses scheint bei dem Kometen von 1769 der Fall gewesen zu seyn, wo Messier am 30. Aug. und 1. Sept. zwei neue Seitenflügel des Schweifes wahrnahm, die sich nachher in zwei neue helle Streifen, den beiden bis dahin gesehenen den Schweif bildenden Streifen parallel, verwandelten[1]; auf die Materien, welche in einem solchen Falle das äufsere Schweifkonoid bilden, mufs die abstofsende Kraft des Kometen stärker, als auf die das innere Konoid bildenden, wirken. Die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Schweifstoff vom Kometen aufstieg, mufste auch bei dem Kometen von 1811 sehr grofs seyn. Olbers berechnet aus Beobachtungen am 11.

1 Mém. de l'acad. de Paris pour 1775. p. 392.

und 13. Oct., daſs die Schweiftheilchen die Länge desselben, bis auf 12 Millionen Meilen weit, in 11 Tagen durchliefen.

Ich muſs die übrigen von Olbers noch angeführten Bemerkungen übergehen und nun das Wichtigste aus den Untersuchungen, zu welchen jene mir selbst Veranlassung gegeben haben, mittheilen. Die erste Untersuchung [1] betrifft die Frage, welche Curve, wenn man jene Olberssche Hypothese von der zugleich wirkenden Repulsivkraft der Sonne und des Kometen annimmt, diejenige ist, auf welcher ein ruhender Körper vermöge jener beiden Kräfte bloſs nach der Tangente fortgetrieben würde, oder wo, in irgend einem Puncte, die aus der Repulsion der Sonne entstehende, auf die Tangente senkrechte Kraft eben so groſs ist, als die aus der Repulsion des Kometen nach entgegengesetzter Richtung entstehende, auf die Tangente senkrechte Kraft. Nimmt man an, daſs die abstoſsenden Kräfte den Quadraten der Abstände umgekehrt proportional sind, so ergiebt die Entfernung des Scheitelpunctes des Schweifkonoids das Verhältniſs dieser Kräfte. Jene Curve läſst sich leicht bestimmen, aber sie ist nicht diejenige, welche das von beiden Kräften fortgetriebene Schweiftheilchen wirklich durchläuft, sondern wenn ein auf dieser Curve ruhender Körper, plötzlich freigelassen, der Einwirkung beider Kräfte folgen könnte, so finge er seine Bewegung nach der Richtung dieser Curve an, ginge aber bei fortdauernder freier Bewegung darüber hinaus. Welche Curve er weiter durchläuft, läſst sich annähernd ebenfalls bestimmen, und diese Curve müſste nun den wahren Umriſs des Schweifes darstellen; da aber die Beobachtung so groſse Schärfe der Bestimmung nicht gestattet, als nöthig wäre, um über die strenge Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung zu entscheiden, so ist es hier wohl genug zu bemerken, daſs die theoretische Betrachtung, die sich übrigens wohl noch vollkommener anstellen lieſse, eine Form des Schweifes in der Nähe des Kopfes ergiebt, welche nicht sehr von der beobachteten abweicht.

Eine zweite Untersuchung über diesen Gegenstand, der ich viel Zeit gewidmet habe, betrifft die Richtung des ganzen Schweifes, wenn man bloſs auf die abstoſsende Kraft der Sonne Rücksicht nimmt[2]. Jedes von dem Kometen sich trennende Schweif-

1 v. Zach monatl. Corr. XXVI. 533.

2 Als einzelne hiermit in Verbindung stehende Untersuchungen

theilchen wird hier angesehen, als ob es eben die Geschwindigkeit, wie der Komet selbst, nach der Richtung der Tangente seiner Bahn hätte, und wenn die abstoſsende Kraft der Sonne im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernungen wirkt, so beschreibt das Theilchen eine Hyperbel, in deren entfernterem Brennpuncte die Sonne steht. Das Schweiftheilchen bewegt sich auf dieser Hyperbel so, daſs die zwischen den Radien enthaltenen Sectoren, in bestimmten Zeiten, denjenigen Sectoren gleich sind, die der Komet selbst beschreibt. Man muſs daher für eine ganze Folge von Zeitpuncten diejenigen Hyperbeln berechnen, welche die von dem Kometen losgerissenen Theilchen durchlaufen werden, und auf jeder von ihnen den Punct angeben, welchen das Theilchen in einem gewissen Zeitpuncte erreicht hat; dann giebt die Reihenfolge dieser Puncte, wohin verschiedene Theilchen in einem und demselben Augenblicke gelangt sind, die Gestalt des Schweifes an. Hierbei wird freilich vorausgesetzt, daſs man die absolute Gröſse der abstoſsenden Kraft der Sonne kenne, und obgleich diese erst aus den Beobachtungen gefunden werden kann, so ist es doch angemessen, solche Schweife, unter Voraussetzung einer bestimmten Gröſse dieser Kraft, zu berechnen, um im Allgemeinen die sich ergebenden Gestalten der Schweife kennen zu lernen; nachher läſst sich dann aus den Beobachtungen untersuchen, wie groſs die im einzelnen Falle wirksamen Kräfte gewesen seyn müssen.

Wenn man zuerst animmt, daſs die abstoſsende Kraft der Sonne, mit welcher sie auf das Schweiftheilchen wirkt, nur eben so groſs sey, als die anziehende Kraft, mit welcher sie auf den Kometen wirkt, so ergeben sich für drei Stellungen des Kometen folgende Resultate. Der Komet gebraucht eben so lange Zeit, um von dem Puncte, wo der Radius Vector $= 0{,}8221 \cdot p$ war, bis zu dem Puncte, wo er $= 0{,}5 \cdot p$ ist, zu gelangen, als er von dem Puncte, wo der Radius Vector $= 0{,}5 \cdot p$ ist, bis zur Sonnennähe gebraucht und als er von der Sonnennähe bis zu dem Puncte, wo der Radius Vector $= 0{,}5 \cdot p$ ist, gebraucht; wir wollen daher in den Stellungen, wo erstlich der Radius Vector $= 0{,}5 \cdot p$ ist vor der Sonnennähe, wo er zweitens

sind die über die wahre Gestalt der Kometenschweife, wie die Beobachtungen sie ergeben, anzusehen. Astr. Zeitschr. I. 394. und Unterhaltungen für Freunde d. Phys. u. Astr. Bd. I. Hft. 2.

$= 0{,}25 . p$ ist in der Sonnennähe und wo er drittens $= 0{,}5 . p$ ist nach der Sonnennähe, die Lage bestimmen, welche die in jener eben erwähnten Zeit von ihm ausgegangenen Theilchen erreicht haben, um so die Form des Schweifes, so fern er jedesmal aus den in diesen Zeiträumen abgestofsenen Theilchen besteht, kennen zu lernen. Dafs hier p den Parameter der parabolischen Kometenbahn bezeichnet, erhellet von selbst. Wenn nun r den Radius Vector desjenigen Punctes bezeichnet, wo das Theilchen den Kometen verliefs, ϱ den Radius Vector und ψ den Winkel, welchen er mit der Axe der Kometenbahn macht, für denjenigen Punct, in welchem jenes Theilchen angekommen ist, in dem Augenblicke, da der Komet die angegebene Stellung einnimmt, so ergiebt sich Folgendes. Für die erste Stellung des Kometen, *vor* der Sonnennähe, wo sein Rad. V. $= 0{,}5 . p$, gehören zusammen:

$r = 0{,}8221$,	$\varrho = 0{,}605$,	$\psi = 92° 57' 52''$
$r = 0{,}6$,	$\varrho = 0{,}5156$,	$\psi = 90\ 11\ 17$
$r = 0{,}5$,	$\varrho = 0{,}5$,	$\psi = 90$

Alle diese Theilchen sind also auf eine Länge, die etwa $0{,}1 . p$ beträgt, zusammengedrängt, und die Zurückbeugung ist so, dafs der Schweif von der Sonne aus beinahe 3 Grade lang erscheinen würde. Für die zweite Stellung, in der Sonnennähe selbst, gehören zusammen:

$r = 0{,}5$,	$\varrho = 0{,}4833$,	$\psi = 38° 55' 23''$
$r = 0{,}4$,	$\varrho = 0{,}419$,	$\psi = 25\ 48\ 6$
$r = 0{,}3$,	$\varrho = 0{,}327$,	$\psi = 8\ 32\ 56$
$r = 0{,}287$,	$\varrho = 0{,}3095$,	$\psi = 7\ 6\ 33$
$r = 0{,}2563$,	$\varrho = 0{,}2633$,	ψ beinahe $= 0$,
$r = 0{,}25$,	$\varrho = 0{,}25$,	$\psi = 0$.

Die in eben so langer Zeit vom Kometen losgerissenen Theilchen bilden also einen stark gekrümmten Schweif, dessen Länge weit erheblicher, als die zwischen den Endpuncten gezogene Sehne $= 0{,}32 . p$ ist und dessen Zurückbeugung so viel beträgt, dafs er, von der Sonne aus gesehen, 39 Grade lang erscheinen würde. Für die dritte Stellung *nach* der Sonnennähe, wenn der Radius Vector wieder $= 0{,}5 . p$ geworden ist, gehören zusammen:

$r = 0{,}25$,	$\varrho = 0{,}9075$,	$\psi = 58° 52' -''$
$r = 0{,}27$,	$\varrho = 0{,}7650$,	$\psi = 74\ 37\ 29$
$r = 0{,}3$,	$\varrho = 0{,}6565$,	$\psi = 83\ 3\ 36$

$r = 0{,}4, \quad \varrho = 0{,}5273, \quad \psi = 89^\circ\, 27'$
$r = 0{,}46, \quad \varrho = 0{,}5035, \quad \psi$ beinahe $= 90^\circ$
$r = 0{,}5, \quad \varrho = 0{,}5, \quad \psi = 90^\circ.$

Hier hat die Sehne des Schweifes eine Länge von 0,55.p und dieser Schweif erscheint, von der Sonne aus gesehen, über 31 Gr. lang [1]. Wenn also diese Schweiftheile alle gleich gut gesehen würden, so fände in starkem Maſse eine Verlängerung des Schweifes um die Zeit des Perihelii statt; aber diese Voraussetzung läſst sich nicht annehmen. Um also die Frage zu beantworten, wie unsere berechneten Schweife in Rücksicht der Intensität ihres Lichtes und in Rücksicht ihrer Länge erscheinen würden, wollen wir nach zwei verschiedenen Voraussetzungen rechnen. Wir wollen erstlich, wenn dieses auch wenig wahrscheinlich ist, annehmen, die Menge der vom Kometen ausgehenden Theilchen sey bloſs der Zeit proportional, und die Intensität des Lichtes werden wir mit allem Rechte der in gleichem Raume vorhandenen Anzahl der Theilchen proportional setzen. Es läſst sich leicht zeigen, daſs die Zeiten, welche der Komet gebraucht, um von

$r = 0{,}8221$ bis $r = 0{,}6$,
oder von $r = 0{,}5$ bis $r = 0{,}287$,
oder von $r = 0{,}25$ bis $r = 0{,}4$ zu gelangen, ziemlich nahe gleich sind, ebenso die Zwischenzeiten zwischen $r = 0{,}6$ und $r = 0{,}5$, oder $r = 0{,}287$ und $r = 0{,}25$, oder $r = 0{,}4$ und $r = 0{,}5$ nahe gleich sind, und daſs diese Zeiten sich verhalten wie 7 zu 3. Nun beträgt die Länge des der letzten Zwischenzeit entsprechenden (aus den in dieser Zeit ausgegangenen Theilchen bestehenden) Schweifes in den drei Stellungen des Kometen 0,015.p, 0,070.p, 0,027.p, und die mittlere Intensität des Lichtes für diesen zunächst am Kometen liegenden Theil des Schweifes stände in umgekehrtem Verhältnisse dieser Zahlen. Nimmt man dagegen, als zweite Voraussetzung, an, wozu wir ziemlich berechtigt zu seyn scheinen, daſs die Menge der vom Kometen losgerissenen Theilchen der Gröſse der abstoſsenden Kraft proportional sey, so findet man, daſs für die in den eben erwähnten Zeiten entstandenen Theile des Schweifes die Längen

1 Diese Schweife sind in meinen Vorlesungen über die Astron. Taf. X. im 2. Th. dargestellt.

= 0,015, = 0,070, = 0,027

bleiben, aber ihnen eine mittlere Lichtstärke

= 96, = 100, = 80

zukommt, dafs also vor der Sonnennähe, als die Anomalie des Kometen = 90° war, der nur 0,015 lange Schweif nicht mehr mittlere Intensität des Lichtes besafs, als der von = 0,070 Länge in der Sonnennähe, und dafs nach der Sonnennähe bei 90° Anomalie der ungefähr doppelt so lange Schweif doch in seiner ganzen Länge noch eine fast gleiche Intensität des Lichtes besafs, wie der kürzere vor der Sonnennähe. Diefs sind Resultate, die der Erfahrung nahe genug entsprechen, und da das Gesetz der Aussendung der Schweifstheilchen gewifs sich nicht ganz genau an die Gröfse der abstofsenden Kraft bindet, da es offenbar Abänderungen nach Mafsgabe der Materie, welche zum Aussenden da ist, leidet, so könnte man mit dieser Uebereinstimmung immer zufrieden seyn.

Ich theile noch die Berechnung eines zweiten Falles mit, wo in gleichen Entfernungen die abstofsende Kraft 48 mal so grofs, als die anziehende Kraft angenommen ist. Da ich hier eben die drei Stellungen des Kometen nehme, so kann ich mich kürzer ausdrücken. Für die erste Stellung gehören zusammen:

$r = 0{,}8221$, $\varrho = 2{,}010$, $\psi = 104° 55' 36''$.
$r = 0{,}6$, $\varrho = 0{,}8196$, $\psi = 92\ 50\ 6$
$r = 0{,}5$, $\varrho = 0{,}5$, $\psi = 90\ 0\ 0$.

Hier hatte also der in dem *letzten* Zeitraume entstandene Schweif eine Länge = 0,320, bei ungefähr 2° 50′ Zurückbeugung. Für die zweite Stellung gehören zusammen:

$r = 0{,}5$, $\varrho = 2{,}7420$, $\psi = 78° 16' 13''$
$r = 0{,}29$, $\varrho = 1{,}1247$, $\psi = 29\ 1\ 24$
$r = 0{,}256$, $\varrho = 0{,}4816$, $\psi = 6\ 42\ 25$
$r = 0{,}25$, $\varrho = 0{,}25$ $\psi = 0\ 0\ 0$.

Für die dritte Stellung gehören zusammen:

$r = 0{,}25$, $\varrho = 4{,}279$, $\psi = 15° 45' 26''$,
$r = 0{,}3$, $\varrho = 2{,}423$, $\psi = 61\ 17\ 2$
$r = 0{,}4$, $\varrho = 1{,}003$, $\psi = 84\ 28\ 13$
$r = 0{,}46$, $\varrho = 0{,}585$, $\psi = 89\ 30\ 33$
$r = 0{,}5$, $\varrho = 0{,}5$, $\psi = 90\ 0\ 0$.

Wenn wir blofs auf die Länge des entstandenen Schweifes sehen und uns auf die ziemlich gleichen Zeiten beschränken, da der Komet von

$r = 0{,}6$ bis $r = 0{,}5$,
da er von $r = 0{,}29$ bis $r = 0{,}25$,
und von $r = 0{,}4$ bis $r = 0{,}5$
gelangte, so sind die entstandenen Längen des Schweifes
$= 0{,}32$, $= 0{,}95$, $= 0{,}52$.
Aber die mittlere Intensität des Lichtes dieser drei Schweife ist, wenn ich die Menge der Licht aussendenden Theilchen auf die Weise, wie vorhin, der Gröfse der abstofsenden Kraft gemäfs, bestimme, in den drei Fällen
$= 0{,}61$, $= 1{,}00$, $= 0{,}56$.
Wenn man dagegen sich auf einen noch kleinern Theil des Schweifes beschränkt und für die beiden letzten Stellungen des Kometen nur denjenigen Theil betrachtet, der in den letzten zwei Fünfteln der eben angenommenen Zeit entstanden ist, nämlich während der Komet von
$r = 0{,}256$ bis $r = 0{,}25$
und da er von $r = 0{,}46$ bis $r = 0{,}5$
fortgeht, so findet man die mittlere Intensität des Lichtes beinahe gleich $= 1{,}58$ im einen und $= 1{,}46$ im andern Falle, die Länge aber im ersten Falle $= 0{,}24$, also dreimal so grofs, als im zweiten $= 0{,}08$.

Diese Folgerungen über die Zunahme des Schweifes um die Zeit des Perihelii und kurz nachher und über die Abnahme desselben, wenn der Komet sich mehr von der Sonne entfernt, stimmen, wenn man noch auf keine ganz strenge Vergleichung mit den Beobachtungen eingeht, recht wohl mit denselben überein.

Wir haben bisher die vom Kometen ausgehenden Schweiftheilchen so angesehen, als ob sie genau die anfängliche Geschwindigkeit des Kometen selbst hätten; aber das ist nicht nothwendig und scheint offenbar bei den Kometen nicht der Fall zu seyn, die einen gegen das Ende hin sehr ausgebreiteten Schweif haben. Wenn der Komet selbst eine abstofsende Kraft auf die Schweiftheilchen ausübt, so müssen die gegen die Sonne zu abgestofsenen Theilchen, nachdem sie ihre gröfste Entfernung vom Kometen erreicht haben, von der Sonne abwärts zu strömen anfangen; sie haben also, wenn sie auf der Kometenbahn ankommen, eine etwas andere Geschwindigkeit, als der Komet selbst, und zwar die ihm vorangehenden eine etwas gröfsere, die nachfolgenden eine etwas kleinere, verbunden mit

einer von der Sonne abwärts gehenden Geschwindigkeit. Um nur ungefähr zu zeigen, welchen Einfluſs eine solche Geschwindigkeit der vorauseilenden und der zurückbleibenden Theilchen auf die Gestalt des Schweifes hat, habe ich ein Beispiel berechnet, wo die abstoſsende Kraft der Sonne der auf den Körper des Kometen wirkenden anziehenden Kraft gleich, die auf den Radius Vector senkrechte gegen den Kometen relative Geschwindigkeit der Theilchen aber halb so groſs als die Geschwindigkeit des Kometen selbst und die Geschwindigkeit nach der Richtung des Rad. Vect. der des Kometen gleich ist. Dann ergiebt sich, wenn ϱ', ψ' sich auf die vorangehenden, ϱ'', ψ'' sich auf die nachfolgenden Theilchen beziehen, für die erste Stellung des Kometen, wo $r = 0{,}5$ war, als zusammengehörend:

$r = 0{,}6 \ldots \varrho' = 0{,}6557,\ \varrho'' = 0{,}6376,\ \psi' = 86^\circ\, 32',\ \psi'' = 97^\circ 53\tfrac{1}{4}'$
$r = 0{,}5 \ldots \varrho' = \varrho'' = 0{,}5,\ \psi' = \psi'' = 90^\circ\, 0',$

für die zweite Stellung, $r = 0{,}25$:

$r = 0{,}4,\ \varrho' = 0{,}7734,\ \varrho'' = 0{,}6178,\ \psi' = 36^\circ\, 18',\ \psi'' = 65^\circ 9\tfrac{1}{4}',$
$r = 0{,}287,\ \varrho' = 0{,}5073,\ \varrho'' = 0{,}4377,\ \psi' = 10^\circ\ 8',\ \psi'' = 32^\circ 1',$
$r = 0{,}25,\ \varrho' = \varrho'' = 0{,}25,\ \psi' = \psi'' = 0^\circ\, 0',$

für die dritte Stellung, $r = 0{,}5$:

$r = 0{,}3,\ \varrho' = 1{,}0428,\ \varrho'' = 0{,}9232,\ \psi' = 79^\circ\, 59',\ \psi'' = 58^\circ\, 24\tfrac{1}{2}',$
$r = 0{,}4,\ \varrho' = 0{,}6997,\ \varrho'' = 0{,}670,\ \psi' = 92^\circ\, 44\tfrac{1}{4}'\ \psi'' = 79^\circ\, 30,$
$r = 0{,}5,\ \varrho' = \varrho'' = 0{,}5,\ \psi' = \psi'' = 90^\circ\, 0'.$

Um hier die Lichtstärke der einzelnen Theile zu berechnen, müſste man noch mehrere Voraussetzungen über die Austheilung der mit verschiedenen relativen Geschwindigkeiten (in Beziehung auf den Kometen) begabten Theilchen annehmen. Hierbei zu verweilen, würde jetzt noch zu voreilig seyn; ich bemerke daher nur, daſs man die fächerförmig ausgebreitete Form des Schweifes weniger breit erhalten würde und damit eine den Beobachtungen mehr entsprechende Form erhielte, wenn man die relative Geschwindigkeit senkrecht auf den Radius Vector geringer setzte.

Diese Folgerungen alle weichen nicht so merklich von der Erfahrung ab, daſs man sich nicht geneigt finden könnte, die Theorie als die richtige anzusehen; aber bei einer schärferen Vergleichung bieten sich dennoch Zweifel dagegen dar. Sehen wir nämlich jetzt nur auf die Axe des Schweifes, auf die Mittel-

linie zwischen seinen beiden Grenzen [1], so können wir die Theilchen, die sich in dieser befinden, so ansehen, als ob sie blofs die eigene Geschwindigkeit des Kometen als Anfangsgeschwindigkeit besafsen, und nun liefse sich aus den Beobachtungen finden, wie grofs die abstofsende Kraft seyn müfste, damit das Schweiftheilchen in den beobachteten Punct gelange. Die Formeln zeigen (und selbst eine oberflächliche Untersuchung über die Gleichheit der Sectoren in gleichen Zeiten zeigt), dafs man die Gröfse der abstofsenden Kraft und den Ort, wo das Theilchen den Kometen verliefs, aus den in der Beobachtung gegebenen Gröfsen finden kann, und nun sollte sich der Werth der abstofsenden Kraft in Vergleichung gegen die anziehende gleich grofs finden, welchen Punct des Schweifes man auch in Betrachtung zöge. Dieses findet aber nicht statt und nöthigt uns zu dem Geständnisse, dafs die Theorie noch in wesentlichen Puncten einer Correction bedarf. Diese Rechnungen, auf einige Beobachtungen des grofsen Kometen von 1811 angewandt, geben Folgendes. Bessel beobachtete am 11. Sept. die Lage der Axe des Schweifes und bestimmte einen Punct in ihr, der $=0{,}0248 \cdot p$, ungefähr 2 Millionen Meilen von dem Kometen entfernt war; die Berechnung zeigt, dafs das dort beobachtete Theilchen vor $15\frac{1}{4}$ Tagen den Kometen verlassen haben und dafs die abstofsende Kraft $= 2{,}46$ der anziehenden seyn mufste, wenn übrigens unsere bisherigen Voraussetzungen gelten. Eine andere Beobachtung von Bessel am 5. Oct., gerichtet auf ein $0{,}0238 \cdot p$ vom Kometen entferntes Theilchen, giebt die Kraft $= 5{,}7$. Aber entscheidender spricht sich die Abweichung der Theorie von der Erfahrung aus, wenn man für einerlei Zeitpunct zwei ungleich vom Kometen entfernte Puncte des Schweifes berechnet. Die Zeichnung des Kometen von 1811 für den 11. Oct. giebt für einen, nur um $0{,}0130 \cdot p$, ungefähr 1 Million Meilen vom Kometen entfernten, Punct der Schweifaxe eine so starke Zurückbeugung, dafs nur eine abstofsende Kraft $= 0{,}9$ erforderlich wäre, um die Schweiftheilchen in die der Beobachtung entsprechende Lage zu bringen; führt man dagegen für eben die Zeit die Rechnung für einen $0{,}1348 \cdot p$, ungefähr 10 Millionen Meilen vom Kometen entfernten Punct, so müfste man die Kraft $= 16{,}85$

1 Wie man die wahre Axe des Schweifkonoids so genau als möglich findet, habe ich in der astr. Zeitschr. I. 394. gezeigt

annehmen. Diese Abweichung der Theorie von der Erfahrung zeigt sich zwar um etwas vermindert, wenn man an die anfängliche Geschwindigkeit denkt, mit welcher selbst die in der Axe des Schweifes liegenden Theilchen vom Scheitel des Schweifkonoids her ankommen mochten, als sie beim Fortgehen von der Sonne abwärts, vor dem Kometen vorbei gingen; aber dennoch zeigt sich immer, dafs der Schweif sehr nahe am Kometen stärker zurückgebeugt ist, als er nach dieser Theorie seyn sollte. Vergleichungen der Theorie mit den Beobachtungen des Kometen von 1744 geben eben solche Abweichungen.

Hieraus scheint sich das Resultat zu ergeben, dafs die von der Sonne abwärts aufsteigenden Schweiftheilchen nicht blofs dieser abstofsenden Kraft folgen, sondern zugleich einen merklichen Widerstand finden und daher sogleich sehr merklich hinter dem Kometen zurückbleiben; und es verdiente nun eigentlich die Frage, ob die Rücksicht auf einen solchen Widerstand die Phänomene genügend erkläre, eine genaue Beantwortung. Dieses Problem auf eine irgend genügende Weise zu lösen, ist mir nicht gelungen, und ich mufs es daher gänzlich unentschieden lassen, ob die vorhin angeführten Umstände, welche in der Erfahrung so sind, wie die Theorie sie ergab, zu einiger Begründung der Hoffnung führen, dafs jene Theorie, mit Rücksicht auf den Widerstand verbessert, richtig seyn könne. Dafs die auf die Schweiftheilchen wirkende abstofsende Kraft bei verschiedenen Kometen verschieden seyn könnte, dafs einige vom Kometen aufsteigende Materien stärker, andere schwächer abgestofsen werden könnten und dann zwei oder mehr Schweife von ganz ungleicher Krümmung sich bilden müfsten, das liefse sich wohl einsehen, und eine Anwendung der Rechnung auf einzelne Kometen würde hier mannigfaltige Belehrung gewähren, wenn die Hauptsätze der Theorie erst festgestellt wären. Wie man die nach der Sonne gerichteten Schweife, oder die, deren Richtung sehr weit von der Opposition abweicht, erklären solle, würde alsdann eine besondere Erwägung verdienen.

Unter den von andern Schriftstellern angegebenen Meinungen über die Entstehung der Kometenschweife sind nur wenige von der Art, dafs sie hier näher betrachtet zu werden verdienen. Piazzi's Meinung [1] scheint mir weder an sich glaublich, noch

1 Della cometa dell' anno 1811.

zur Erklärung der Erscheinungen recht geeignet. Wenn es auch gegründet seyn mag, was dieser Astronom annimmt, dafs der Komet materielle Theilchen an sich zieht, so ist es doch gar nicht anzunehmen, dafs diese Anziehung bis nuf 10 oder 20 Millionen Meilen merklich seyn und noch da eine solche Verdichtung der angezogenen Theilchen bewirken sollte, dafs sie durch eignes oder reflectirtes Licht sichtbar würden, und es erhellet gar nicht, warum sie nur in der der Sonne beinahe gerade entgegengesetzten Richtung vorhanden seyn oder nur da so beschaffen seyn sollten, dafs sie uns reflectirtes Licht (denn nur das scheint Piazzi ihnen beizulegen) zusenden.

Etwas mehr durchgeführt, aber ganz unhaltbar, ist Lehmann's Hypothese[1]. Er nimmt an, dafs diejenigen Kometen, welche keinen Schweif haben, sich wie die Hauptplaneten so um ihre Axe drehen, dafs sie der Sonne abwechselnd ihre verschiedenen Seiten zuwenden, dafs hingegen die geschweiften Kometen der Sonne immer dieselbe und zwar diejenige Seite zuwenden, welche die meiste Masse hat. Er nimmt ferner eine Expansivkraft der den Kometen umgebenden Materie an, ohne jedoch zu sagen, dafs diese nach der Richtung von der Sonne abwärts stärker wirken solle, sondern erklärt die nur nach der einen Richtung gröfsere Ausdehnung der Kometen-Atmosphäre daraus, dafs die Schwungkraft an der von der Sonne abgewandten Seite gröfser und die Anziehungskraft der Sonne dort kleiner sey; so entstehe also ein Uebergewicht der Expansivkraft, oder die atmosphärischen Theilchen werden, wie er glaubt, durch eine Art von Fluth an jener Seite angehäuft. Hierbei erscheint es aber als ganz willkürlich angenommen, dafs die Expansivkraft uns nur da ihre Wirkung zeigt, wo jener doch in der That höchst geringe Unterschied der gegen die Sonne wirkenden Kraft statt findet; wäre eine nach allen Richtungen gleich wirkende Expansivkraft vorhanden, so erhellet durchaus nicht, warum sie nicht auch nach einer auf den Radius Vector senkrechten Richtung die Kometen-Atmosphäre erweitern sollte, und die Verlängerung nach der Richtung des Radius Vector könnte gewifs, so wie bei der Ebbe und Fluth auf der Erde, nur höchst unbedeutend seyn. Lehmann bezieht sich zwar auf die Resultate seines Calculs, allein auch dieser ist nicht so weit fortge-

1 Astr. Jahrb. 1826. S. 161.

führt, als zur festen Begründung seiner Hypothese erforderlich gewesen wäre[1].

Vielleicht die allerungenügendste Erklärung der Kometenschweife ist die von Cardanus angegebene, die noch neuerlich von Pompée de Laune wieder vertheidigt worden ist. Nach des Letztern Meinung sind die Kometen aus einem durchsichtigen Flüssigen zusammengesetzt, und so wie man sich einer Glaskugel mit Wasser gefüllt bediene, um ein mehr gesammeltes Licht zu erhalten, so sammle die Kometenkugel das Licht hinter sich und stelle den Schweif dar[2]. Flaugergues zeigt, daſs die Phänomene des Schweifes dieser Hypothese nicht einmal entsprechen und daſs das von Cardanus angeführte Experiment gerade das Gegentheil von dem beweise, was es beweisen soll. Cardanus nämlich lieſs in ein übrigens verdunkeltes Zimmer das Licht durch eine Glaskugel einfallen; da zeigte sich freilich ein heller Strahl durch den Wiederschein an Sonnenstäubchen und andern sichtbaren Theilchen, aber Flaugergues bemerkt mit Recht, er hätte nur die Fensterladen öffnen sollen, um sich zu überzeugen, daſs dann kein Schweif der durchsichtigen Kugel mehr sichtbar bleibe.

Ich schlieſse diese Bemerkungen über die Kometenschweife mit der Erwähnung der Frage, welchen Einfluſs der Kometenschweif auf unsere Atmosphäre haben würde, wenn er sie erreichte. Beantworten kann niemand diese Frage und die ältern Hypothesen, die die Sündfluth von einem Kometen herleiteten u. s. w., brauchen nicht mehr erwähnt zu werden. Es ist einigermaſsen glaublich, daſs am 26. Juni 1819 die Erde durch den Schweif des damals erschienenen Kometen gegangen ist; aber eine Wirkung hat niemand wahrgenommen, da die groſse Hitze um jene Zeit oft auch statt gefunden hat, wenn kein Komet in unserer Nachbarschaft vorhanden war.

Ueber die allmälige Ausbildung der Kometen und über den Einfluſs, den jede Rückkehr zur Sonnennähe auf diese Ausbildung haben mag, hat vorzüglich Herschel eine umständlich entwickelte Meinung angegeben. Nach seiner Meinung[3], der

1 Disquisitiones nonnullae mechanicae de origine caudarum cometarum cet. Gott. 1822. 8.

2 Traité et definition des comètes. Rouen 1813.

3 Philos. Transact. 1812. p. 115. 229.

auch LAPLACE seinen Beifall gegeben hat[1], bestehen die Kometen aus eben solcher Materie, wie diejenigen Nebelflecke, die nach seinen Beobachtungen als noch unausgebildete Massen einer sehr dünnen, selbst leuchtenden Materie im Weltraume schweben und vielleicht schon für sich allein zu einer allmäligen Verdichtung gelangen. Wenn diese unserer Sonne nahe genug kommen, um ihrer Attraction zu folgen, so beschreiben sie, eben so gut, wie es dichtere Körper thun würden, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel um die Sonne. Diese Materie ist aber der Verdünnung durch den Einfluſs der Sonne oder durch die Sonnenwärme so sehr fähig, daſs ein Anschwellen der Kometen-Atmosphäre besonders an der der Sonne zugekehrten Seite entsteht, weshalb der Kern auch bei dem Kometen von 1811 nicht genau in der Mitte des den Nebel bildenden Kopfes des Kometen erschien. Die neblige Materie des Kometen, die vermuthlich in gröſserer Entfernung von der Sonne eine sphärische Form hatte, steigt also von dem Kometen auf und wird nun durch den Impuls der Sonnenstrahlen (so drückt HERSCHEL es aus) in eine kleine Bewegung gesetzt, so allmälig von der Sonne entfernt und in einer etwas divergirenden Richtung der Region der Fixsterne zugeführt. Da nun auf diese Weise eine sehr groſse Menge feiner Flüssigkeiten, wenn gleich in sehr verdünntem Zustande, dem Kometen entrissen wird, so ist zu vermuthen, daſs der Komet dadurch in einen verdichtetern Zustand übergeht und daſs diejenigen Kometen, die schon öfter ihre Sonnennähe erreicht haben, zu einem mehr verdichteten Zustande gelangt sind und daher keine so groſsen Schweife zeigen, als diejenigen, die noch viele Materie, welche der Verflüchtigung in der Sonnennähe noch nicht ausgesetzt gewesen ist, mitbringen. Auf diese Weise könnte man die groſse Länge eines Kometenschweifes entweder als einen Beweis ansehen, daſs der Komet noch selten oder nie in die Sonnennähe gekommen sey, oder auch, daſs er bei dem Durchlaufen seiner weit ausgedehnten Bahn neue, noch unverdichtete Nebelmaterie aufgenommen habe.

LAPLACE hat in Hinsicht auf diese Veränderung noch den Gedanken geäuſsert, daſs diese Verflüchtigung, die dem Verdunsten auf der Erde gleicht, die groſsen Einwirkungen der

1 Expos. du syst. du monde. Liv. 2. chap. 5. und Connoiss. des Tems. 1816. p. 213.

Sonne oder Sonnenwärme auf den dichtern Theil des Kometen vermindere, indem bei diesem Processe eine grofse Menge Wärme in den latenten Zustand versetzt werden möge.

Laplace hat an Herschel's Hypothese noch eine Untersuchung geknüpft[1]. Wenn die Kometen aus Nebelmassen bestehen, die nach allen möglichen Richtungen und mit allen möglichen Geschwindigkeiten in den Wirkungskreis unserer Sonne eintreten, so müfsten diese eben so gut Hyperbeln als Ellipsen beschreiben können; es scheint daher der Umstand, dafs noch kein Komet, der eine auffallend hyperbolische Bahn durchläuft, beobachtet worden ist, dieser Hypothese entgegen zu seyn. Laplace zeigt, dafs, obgleich im Allgemeinen eine Hyperbel hier ebenso wohl statt finden könnte, als eine Ellipse, dennoch diejenigen Fälle, wo ein Komet der Sonne so nahe kommt, dafs er von uns beobachtet werden kann, vorzugsweise den elliptischen Bahnen angehören und dafs daher nur sehr selten ein Komet erscheinen kann, dessen Bahn in merklichem Grade hyperbolisch wäre. Uebrigens fügt Laplace an die Vermuthungen Herschel's noch den Schlufs, dafs die Kometen bei jeder Ankunft in der Sonnennähe an Masse verlieren müssen und daher wohl auch ganz aufgelöst werden könnten, wenn gleich der andere Erfolg, dafs zuletzt ein immer mehr verdichteter Kern übrig bleibe, auch statt finden könne. Milne glaubt in dem geringern Glanze, den der Halleysche Komet bei seiner letzten Sichtbarkeit zeigte, eine Bestätigung dieser Hypothese zu finden, die man indefs nicht eher vollkommen anerkennen kann, als bis noch mehrere Beobachtungen zu gleichen Schlüssen berechtigen. Merkwürdig ist es aber, dafs schon Kepler ähnliche Ansichten geäufsert und hinzugesetzt hat: sicut bombyces filo fundendo, sic cometas cauda exspiranda consumi ac denique mori[2]. *B.*

K r a f t.

Vis; Force; *Force, Power.*

Der Ausdruck *Kraft* wird unzählig oft gebraucht, ohne dafs bei weitem in den meisten Fällen irgend eine Undeutlichkeit oder ein Mifsverständnifs dabei obwaltet, und dennoch ist eine

1 Connoiss. des Tems. 1806. p. 213.
2 Kepler de cometis. p. 101.

allgemeine und scharfe Feststellung des damit zu verbindenden Begriffes vielen und grofsen Schwierigkeiten unterworfen, welches hauptsächlich auf der Vielfachheit seiner Anwendung beruhet. Man sagt nämlich, die Kraft des Geistes und Verstandes, die Kraft der Gesetze, der Gewohnheit, die Kraft des Lichtes, eines Menschen, des Schiefspulvers, eines Rammklotzes u. s. w., und bedient sich also dieses Ausdruckes bei geistigen und körperlichen, lebenden und leblosen Gegenständen. Die gewöhnliche Definition, wonach Kraft alles dasjenige bezeichnet, was Bewegung erzeugt oder hindert und ändert, ist zunächst aus der Mechanik entnommen, aber es fragt sich, ob sie alle Anwendungen des Wortes umfafst. Werden diese in ihrem ganzen Umfange genommen, so genügt die gegebene Definition nicht, sondern das Wort Kraft bezeichnet jede Ursache irgend einer Wirkung, welche diese nothwendig erzeugt und durch die Gröfse der letzteren mefsbar ist. Hiernach sind dann die Kräfte zweifacher Art, nämlich geistige und der Materie inhärirende, wovon die ersteren durchaus nicht in das Gebiet der Physik gehören und daher auch bei allen nachfolgenden Untersuchungen und Bestimmungen überall nicht berücksichtigt werden[1]. Auch die der sinnlich wahrnehmbaren Natur eigenthümlichen Kräfte sind aufserordentlich vielfach, bewirken, hindern und modificiren wohl ohne Ausnahme Bewegung, und auf diese pafst daher die oben mitgetheilte Definition mindestens ungleich besser.

Die physischen Kräfte, welche die vielfachsten und mannigfaltigsten Bewegungen erzeugen, werden in den Encyklopädien meistens alphabetisch geordnet vorgetragen. Indem aber hierbei viele Wiederholungen unvermeidlich sind, eine klare Uebersicht des Ganzen dadurch aber mehr erschwert als erleichtert wird, so scheint es mir am zweckmäfsigsten zu seyn, die wichtigsten Untersuchungen der verschiedenen Kräfte, von dem Allgemeineren zum Speciellen übergehend, auf einander folgen zu lassen.

1) Eine wichtige naturphilosophische Erörterung betrifft zunächst die Frage, ob es selbstständige, für sich bestehende, physische Kräfte geben könne oder ob jede Kraft an irgend ein gröberes materielles oder ein ätherisches Vehikel gebunden seyn müsse. Nach der Ansicht einiger deutschen Naturphilosophen

1 Vergl. Art. *Naturlehre.*

der neueren Zeit sollte die selbstständige Exsistenz von Kräften nicht blofs möglich seyn, sondern alle Materie sogar aus zwei Kräften, der Dehnkraft und Ziehkraft, bestehen und unter Voraussetzung einer Theilbarkeit ins Unendliche wieder in diese zurückkehren könneu, wonach dann allerdings diese beiden Kräfte selbstständiger seyn müfsten, als alle Materie. Allein diese sogenannte dynamische Theorie ist, oder war vielmehr, eigentlicher ein Spiel der Phantasie, als eine ächt wissenschaftliche Bestimmung, und es lohnet sich daher kaum der Mühe, auf eine ernstliche Widerlegung derselben einzugehen. Fast auf gleiche Weise gehaltlos sind die Hypothesen derjenigen, welche die unwägbaren Potenzen (Inponderabilien, Incoërcibilien) als blofse Kräfte oder Thätigkeiten betrachteten oder ihr eigentliches Wesen durch die Einführung eines solchen Namens erklärt zu haben wähnten. Ueberhaupt wurden solche Namen ohne scharfe Bestimmung der Begriffe mit einer gewissen Leichtfertigkeit aufgestellt und eine oberflächliche Anwendung derselben sollte den Abgang einer eigentlichen Erklärung der Sache ersetzen. So war unter andern gar nicht bestimmt, ob diese sogenannten Kräfte (*Thätigkeiten*) für sich oder nur in ihren Wirkungen wahrnehmbar wären, ob ihre Exsistenz als eine selbstständige und an irgend einem gewissen Orte fortdauernde zu betrachten sey oder ob sie zugleich mit ihrer Aeufserung aufhörten, demnächst aber wieder entständen, und Letzteres dann entweder durch sich selbst oder durch irgend ein anderes höheres schaffendes Princip. Die unwissenschaftliche Oberflächlichkeit bei der Aufstellung solcher Theorien wird augenfällig, sobald man nur die ausgesprochenen Sätze im Einzelnen prüft. Wird also namentlich die Elektricität eine blofse Kraft oder Thätigkeit genannt, so fragt sich, wenn z. B. ein geladener Conductor durch einen abgegebenen Funken in seinen ursprünglichen Zustand zurücktritt, ob dieser Funke, welcher doch eigentliche Elektricität, also Kraft oder Thätigkeit ist, eine leuchtende oder eine mechanisch wirkende oder eine aus beiden zusammengesetzte Kraft sey, ob beide Aeufserungen als nothwendig verbunden und im Wesen derselben Kraft gegründet oder nur zufällig vereinigt erscheinen, oder ob die ihrem Wesen nach nur *leuchtende Kraft* eine zweite mechanisch wirkende als hinzugekommen besitzt, wo dieselbe und in welchem Zustande sie nach ihrer Vereinigung mit der Erde bleibt, ob sie als dauernde Kraft

stets zu wirken d. h. zu leuchten und mechanische Effecte zu erzeugen fortfährt, oder erstirbt (zur Unkraft wird), und durch welches in ihr oder aufser ihr liegende Agens sie wieder zur thätigen d. h. zur wirklichen Kraft zurückkehrt. Auf alle diese und ähnliche nothwendige Fragen wird bei der Allgemeinheit und Unbestimmtheit solcher Ausdrücke keine Rücksicht genommen, ja sogar nicht einmal erwogen, dafs eine unwirksame Kraft oder eine unthätige Thätigkeit einen logischen Widerspruch einschliefst und mit der Aufhebung des Effectes einer Kraft durch den Effect einer andern ihr entgegen wirkenden nicht verwechselt werden darf. Die Erscheinungen der physischen Welt, selbst auch diejenigen, welche die sogenannten Incoërcibilien darbieten, lassen sich diesemnach nicht füglich auf eine blofse Kraft zurückführen, vielmehr zeigen gründliche und genaue Untersuchungen derselben, dafs ihnen auf allen Fall ein materielles Substratum, wenn auch kein eigenthümlicher Stoff, wie namentlich bei den Schallwellen, zum Grunde liege.

2) Die Schallwellen äufsern eine Wirkung auf die Gehörwerkzeuge, die Undulationen des Lichtes auf die Organe des Auges (Huygen's Theorie einmal als richtig angenommen), und wenn nach Rumford, Davy u. a. die Wärmephänomene auf ähnlichen Schwingungen (*Rayons*) beruhen, so erzeugen auch diese unverkennbare Effecte; es könnte also gefragt werden, ob diese Wellen an sich, also nicht die Substanz, worin sie statt finden, sondern nur dieser Zustand des Undulirens, mithin etwas nicht Materielles, eine Kraft besitze. Genau genommen ist indefs nicht sowohl der Zustand des Bewegtseyns an sich die Ursache der erzeugten Wirkung, als vielmehr der bewegte Körper, jedoch nur in so fern, als eine Bewegung desselben statt findet, und es läfst sich daher nicht eigentlich sagen, dafs ein blofser Zustand eine Kraft besitze, sondern nur ein Körper, wenn er sich in einem gewissen Zustande befindet. So läfst sich namentlich beim Schalle nicht dem Zustande des Undulirens der Luft die Wirkung beilegen, welche auf die Gehörwerkzeuge hervorgebracht wird, sondern der Luft, insofern sie wellenartige Schwingungen macht, und will man z. B. den Magnetismus als eine eigenthümliche Beschaffenheit gewisser Körper betrachten, so bleibt es allezeit der Körper oder die ihm angehörige Potenz, welche die beobachteten Wirkungen äufsert, woraus sich also abermals ergiebt, dafs die den genannten Wirkungen zum Grunde

liegenden Kräfte an irgend eine materielle Basis gebunden sind. Ueberhaupt scheint mir im Gebiete alles dessen, was zur Naturlehre gehört, überall keine selbstständige und an kein materielles Substratum gebundene Kraft vorhanden oder auch nur möglich zu seyn.

3) Der bewegenden Kräfte giebt es im Allgemeinen zwei Classen, nämlich die *dauernden* und die *vorübergehenden*, beide bestimmt unterscheidbar, wenn sie auch in vielen Fällen in einander übergehen[1]. Vorübergehend sind diejenigen, welche im Momente ihrer Wirksamkeit erschöpft werden, z. B. die Kraft, womit ein bewegter Körper einen ruhenden oder bewegten stöfst, ein Hammer den Nagel, eine Geschützkugel die Mauer trifft, oder womit eine gegebene Wassermenge gegen die Schaufel des Mühlrades stöfst, oder das aus dem entzündeten Schiefspulver entwickelte Gas gegen die umgebende Hülle drückt. Dahin gehört dann auch diejenige Kraft, mit welcher alle bewegten oder schwingenden Wellen die verschiedenen Körper und Organe treffen; denn jede einzelne Schallwelle z. B., deren eine gewisse Menge in einer gegebenen Zeit erfolgen müssen, wenn die Empfindung eines eigenthümlichen Tones erzeugt werden soll, verschwindet selbst, und somit auch die wirksame Kraft derselben, in dem Augenblicke, in welchem sie diese äufsert. Als Beispiele fortdauernder Kräfte, die man meistens *absolute* genannt hat, können dagegen vorzüglich dienen die Newtonsche Anziehung, die Kraft der Cohäsion und die der Repulsion, welche die Elemente der Körper hindert, mit einander in unmittelbare Berührung zu kommen, die Elasticität der gesperrten Gase und selbst der aufgewundenen Uhrfedern u. s. w. Ob indefs die letztere nicht mit der Zeit unmerklich abnimmt, insofern die stets gespannten Theile allmälig in ihrer Wirksamkeit nachlassen, bleibt mindestens fraglich. Unter die Kräfte endlich, welche zwischen beiden in der Mitte liegen, gehören diejenigen, womit die durch Willensthätigkeit angespannten thierischen Muskeln wirken, in-

1 Man unterscheidet sonst auch drei Arten von bewegenden Kräften: 1) augenblicklich wirkende, welche eine gleichmäfsige Bewegung erzeugen, wenn nicht Hindernisse eine Veränderung hervorbringen; 2) stetig und gleichmäfsig wirkende, welche eine gleichmäfsig beschleunigte Bewegung zur Folge haben; 3) stetig und ungleichmäfsig wirkende, deren Demonstration am schwierigsten ist. S. Rees Cyclop. T. XV. Art. Force.

dem diese zwar im Momente ihrer Wirksamkeit aufhören, zugleich aber auch länger dauern können, endlich aber durch die nothwendig eintretende Ermüdung erschöpft werden müssen.

4) Eine von denjenigen Untersuchungen der bewegenden Kräfte, womit sich die alten Geometer am meisten beschäftigt haben, ist die Bezeichnung derselben durch *todte* und *lebendige*. Man könnte diejenige Kraft eine todte oder richtiger eine latente nennen, welche zwar in so fern als vorhanden seyend zu betrachten ist, als sie jederzeit hervorgerufen werden kann und also in ihren Bedingungen vollständig vorhanden ist, zur gegebenen Zeit aber allerdings nicht als wirkend, folglich auch, genau genommen, gar nicht exsistirt. So darf man z. B. dem Schiefspulver die Kraft beilegen, einen gewissen Widerstand zu überwinden, diese aber zugleich so lange latent nennen, bis dasselbe entzündet ist. Hierbei wird aber offenbar das Vermögen oder die Fähigkeit einer Kraftäufserung mit einer vorhandenen Kraft selbst verwechselt, welche letztere in dem nicht entzündeten Schiefspulver keineswegs schon wirklich vorhanden ist; nach der Entzündung exsistirt aber das Schiefspulver selbst nicht mehr, sondern ist in Gase verwandelt, welche dann in einen engen Raum comprimirt die Kraftäufserung zeigen. Eine *latente Kraft*, insofern das Wesen der letzteren durch ihre Wirksamkeit gegeben wird, ist also eigentlich ganz undenkbar und liegt dabei offenbar die Verwechselung der Möglichkeit mit der Wirklichkeit einer Kraftäufserung zum Grunde.

Die Abtheilung der Kräfte in todte und lebendige, welche im Jahre 1686 zuerst durch Leibnitz[1] aufgestellt wurde, um das von ihm angegebene Mafs der Kräfte zu erläutern, bezeichnet übrigens etwas ganz anderes. Hiernach ist nämlich eine todte Kraft eine wirklich vorhandene und wirkende, aber nur keine Bewegung hervorbringende, z. B. diejenige, womit ein schwerer Körper auf seine Unterlage drückt, oder womit er einen Faden straff zieht, an welchem er herabhängt. Joh. Bernoulli[2] nimmt daher Druck und todte Kraft als gleichbedeutend. Es ist indefs einleuchtend, dafs beide grofse Geometer in diesen Irrthum durch das Bestreben geführt wurden, das Mafs der Kräfte

1 Acta Erud. Lips. a. 1695. Apr. p. 145.

2 Acta Erud. 1735. Mai. p. 210. Discours sur le Mouvement. Chap. III. def. 2.

aus der erzeugten Bewegung zu finden, wonach also eine jede Kraft = 0 oder sie selbst todt seyn muſs, wenn sie gar keine Bewegung hervorbringt. Nach dieser Bestimmung müſsten alle in der Statik betrachteten Kräfte todte seyn, weil man bloſs das durch sie erzeugte Gleichgewicht construirt. Aber auch auſserdem erkennt man bald die Unzulässigkeit dieser angenommenen Bezeichnung, insofern sie der Kraft selbst etwas beimiſst, was keineswegs in dieser und selbst nicht einmal in demjenigen Körper liegt, dem sie angehört, sondern in der Beschaffenheit desjenigen, gegen welchen die Kraft ausgeübt wird. Soll ferner das Prädicat *todt*, jenem Sprachgebrauche gemäſs, das Aufhören der Wirksamkeit bezeichnen, so führt dieses in der Anwendung zu seltsamen Folgerungen. Wenn man z. B. in die eine Schale einer über einem Tische befindlichen Waage ein Gewicht legt, so wird sie niedersinken und auf der unbeweglichen Unterlage ruhen. Diese bleibende Wirkung müſste also durch eine todte Kraft erzeugt werden, welche augenblicklich wieder lebendig würde, wenn man die Unterlage wegnähme. Zwei gleiche Gewichte auf beiden Waagschalen wären lebendig, so lange die Waage oscillirt, und würden beide todt, sobald sie still steht. Obgleich es sich hier nun bloſs von einer Bezeichnung und einem Ausdrucke handelt, in der Sache selbst aber nichts geändert wird, so ist es doch besser, solche bloſs willkürliche Bestimmungen aus der Wissenschaft zu entfernen; denn offenbar wird keine Veränderung in der Kraft selbst dadurch hervorgebracht, daſs ihr eine andere gleich starke widerstrebt und nicht sie selbst, sondern bloſs ihre Wirkung = 0 macht.

Leibnitz nennt diejenige Kraft lebendig, welche nicht bloſs ein Streben nach Bewegung, sondern wirkliche Bewegung erzeugt, und in diesem Sinne ist der Ausdruck auch von Wolf[1] verstanden worden, Joh. Bernoulli[2] dagegen dehnt den Begriff zugleich auf diejenigen Körper aus, welche durch ihre eigene Bewegung andere in Bewegung setzen könnten, wenn sie dieselben träfen, z. B. eine fallende Kugel, welche in sich die Kraft habe, eine andere fortzustoſsen, obgleich sie dieselbe nicht trifft und daher auch nicht fortstöſst. Indem aber die Kraft eines bewegten Körpers nicht aufhören kann, so lange sie nicht in

1 Elem. Math. Mech. Cap. I. def. 7.

2 Acta Erud. 1735. Mai. p. 210. Opp. T. III. Nr. 145.

einem andern ein Hindernifs findet oder durch eine entgegenwirkende vernichtet wird, durch den Stofs eines bewegten Körpers gegen einen ruhenden aber wieder eine proportionale Bewegung erzeugt wird, so kam Bernoulli hierdurch auf den Satz, dafs in der Körperwelt allezeit eine gleiche Summe lebendiger Kräfte erhalten werde. Nach Leibnitz soll die lebendige Kraft aus unzählig oft wiederholten Eindrücken der todten Kraft bestehen, insofern z. B. die Schwere eines Körpers in jedem Augenblicke durch einen andern, Widerstand leistenden, aufgehoben wird und also nur Druck, aber keine Bewegung entsteht. Ist dieses Hindernifs nicht vorhanden, also die schwere Masse in Bewegung, so giebt ihr die Schwere in jedem Zeittheilchen einen Druck oder ein unendlich kleines Vermögen, andere Körper zu bewegen, woraus dann in endlicher Zeit eine endliche Kraft entsteht. Hiernach sollen also Druck und Stofs gar nicht vergleichbar seyn.

Hutton[1] dagegen bemerkt, dafs die Wirkung des Stofses eines bewegten Körpers stets eine gewisse Zeit erfordert, und dann folgt, dafs ein blofser Druck, also eine todte Kraft, gedacht werden könne, welche in derselben Zeit eine gleich starke Wirkung hervorbringt, wodurch aber der Unterschied zwischen einer lebendigen und todten Kraft verschwindet.

Wichtigere und fruchtbarere Untersuchungen haben in den neuesten Zeiten diese von den älteren Geometern mit dem lebhaftesten Interesse ventilirten Streitfragen vergessen gemacht[2].

5) Einen Gegenstand der lebhaftesten Discussionen bei den älteren Geometern, welcher aber offenbar auf einem Mifsverständnisse und einer Verwechselung der Begriffe beruhete, gab die Bestimmung des sogenannten *Mafses der Kraft.* Die Sache selbst kann gegenwärtig blofs noch historisches Interesse haben, welches aber wegen der Celebrität der darin verwickelten Männer nicht geringe ist. Folgende kurze Angabe der Hauptsachen wird hier genügen.

Die bewegende Kraft irgend einer Masse läfst sich offenbar durch das Gewicht messen, womit sie gegen ihre Unterlage

1 Dict. T. I. p. 535.

2 Ueber die Geschichte dieses Streites s. Boscovich in Comm. Soc. Bonon. Tom. II. P. III. p. 289., welcher die Annahme einer lebendigen Kraft überhaupt für unzulässig erklärt.

drückt und einen hierdurch beweglichen Körper in wirkliche Bewegung setzt. Nennt man also das absolute Gewicht eines Körpers = P, so ist die bewegende Kraft desselben x = P. Zugleich aber muſs die Intensität einer Kraft so viel gröſser seyn, je gröſser der Raum ist, durch welchen eine gegebene Last in der Einheit der Zeit durch sie bewegt wird, weil ebensowohl die Kraftanstrengung als andern Theils der Nutzeffect so viel gröſser ist. Wird also die durch das Gewicht ansgedrückte Masse eines Körpers = M, die Geschwindigkeit desselben = C genannt und übt er eine seiner Bewegung proportionale Kraft gegen irgend einen andern Körper aus, so ist das Maſs dieser letztern offenbar $k' = MC$. Hierbei ist aber wohl zu berücksichtigen, daſs man ein verschiedenes Maſs der Kraft erhält, wenn ein beweglicher Körper durch einen andern, mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegten, in steter Bewegung erhalten wird, als wenn letzterer gegen einen ruhenden stöſst und ihm die ganze Kraft seiner Bewegung mit einem Male mittheilt, auch wird jenes bekanntlich das mechanische, dieses das Trägheits-Moment der Bewegung genannt. Schon Aristoteles[1] hat angegeben, daſs man beide unterscheiden müsse, worin ihm Galilei[2], Borelli[3] u. A. folgten; jedoch wurde durch Verwechselung beider Bestimmungen im Allgemeinen angenommen, das Maſs der Kräfte sey unter jeder Bedingung gleich, und Cartesius setzte dasselbe daher ohne nähere Bestimmung dem Producte aus der Masse in die Geschwindigkeit proportional. Durch die Voraussetzung der Richtigkeit dieses Satzes befangen maſs Mersenne[4] den Effect der mit ungleichen Geschwindigkeiten bewegten Körper und fand ihn jenem Producte gleich, womit auch die Resultate der durch Gassendi[5], Riccioli[6], de Lanis[7] u. A. angestellten Versuche, jedoch nur unvollkommen, übereinstimmten. Es war zuerst Huygens[8], welcher gegen Catalan zeigte, daſs der Effect eines bewegten Körpers gegen

1 Mechan. Quaest. 20.
2 Dial. mechan. dial. 4.
3 De vi percussionis. L. B. 1786. 4. Prop. XC. p. 162.
4 Cogitata Physico-mathem. Par. 1644. 4. cap. VIII.
5 Epist. ad Gazreum. Nach Musschenbroek Inst. I. p. 83.
6 Almagest. Lib. IX. Sect. 10. p. 393.
7 Magist. Nat. et Art. Vol. I. Tract. 3. cap. 2. p. 160.
8 Horol. oscil. part. 4. in Opp. T. I. p. 248.

einen ruhenden dem Producte der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gleich seyn müsse, aber LEIBNITZ [1] führte seinen Beweis hierfür weiter aus. Fällt nämlich eine Masse = 1 Pfd. von einer Höhe = 4 F., so erhält sie dadurch eine Kraft, um wieder 4 F. zu steigen; eine andere Masse = 4 Pfd., welche von der Höhe = 1 F. herabfällt, wird dadurch vermocht werden, nur 1 F. zu steigen. Beide Kräfte sind gleich, weil 1 Pfd. auf 4 F. Höhe zu heben gleiche Kraft erfordert werde, als 4 Pfd. auf 1 F., und wollte man das Cartesische Maſs der Kräfte hierauf anwenden, so müſsten die Producte aus den Massen in die Geschwindigkeiten gleich seyn. Nach den Gesetzen des Falles schwerer Körper [2] ist aber die durch 4 F. Fall erlangte Geschwindigkeit doppelt so groſs als die durch 1 F. (da $v = 2\sqrt{gs}$); mithin geben die Massen mit den Geschwindigkeiten multiplicirt 1×2 und 1×4, also $2 = 4$, welches unmöglich ist. Man muſs daher das Maſs der Kraft $= mv^2$ setzen, wenn m die Masse und v die Geschwindigkeit bezeichnet.

Es ist auffallend, daſs man bei diesem lange und mit groſser Heftigkeit geführten Streite die Maſse der Räume in Fuſsen und die Massen der Körper in Pfunden ausgedrückt bloſs nach dem Werthe der Zahlengröſsen nahm, ohne zu berücksichtigen, daſs Pfunde und Fuſse ihrem Wesen nach keineswegs unmittelbar vergleichbare Gröſsen sind. Hiernach sind zwar die Producte der Zahlen $1 \times 4 = 4 \times 1$ allerdings vergleichbar, wenn aber einer von beiden Factoren eine benannte Zahl ist, so kann die andere nach den Regeln der Multiplication nicht geradezu als benannte Zahl angesehen werden, sondern gilt zur Erhaltung des Productes nur als unbenannte Zahl. Auſserdem aber zeigt selbst eine bloſs oberflächliche Betrachtung sofort, daſs hier bloſs von der beim freien Falle der Körper erlangten Endgeschwindigkeit die Rede ist, welche jedoch wohl unmöglich als einzige Regel bei der Bestimmung des Maſses der Kräfte gelten kann. Handelt es sich dagegen von einer gleichmäſsigen Bewegung, so ist hierbei bekanntlich die Geschwindigkeit dem Raume direct und der Zeit umgekehrt proportional [3], also $v = \frac{s}{t}$. Wären also

1 Acta Erud. 1686. Mart. p. 161.

2 Vergl. oben Bd. IV. S. 6.

3 Vergl. oben Bd. I. S. 947.

bei jenem aus der Bewegung mit beschleunigter Geschwindigkeit hergenommenen Beispiele die Zeiten gleich oder dürfte man diese bei der Bestimmung des Maßes der Kräfte vernachlässigen und die letzteren dem Producte aus den Massen in die durchlaufenen Räume ohne Rücksicht auf die dazu erforderliche Zeit gleich setzen, so wäre allerdings $1 \times 4 = 4 \times 1$. Wenn man dagegen bei der beschleunigten Geschwindigkeit auch die ungleiche Zeit als mitbestimmend ansehen wollte, welche bei dem Falle durch 4 Fuſs doppelt so groſs ist als bei dem durch einen Fuſs, so würde jenes oben angegebene Verhältniſs nicht $1 \times 2 = 1 \times 4$ bleiben, sondern $\frac{1 \times 2}{1} = \frac{1 \times 4}{2}$, und könnte hiernach nicht zur Widerlegung des Cartesischen Gesetzes dienen. Kästner[1] nennt daher den ganzen Streit hierüber eine bloſse Logomachie, weil beide Parteien offenbar von ganz verschiedenen Dingen reden.

Catalan und Papinus widersprachen Leibnitzen, welches dann mehrere Abhandlungen veranlaſste, indem letzterer namentlich den Unterschied zwischen den lebendigen und todten Kräften zur Unterstützung seiner Meinung aufstellte[2], worauf der Streit sehr allgemein wurde. Für die Leibnitzische Behauptung erklärten sich unter andern hauptsächlich Johann und Daniel Bernoulli[3], Hermann[4], Polenus[5], Wolf[6], s' Gravesande[7], Bülfinger[8], Camus[9] und Musschenbroek[10];

1 Anfangsgr. d. höhern Mech. Abschn. III. §. 202. 2. Ausg. S. 565. Vergl. Karsten Lehrbegr. T. IV. Abschn. XVII. §. 269. Sehr deutlich über diese verschiedene Bestimmung des Kräftemaſses ist Vega in Vorles. über d. Mathem. Bd. III. Wien 1818. §. 52. S. 49.

2 Leibnitz in Acta Erud. An. 1687, 1690, 1691, 1695.

3 Nouv. de la Rep. des Lett. 1786 u. 87. Comm. epist. inter Leibnitium et Bernoullium. T. I. Ep. 21. p. 108. ep. 24. p. 143. Hydrod. Sect. I.

4 Acta Petrop. T. I. p. 2. Phoron. p. 119.

5 De castellis aquarum. §. 119.

6 Acta Pet. I. p. 217. Mechan. Cap. VII. §. 325.

7 Hist. Liter. An. 1722. p. 1 u. 190. Phys. Elem. math. Lib. II. cap. 2 u. 3. Phil. Trans. 1733. XXXVIII. 143.

8 Comment. Pet. T. I.

9 Hist. de l'Acad. 1728. p. 159.

10 Introd. §. 270. T. I. p. 83.

gegen dieselbe aber eben so berühmte Männer, z. B. Pemberton[1], Desaguliers[2], Eames[3], Clarke[4], Mairan[5], Jurin[6], Mac' Laurin[7], Robins[8], Hausen[9] und mehrere Andere[10]. Der Streit hätte indirect einen grofsen Nutzen haben können, wenn dadurch das Verhältnifs des erzeugten Effectes zur Geschwindigkeit bewegter Körper genau ausgemittelt worden wäre; denn viele der genannten Gelehrten suchten ihre Behauptungen durch Versuche zu beweisen, indem sie Körper aus ungleichen Höhen herabfallen liefsen und aus der Wirkung ihres Aufschlagens die Kraft derselben zu finden sich bemüheten. Ihre Versuche waren aber zu unvollkommen, so dafs keine befriedigenden Resultate daraus hervorgehen konnten, noch viel weniger also solche, durch die eine Entscheidung der vorliegenden Streitfrage möglich gewesen wäre. Hauptsächlich ist dieses der Fall bei den ausführlichen Untersuchungen und Berechnungen von L. Euler[11] über die Tiefe, bis zu welcher Körper beim Zusammenstofsen eingedrückt werden, aus denen hervorging, dafs weder das Leibnitzische, noch das Cartesische Kräfte-Mafs das richtige sey.

6) Aeltere und neuere Mathematiker unterscheiden ferner eine *beschleunigende Kraft*, welche auch wohl eine *beständige* genannt wird. Auch hierbei liegt in gewissem Sinne eine Verwechselung der Ursache mit der Wirkung zum Grunde, denn jene Kraft ist keine andere als diejenige, welche die Körper fallen macht, also die Schwere, mithin auch die nämliche, vermöge welcher jene gegen ihre Unterlage drücken. Ist indefs die

1 Phil. Trans. 1722. XXXII. p. 57.

2 Ebend. 1723. XXXII. p. 269 u. 285.

3 Phil. Trans. 1726. XXXIV. p. 188.

4 Phil. Trans. 1728. XXXV. p. 381.

5 Hist. de l'Acad. 1728. p. 1.

6 Dissert. Phys. Math. Diss. IX. im Auszuge in Philos. Trans. XLI. p. 607. XLIII. p. 423. u. XLIV. p. 103.

7 Account of Sir Is. Newton's philos. discoveries. Book II. chap. 2.

8 Tracts. T. II. p. 135 u. 178.

9 Heinsius diss. de viribus motric. Praes. Hausen. Lips. 1733. 4.

10 Ueber die Geschichte des Streites s. Arnold Diss. duae de viribus vivis earumque mensura. Erl. 1754. 4.

11 Comm. Pet. V. 159. Mém. de Berlin. 1745. p. 21.

Unterlage stark genug, so bringt dieselbe nicht einmal Bewegung hervor, viel weniger eine beschleunigte, und dafs letztere beim Falle der Körper entsteht, ist blofs Folge der stetigen Einwirkung der Schwere auf die beweglichen Massen, wobei es aber fraglich ist, ob man hierdurch berechtigt sey, die Kraft selbst allgemein eine beschleunigende zu nennen, obgleich sie eine beschleunigte Bewegung, aufserdem aber Druck und auch Verzögerung der Bewegung bei aufwärts geworfenen Körpern erzeugt. Was NEWTON[1] beschleunigende Kraft nennt, ist offenbar nichts anderes als die Schwere, welche, als stetig wirkend und zu der schon erzeugten und vermöge der Trägheit fortdauernden stets eine neue Bewegung hinzufügend, nothwendig eine beschleunigte erzeugen mufs, ohne dafs deswegen die Kraft selbst eine beschleunigte genannt zu werden verdient. NEWTON sagt daher auch ausdrücklich, dafs diese Benennungen blofs der Kürze wegen gewählt seyen. Weil sich aber die Wirkungen wie die wirkenden Kräfte verhalten müssen, so folgt nothwendig, dafs eine stetig wirkende Kraft in einem Elemente der Zeit eine ihrer Stärke proportionale Zunahme der Bewegung erzeugen müsse. Heifst also die Geschwindigkeit $= v$, die Zeit $= t$, die einer Zeiteinheit (einer Secunde) zugehörige Bewegung (der Fallraum in 1 Sec.) $= g$, die bewegende Kraft $= f$, und ist die in einem verschwindenden Zeittheilchen $= dt$ hervorgebrachte Bewegung $= 2gdt$, so erhält man die Proportion $dv : 2gdt = f : 1$, woraus die Fundamentalgleichung folgt:

$$dv = 2gfdt.$$

DANIEL BERNOULLI[2] wandte hiergegen ein, die Natur der wirkenden Kräfte sey zu unbekannt, als dafs sich aus der Wirkung bestimmt auf die Ursache schliefsen lasse, indem dv auch eben so gut dem Quadrate oder einer andern Potenz von f proportional seyn könne. Hierdurch wurde L. EULER[3] veranlafst, einen ihm völlig befriedigend scheinenden Beweis hierfür aufzustellen,

1 Princ. Def. VII. et VIII. T. I. p. 4. ed. Tessanneck. „Vim acceleratricem ad locum corporis, tamquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora, quae in ipsis sunt.“ Vergl. Axiomata. Lex II. p. 14.

2 Comm. Pet. I. p. 127.

3 Mechanica, sive Motus Scientia cet. Petrop. 1736. II voll. 4. T. I. L. I. §. 146—152. Theoria mot. corp. solid.

welcher auf das Axiom hinauskommt, daſs die bekannte Wirkung allezeit das Maſs der wirkenden Ursache seyn müsse, wogegen sich geometrisch nicht wohl etwas einwenden läſst. Damit ist indeſs keineswegs ausgemacht, daſs man die Kraft an sich deswegen eine beschleunigende nennen müsse, weil die durch sie erzeugte Bewegung vermöge steter Einwirkung derselben eine beschleunigte wird, indem es offenbar nicht die Kraft ist, sondern die Bewegung, welcher dieser Beisatz zukommt. D'Alembert [1] will deswegen jenen zu erweisenden Satz vielmehr als eine Definition betrachten und die beschleunigende Kraft schlechtweg das Element der Geschwindigkeit nennen. Dieses stimmt mit einer Ansicht überein, welche kürzlich Schubert [2] scharfsinnig ausgeführt hat, nämlich daſs man in der Mechanik die Untersuchung der Kraft ganz entbehren und alles auf den Effect, also auf die Geschwindigkeit der erzeugten Bewegung zurückführen könne. Hiernach würde dann $\frac{d^2s}{dt^2} = f$ die Fundamentalgleichung seyn. Auf allen Fall gehört die Untersuchung der *beschleunigten Bewegung* in die Mechanik und mit ihr zugleich die Betrachtung der dieselbe erzeugenden Kraft, ohne daſs deswegen diese letztere eine beschleunigende genannt zu werden verdient, wie sich schon daraus ergiebt, daſs eben die nämliche zugleich auch *retardirende* oder *verzögernde* genannt wird.

7) Ungleich richtiger unterscheidet man die veränderlichen und unveränderlichen Kräfte. Wirklich ist die Schwere eines aus geringer Höhe gegen die Erde fallenden Körpers unveränderlich oder läſst sich wenigstens als solche betrachten, sie verändert sich aber für gröſsere Entfernungen und wird eben wie die Gravitation der Himmelskörper gegen einander den Quadraten der Entfernung proportional geringer. Werden die oben angenommenen Bezeichnungen beibehalten, so sind die Fundamentalgleichungen für den Raum = s, die Zeit = t, die Geschwindigkeit = v und die bewegende Kraft = f, wenn letztere als unveränderlich angenommen wird:

1 Traité de Dynamique. Art. 19.

2 Mém. de Petersbourgh. T. X. N. VII.

$$ds = \frac{vdv}{2gf} = vdt, \quad dv = \frac{2gfds}{v} = 2gfdt,$$

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{dv}{2gf}, \quad f = \frac{vdv}{2gds} = \frac{dv}{2gdt}.$$

Diese Formeln lassen sich, wenn f als beständig angenommen wird, leicht integriren und geben die Ausdrücke der Gesetze des freien Falles der Körper [1], indem die wirksame Kraft der Schwere = f in den verhältnifsmäfsig geringen Entfernungen von der Oberfläche der Erde als unveränderlich und = 1 angenommen wird, wonach also v = 2g t ist. In gröfseren Höhen = h ist aber nach dem Newtonschen Gesetze $f = \frac{r^2}{(r+h)^2}$ und man erhält also $v = 2g\frac{r^2}{(r+h)^2}t$, wenn r den Halbmesser der Erde bezeichnet. Aufserdem giebt es übrigens der veränderlichen Kräfte in der Mechanik sehr viele, welche einzeln aufzuzählen überflüssig seyn würde. Dahin gehört z. B. die Muskelkraft der Menschen und Thiere, welche bei anhaltender Anstrengung allmälig abnimmt, die Elasticität einer aufgewundenen und sich wieder abwickelnden Uhrfeder, die mit der Ausdehnung abnehmende Spannkraft der Gasarten und Dämpfe und viele andere.

8) Die wichtigste Untersuchung der Kräfte bezieht sich auf die Betrachtung derjenigen, welche bei den Maschinen wirksam sind und daher *bewegende Kräfte der Maschinen* (*Potentiae moventes*; puissances ou forces mouvantes; *moving forces*) genannt werden. Es giebt deren eine ungemein zahlreiche Menge, welche sich jedoch insgesammt auf folgende Classen zurückbringen lassen [2].

A. Thierische Muskelkraft.

Die *Muskeln* sind diejenigen fleischigen Substanzen, welche von sehr ungleichem Volumen einen bedeutend grofsen Theil des thierischen Körpers bilden und überall in demselben verbreitet angetroffen werden. Im Allgemeinen ist ihre Gestalt die

1 S. *Fall*. Th. IV. S. 1.

2 Allgemeine Untersuchungen über die Kräfte lebender und todter Körper von L. Euler findet man in Nov. Comm. Pet. III. 265.

längliche runde, sie sind meistens solid, einige aber, z. B. das Herz, sind hohl und nicht wenige ringförmig; sie bewegen sich gröfstentheils durch Willensthätigkeit, einige aber blofs automatisch, wie unter andern die Spanner der Gehörknöchelchen, das Herz, die das Athmen bewirkenden Brustmuskeln u. a. m. Bei den Menschen und den Thieren der vier höheren Classen sind sie zusammengesetzt aus dem Muskelgewebe (*tela carnea*), aus Verzweigungen von Blutgefäfsen, aus Nerven und dem jene verbindenden Zellgewebe, welches die aus Fasern und Fäden bestehenden kleineren und die aus diesen gebildeten gröfseren Bündel zusammenhält. Die Dicke und Derbheit der Muskeln ist so viel stärker, je reicher die genossenen Nahrungsmittel an Faserstoff und Kleber sind und je energischer die Verdauung wirkt, um diese zur Bildung der Muskeln dienenden Substanzen in das Blut zu bringen. Im Allgemeinen sind sie dicker und derber beim männlichen Geschlechte als beim weiblichen, wachsen durch Uebung und mäfsige Anstrengung, nehmen dagegen ab durch alle krankhaften Affectionen des Körpers. Sie werden ernährt durch die zahlreichen in ihnen vorhandenen Arterien, welche in den dickeren Muskeln stärker sind und sich durch die kleineren Bündel in zunehmend kleineren Verzweigungen überallhin verbreiten. Venen sind in ihnen gleichfalls zahlreich vorhanden, deren Durchmesser so viel gröfser sind, je weniger die Muskeln angestrengt werden und je reichlicher daher das zu ihrer Ernährung nicht verwandte Blut weggeführt wird. Die Saugadern in ihnen dienen dazu, die durch die Muskelaction entbildeten Materien in das Blutsystem zurückzuführen, zugleich aber bewirken sie das schnelle Schwinden derselben in krankhaften Zuständen.

Alle Muskeln haben Nerven, jedoch sind diese im Herzen und allen automatisch sich bewegenden ungleich kleiner als in solchen, deren Bewegung willkürlich ist, namentlich sind sie am gröfsten in den zur Bewegung der Gliedmafsen dienenden Muskeln und in der Regel der Gröfse von diesen proportional, treten meistens mit den Blutgefäfsen in sie ein und verzweigen sich neben diesen in die kleineren Bündel, indem sie sich vermuthlich in dem, diese letzteren verbindenden, Zellstoffe endigen und verlieren. Blofs beim Herzen verbreiten sie sich netzförmig über dasselbe.

Nicht minder haben alle Muskeln die Eigenschaft, sich in

Folge gewisser Reize zusammenzuziehen und beim Nachlassen desselben wieder auszudehnen, welches Vermögen seit Haller die Muskelreizbarkeit (*Irritabilitas*) genannt wird. Unter den verschiedenen Reizen können hier nur diejenigen in Betrachtung kommen, welche vom Willen abhängen, weil nur durch diese die Kraftäufserungen der Menschen und Thiere erfolgen, indem die Muskeln kürzer, dicker und härter werden, wellenförmige Erhabenheiten bilden, ihre Enden sich nähern und dadurch eine Bewegung der Gliedmafsen erzeugt wird. Schon Glisson[1], Schwammerdam[2] u. A. behaupteten nach ihren Versuchen, das Volumen der Muskeln nehme bei diesen Zusammenziehungen ab, und eben dieses ist auch später durch die von Erman[3], Gruithuisen[4] u. A. angestellten Versuche erwiesen worden.

Die Muskeln insgesammt ermüden durch anhaltende Anstrengung und werden unempfindlicher gegen Reize, selbst die automatisch wirkenden, wie z. B. das Herz und die den Athmungsprocefs bedingenden Brustmuskeln, weswegen der Pulsschlag des Abends minder kräftig ist und in Beziehung auf die Respiration das Gähnen eintritt. Dagegen werden die Muskeln durch anhaltende Ruhe empfindlicher gegen Reize, weswegen die Irritabilität bei denen erhöhet wird, welche eine sitzende Lebensart führen, namentlich beim weiblichen Geschlechte in den höheren Ständen, so dafs sie in eine Geneigtheit zu Krämpfen und Convulsionen übergeht. Zu lange anhaltende gänzliche Ruhe erzeugt dagegen sogar Lähmung, weswegen Menschen nach langem Liegen weder stehen noch gehen können. Auf gleiche Weise hindert zu starke und zu lange anhaltende Anstrengung, z. B. bei Märschen u. s. w., die Ernährung der Muskeln, vermindert ihr Volumen und macht sie weniger reizbar.

Haller und einige Physiologen nach ihm hielten die *Irritabilität* für eine von der *Sensibilität* ganz getrennte Kraft, weil sich bei Mollusken, Würmern und Strahlthieren Bewegung und dennoch keine Nerven fänden und letztere sogar dem Herzen der Menschen mangelten, Muskeln auch zuweilen ihre Reizbarkeit beibehielten, wenn keine Nerventhätigkeit mehr vorhan-

1 Opp. omn. 1691. T. III. p. 191.

2 Bibl. nat. p. 839.

3 G. XL. 1.

4 Beiträge u. s. w. München 1812. 8.

den sey, wie bei geschlachteten Thieren. Andere dagegen hielten die Sensibilität für das höchste Princip des thierischen Lebens und die Irritabilität für ganz von ihr abhängig, weil in der Regel beide gleichzeitig erhöhet und herabgestimmt würden und man auf die Muskeln eben so gut durch die Nerven, als unmittelbar einwirken und Zusammenziehungen derselben erzeugen könne Der hauptsächlichste Punct zur Entscheidung dieser viel bestrittenen Frage war wohl ohne Zweifel die Beseitigung des Argumentes, daſs es ganze Thierclassen und einzelne Muskeln ohne Nerven gebe. Seitdem aber dieser Satz durch die genauesten anatomischen Untersuchungen widerlegt worden ist, kann wohl nicht zweifelhaft seyn, daſs die Irritabilität von der Sensibilität abhängig und selbst die Ernährung der Muskeln durch die Nerven bedingt sey, obgleich man die Irritabilität oder Muskel-Reizbarkeit (*Muskelkraft*) mit der Sensibilität oder Nerven-Reizbarkeit (*Nervenkraft*) nicht eigentlich identisch nennen kann. In abgeschnittenen Muskeln bleibt die Nervensubstanz noch eine geraume Zeit für mechanische und hauptsächlich für elektrische Reize empfänglich, leitet sie und bewirkt dadurch Bewegung derselben, welche sonach gleichfalls vom Einflusse der Nerven abhängig ist. Der Einfluſs selbst getrennter Nervenzweige auf die Bewegungen der Muskeln ist hiernach also nicht zweifelhaft, und daſs die Thätigkeit der Muskeln warmblütiger Thiere, namentlich der Menschen, hauptsächlich von der Einwirkung des Gehirns und Rückenmarks abhängig sey, ist durch die zahlreichsten Versuche genügend dargethan worden [1].

Auf welche Weise endlich die Nerven auf die Muskeln einwirken und eine Bewegung derselben erzeugen, hierüber ist es schwer, irgend etwas Sicheres aufzustellen, da man selbst die Art und Weise nicht kennt, wie die Reize in denselben fortgepflanzt werden [2]. Eine Spannung der Nerven anzunehmen und die Fortpflanzung der Eindrücke in denselben aus Schwingungen zu erklären widerstreitet den bekanntesten Thatsachen.

1 Vergl. Köhler Praes. Nasse Diss. de vi musculorum absque cerebro et medulla spirali. Halae 1818.

2 Die verschiedenen älteren mit der Anatomie und Physiologie unvereinbaren Hypothesen über die Ursache der Muskelbewegungen übergehe ich mit Stillschweigen. Man findet sie ausführlich in Haller El. Phys. corp. hum. T. IV. Lib. XI.

Durch die Annahme eines Nerven-Fluidums ist die Aufgabe keineswegs gelöset, weil damit weder die eigenthümliche Beschaffenheit desselben, noch die Art seiner Wirksamkeit zugleich bestimmt ist, ohne welche eine bloſse Bezeichnung nicht als Erklärung dienen kann. A. v. HUMBOLDT [1] ist geneigt, die Wirksamkeit der Nerven auf eine Art von elektrischem Reize zurückzuführen, womit PREVOST, DUMAS u. A. übereinstimmen. Ausgemacht ist allerdings, daſs namentlich die Schnelligkeit der Fortpflanzung des Nervenreizes durch die Nerven mit der Geschwindigkeit der elektrischen Strömung eine auffallende Aehnlichkeit hat, und da die Elektricität selbst auſserdem einen Reiz der Nerven und dadurch Bewegung der Muskeln erzeugt, so liegt diese Hypothese allerdings sehr nahe bei der Sache. Allein es fragt sich dann, ob das in den Nerven thätige Agens eigentliche Elektricität oder nur ein dieser ähnliches Fluidum sey. Im letzteren Falle wäre eigentlich nichts erklärt, weil einer hypothetisch aufgestellten Aehnlichkeit mit der Elektricität ungeachtet das eigentliche Wesen jenes Agens unbekannt bliebe; die Entscheidung des Ersteren beruhet aber darauf, ob vermittelſt der gegenwärtig bekannten höchst feinen Elektrometer ein Vorhandenseyn von Elektricität bei der Nerventhätigkeit nachgewiesen werden kann. Hierüber sind jedoch bis jetzt nur wenige Versuche vorhanden und nach den von POUILLET [2] angestellten ist weder der Proceſs der Nerventhätigkeit, noch auch der des Blutumlaufes mit Entwickelung von Elektricität verbunden. Drähte nämlich, welche mit einem empfindlichen Multiplicator in Verbindung gesetzt und mit den Enden eines Nerven oder eines Nerven und einer Blutader in Verbindung gesetzt waren, zeigten nur dann geringe Spuren von Elektricität, wenn sie oxydirt wurden, so daſs diese also eine Folge der Oxydation und nicht des animalischen Processes seyn muſste. Anderweitige Versuche von VASALLI-EANDI [3] und BELLINGERI [4] über die durch den Lebensproceſs entwickelte oder ihn begleitende Elektricität sind zur Entscheidung dieser speciellen Frage ungenügend und es bleibt daher vor der Hand noch dunkel, was das in den Nerven thätige Agens seiner Natur nach sey.

1 Ann. Chim. et Phys. II. p. 137.

2 S. Journ. de Physiol. par Magendie. T. V. p. 1.

3 Journ. de Phys. T. V. p. 336.

4 Mem. della R. Accad. delle Sc. di Torino. T. XXIV. u. XXV.

Der Zutritt des Blutes ist für die Beweglichkeit der Muskeln unerläſslich, indem diese aufhört, wenn man die dahin führenden Arterien drückt oder unterbindet. Selbst ein nur mäſsiger Druck auf die Pulsadern bringt zuweilen eine momentane Unbeweglichkeit der Muskeln hervor, wie beim sogenannten Einschlafen der Glieder; jedoch scheint bei der Contraction der Muskeln weniger Blut durch die Arterien wegen Verminderung ihres Volumens einzuströmen, mehr dagegen durch die Venen abgeführt zu werden.

Die Geschwindigkeit, womit die Zusammenziehungen und Wiederausdehnungen, die Spannungen und Erschlaffungen der Muskeln wechseln, ist ganz unglaublich, wie sich namentlich bei manchen feineren Arbeiten und Künsten, z. B. der Fingerbewegung des Spielers, und noch ungleich auffallender bei dem Flügelschlage der Insecten und dem Laufen der vielfüſsigen Arten unter ihnen zeigt, indem es kaum möglich ist, die Zahl der hierbei in einer gegebenen Zeit wechselnden Contractionen und Expansionen der Muskeln zu bestimmen. Man nimmt an, daſs bei einem englischen Wettrenner, welcher in jeder Secunde 84 F. in 14 Sprüngen, jeden zu 6 F. gerechnet, zurücklegt, für jeden Sprung zum Aufheben, Fortführen, Niedersetzen und Anstemmen des Fuſses 4 bis 5 Contractionen gehören, wonach auf jede Secunde 56 bis 70 abwechselnde Zusammenziehungen und Relaxationen kommen. Wenn ein Mensch, nach Haller's Versuchen, in einer Minute eine Stelle aus der Aeneide herlieset, in welcher 1500 Buchstaben vorkommen, so erfordert dieses wenigstens eben so viele Zusammenziehungen und Relaxationen der Sprachorgane in der angegebenen Zeit. Es giebt aber einige Buchstaben, z. B. das r, welche allein 10 und mehrere Zusammenziehungen und Relaxationen erfordern, so daſs also die Zeitdauer einer einzigen weniger als eine Tertie betragen muſs. Ist es indeſs nach Messungen aus der Höhe des erzeugten Tones oder der erzeugten Geschwindigkeiten erwiesen, daſs eine gejagte Stubenfliege im schnellsten Fluge 4000 Flügelschläge in 1 Secunde macht[1], so wäre die Summe der hierzu erforderlichen Contractionen und Relaxationen = 8000 in der angegebenen Zeit und die Zeitdauer einer einzelnen hierbei ohne Widerrede von einer kaum vorstellbaren Kürze.

1 S. oben Th. IV. S. 1352.

Eben so erstaunenswürdig ist die Kraft, mit welcher diese Muskel-Contractionen geschehen. Schon die gewöhnlichen Bewegungen der Thiere und namentlich auch der Menschen, für welche genauere Messungen vorhanden sind, geben hiervon überzeugende Beweise. Die Muskeln der Schenkel z. B. halten den Körper aufrecht, dessen Gewicht zu 150 ℔. gesetzt werden kann, und da es Menschen giebt, welche noch 300 ℔. aufserdem tragen, so beträgt die drückende Last an sich schon 450 ℔. Um indefs unter den Beispielen ausgezeichneter Stärke nur einige anzuführen, habe ich selbst einen Mann gekannt, welcher unvorbereitet und auf zufällig gegebene Veranlassung 6 rhein. Cubikfufs (braunschweig. Himten) Weizen und oben darauf einen grofsen, starken Mann eine Treppe von etwa 8 Stufen hinauftrug. Diese blofse Last kann sicher auf 450 ℔. und das Gewicht des Trägers hinzugenommen im Ganzen auf 600 ℔. geschätzt werden, welche auf den Füfsen und Beinen jenes Mannes ruheten. Man hat indefs mehrere Beispiele einer noch ungleich gröfseren Kraftäufserung, welche durch die Extensores der Beine erzeugt wird, wie denn namentlich Desaguliers[1] erzählt, dafs ein Mann hierdurch einen Strick zerrissen habe, welcher 1800 ℔. trug, ja er selbst und noch einige andere hoben 1900 ℔. Gewicht vermittelst eines über die Hüften herabhängenden Riemens dadurch, dafs die etwas gekrümmten Beine in die gerade Richtung gebracht wurden. Ich selbst habe gesehen, dafs ein starker Mann 2000 ℔. aufhob, indem er sich in gebückter Stellung unter ein Bret stellte, worauf diese Last ruhete, den Schwerpunct derselben ohngefähr in die Gegend der Hüften brachte, die Arme über den Knieen stützte und dann die gekrümmten Beine gerade machte. Die hierbei anzuwendenden Muskeln vermögen unter allen am menschlichen Körper die gröfsten Lasten zu wältigen, und daher hebt ein Mensch auf die angegebene Weise bei weitem schwerere Gewichte, als auf den Schultern oder mit dem Oberleibe, wenn dabei zugleich das Rückgrat in gerade Richtung gezogen werden mufs. Eben daher hob Desaguliers mit beiden Armen, indem er seinen ganzen Körper gerade zog, nur mit Mühe 300 ℔. Die Muskeln des Gebisses wiegen beim Menschen kaum 2 ℔. und doch hat man Beispiele, dafs Pfirsichkerne zerbissen wurden, welche zum Zerdrücktwerden 200 bis

1 Cours de Physique. T. I. p. 279 u. 288.

300 ℔. Gewicht erforderten. Ich selbst kannte einen Mann, welcher am kleinen Finger der rechten Hand mit ausgestrecktem Arme einen Centner vom Stuhle auf den Tisch hob, und dieses ausgezeichnete Beispiel ist noch keineswegs das stärkste, schon nach dem zu urtheilen, was glaubhafte Erzählungen angeben; eben so sah ich, dafs der oben erwähnte Hercules, welcher die 2000 ℔. hob, mit seiner rechten Hand eine lothrechte, hinlänglich befestigte Eisenstange umfafste und mit ausgestrecktem Arme seinen ganzen Körper etwa 5 Secunden in horizontaler Lage freischwebend erhielt. Es wäre wünschenswerth, vermittelst genauer *Dynamometer* [1] sichere Bestimmungen der Muskelkraft aufzufinden.

Die ungeheure Kraft, welche die Natur den Muskeln gegeben hat, wird noch auffallender, wenn man berücksichtigt, dafs die Knochen als Hebel bewegt werden, wobei die zu wältigende Last sich am längeren Hebelarme befindet. Hierüber hat insbesondere Borelli [2] sehr gehaltreiche Untersuchungen angestellt, welchem alle übrigen Schriftsteller seitdem gefolgt sind und wovon ich hier nur Einiges mittheile. Ist nach Musschenbroek [3] Fig.
der ausgestreckte Arm AEH eines Menschen an den Fingern bei 207.
H mit einer Last von 20 ℔. = P beschwert und wird sein Ruhepunct in der Achsel bei C angenommen, so ist die Richtung des Muskels, welcher den Arm ausgestreckt hält (*deltoides*), = EDE und der Abstand der Kraft oder das Perpendikel aus C auf diese Richtung ist = CD, der Abstand der Last dagegen ist = CH. Musschenbroek setzt im Mittel CD : CH = 3 : 100 oder 1 : 33,33...., wonach das Moment der Last P = 20 × 33,33... = 666 wird und der Muskel also diese Kraft äufsern mufs, um nur 20 ℔. zu heben, so dafs also in dem oben angegebenen Beispiele für 100 ℔. Last eine Kraft von 3333 ℔. erforderlich war. Genauer betrachtet Borelli [4] den Arm als eine Zusammensezzung mehrerer Hebel und berechnet die Kräfte aller bei seiner Ausstreckung mitwirkenden Muskeln, selbst derer in den Fin-

1 S. diesen Art. Th. II. S. 715.

2 De motu animalium. Rom. 1680. 4. Die weiteren Ausgaben dieses classischen Werkes sind Lugd. Bat. 1685. Genève 1685. Bologna 1699. L. Bat. cum Jo. Bernoulli medit. de motu musculorum. 1710. Neapel 1734. Hagae Com. 1741.

3 Introd. T. I. §. 432.

4 A. a. O. prop. 45.

gern. Für den *deltoides* insbesondere setzt er das Verhältnifs der Längen CD : CH = 1 : 30, wonach also, die zu hebende Last P = 20 ℔. angenommen, eine Kraft von 600 ℔. angewandt werden müfste, und weil der Muskel durch Zusammenziehung wirkt, also nach beiden Seiten mit gleicher Kraft, so wäre deren Summe auf 1200 ℔. zu setzen. Hierzu kommt das Gewicht des Armes selbst, welches zu 7 ℔. angenommen und im Schwerpuncte vereinigt einen Zusatz von 15 × 7 = 105 ℔. und dieses doppelt gerechnet von 210 ℔., also im Ganzen 1410 ℔. giebt. Die Summe der gesammten Kraftanstrengung aller Muskeln findet Borelli bei einer Belastung von 20 ℔. = 4190 ℔. oder 209 mal gröfser als die zu hebende Last. Allein diese Gröfse mufs noch vermehrt werden, weil die Fibern des Muskels mit seinen flechsenartigen Enden schiefe Winkel von etwa 8 bis 10 Graden bilden.

Um die Kraft des *deltoides* genauer zu prüfen mufs nach dem Verfahren von Borelli[1], Sturm[2] und Segner[3] die Last in der Gegend des Ellbogens bei G angebracht werden. Setzt man hierbei CG = 3DE und den Winkel DEA = 10°, so wird die Kraft des Muskels = 3 × Cosec. 10° × P = 17 P (nach Borelli ist CD : CG = 1 : 14, wonach also 14 P gefunden wird). Weil dann der Muskel nach beiden Seiten wirkt, so ist die Kraft = 34 P anzunehmen, welche Gröfse aber noch mit der Secante des Neigungswinkels der Muskelfibern mit den Endflechsen multiplicirt werden mufs. Setzt man diesen Winkel = 30°, so ist Sec. 30° = 1,15 und die gesammte zusammenziehende Kraft des Muskels ist 34 × 1,15 × P. Ein gewöhnlicher starker Mensch kann am Ellbogen eine Last von 50 ℔., also mit Einschlufs des Gewichtes des Armes 55 ℔. tragen, wonach also die Contractionskraft des deltoides = 39 × 55 = 2145 ℔. (nach Borelli 1760) beträgt. Diese ungeheure Kraft der Muskeln war indefs nothwendig, wenn die erforderlichen Bewegungen ohne Verunstaltung des Körpers geschehen sollten, weil nach mechanischen Gesetzen dasjenige an dem durchlaufenen Raume einer bewegten Last gewonnen wird, was an Kraftaufwand zu-

1 A. a. O. prop. 82 u. 84.

2 Ephemerides Nat. Curios. Dec. II. Ann. III. p. 456. Ann. IV. App.

3 Nieuwetyt Gebrauch d. Weltbetrachtung. Aus d. Holl. Jena 1747. 4. S. 104.

gesetzt werden mufs, und manche nothwendige Bewegungen, z. B. beim Aufheben der Gegenstände vom Boden, beim Werfen, Fortschreiten, Laufen und bei zahllosen Handarbeiten konnten ohne dieses Mittel gar nicht erreicht werden. Sollte z. B. 1 ℔. mit ausgestrecktem Arme durch die geringe Kraft des Muskels von nur 0,25 ℔. 2 F. hoch gehoben werden, so mufste der längere, durch den Muskel bewegte, Hebelarm einen Raum von 8 F. durchlaufen, welches ohne einen höchst ungestalteten Körperbau unmöglich einzurichten gewesen wäre. Bei dem durch die Natur gewählten Verhältnisse der zu wältigenden Last zu der anzuwendenden Kraft bewirkt eine geringe, den Bau des Körpers nicht entstellende Verkürzung des Muskels eine Bewegung durch einen beträchtlichen Raum. So bewegt sich der Arm bei einer Verkürzung des *deltoides* um 2 Z. durch einen Halbkreis vom Radius = 3 F., und da diese Verkürzung in einer sehr geringen Zeit geschehen kann, so ist hierdurch die namentlich zum Werfen und sonst vielfach erforderliche Geschwindigkeit erreichbar.

Uebrigens giebt es im Thierreiche noch ungleich stärkere Muskelcontractionen, als bei den Menschen, welche indefs nicht so genau untersucht wurden, oder die Resultate solcher Untersuchungen blieben mir unbekannt. Hauptsächlich sind die Raubthiere mit einer aufserordentlichen Muskelkraft versehen; für das verhältnifsmäfsig stärkste Thier gilt aber wohl mit Recht der Floh, indem ein Individuum nach Versuchen, welche gelesen zu haben ich mich erinnere, 6 gleich grofse fortzuschleifen vermag, statt dafs ein Pferd oder sonstiges Thier kaum ein einziges auf diese Weise über den Boden hinziehen kann, auch springt ein Floh sicher durch einen Raum, welcher seine Länge 500-mal übertrifft, statt dafs andere Thiere meistens kaum ihre fünffache Länge zu überspringen vermögen. Vorzugsweise hat man indefs die Kräfte der Menschen und Thiere in der Beziehung untersucht, um auszumitteln, in wiefern dieselben als Mittel zur Bewegung von Lasten anwendbar sind.

a) Die Anwendung der menschlichen Muskelkraft ist unter allen die einfachste, weil sich der Mensch am leichtesten den verschiedenen Maschinen und der eigenthümlichen Art, sie zu bewegen, anfügt. Man benutzt dieselbe daher auf die mannigfachste Weise, z. B. zum Auf- und Abwärtsziehen, zum Forttragen und Fortschaffen ohne oder mit verschiedenen erleichternden Maschinen und Vorrichtungen, zum Drehen an Kurbeln

und auf sonstige so vielfache Weise, dafs die Aufzählung der einzelnen, meistens hinlänglich bekannten, Arten hier viel zu weit führen würde. Dabei kommt aber hauptsächlich der Nutzeffect, welcher durch die Anwendung der menschlichen Muskelkraft erhalten wird, oder die Last, welche ein Mensch in gegebener Zeit durch einen gleichfalls gegebenen Raum zu bewegen vermag, zunächst in Betrachtung. Um aber hierbei eine Vergleichung mit demjenigen zu erhalten, was durch andere mechanische Mittel geleistet wird, führt man alle Bestimmungen auf das mechanische Moment zurück, indem man die Lasten vergleicht, welche in einer gegebenen Zeit bis zu einer gleichfalls gegebenen Höhe gehoben werden, mit Rücksicht auf die Dauer dieser Anstrengung durch einen ganzen Tag oder länger. Hierbei kommt es also keineswegs darauf an, das Maximum der Last, welche ein vorzüglich starker Mensch zu heben, zu schieben oder sonst zu wältigen vermag, also nicht das Maximum der momentanen Kraftäufserung zu bestimmen, sondern denjenigen Kraftaufwand, welchen der Mensch ohne Nachtheil seiner Gesundheit Wochen und Monate anhaltend leisten kann. Diejenigen Bestimmungen, welche man hiernach für die Kraft der Menschen erhält, fallen etwas ungleich aus, je nachdem er mit oder ohne Hülfswerkzeuge und zugleich mit vortheilhafter oder unvortheilhafter Anwendung seiner Muskelkraft arbeitet.

Es giebt über die Kräfte der Menschen eine grofse Menge Bestimmungen, wovon aber die älteren fast insgesammt unbrauchbar sind, weil sie entweder blofs das Maximum der momentanen Anstrengung geben, oder die Versuche zu kurze Zeit angestellt wurden. Dahin gehören die übrigens schätzbaren Bestimmungen von Borelli[1], de la Hire[2], Parent[3], Amontons[4], D. Bernoulli[5] und Andern. Was Desaguliers[6] darüber mittheilt, bezieht sich gleichfalls meistens auf eine nur kurze Zeit dauernde Anstrengung und speciell solcher Träger, welche allerdings aufserordentliche Lasten zu tragen vermögen;

1 De motu anim. p. 77. Mém. de l'Acad. I. 70.

2 Mém. de l'Acad. 1699. Hist. p. 96. Mém. p. 153.

3 Ebend. 1702. Hist. p. 95. An. 1714. Hist. p. 93.

4 Mém. de l'Acad. 1703. Hist.

5 Prix de l'Acad. T. VIII. p. 4.

6 Cours de Phys. 4me Leç. Notes. T. I. p. 285. ed. Par. 1751. 4

jedoch gesteht er zu, dafs die Geschwindigkeit und Dauer der Bewegung zu berücksichtigen sey, ohne dafs die gesammte Summe der von den Trägern in einem Tage und dann mehrere Tage anhaltend fortgeschafften Lasten genau von ihm angegeben wird. Inzwischen enthalten DE LA HIRE, DESAGULIERS und andere ältere Schriftsteller schon einige sehr richtige Bestimmungen. Nach ihnen beträgt nämlich die Kraft des horizontalen Zuges bei einem Pferde 200 ℔. auf 8 Stunden des Tages mit einer Geschwindigkeit von 12000 F. in 1 Stunde. Wird die Last bis 240 ℔. vermehrt, so kann dasselbe nur 6 Stunden arbeiten. Bei Menschen ist dagegen im horizontalen Zuge die Kraftäufserung am geringsten, indem ein starker Mann an einem Schiffe ziehend nur 27 ℔. bewegt, wonach 7 Menschen 1 Pferd ersetzen würden. Dieses stimmt sehr genau mit den Messungen der absoluten Kraftäufserung beider überein, denn REGNIER[1] fand vermittelst seines Dynamometers die absolute Kraft eines Pferdes im horizontalen Zuge = 720, eines Mannes aber nur = 100 bis höchstens = 120 ℔. Beim Pferde dagegen findet die nachtheiligste Kraftanwendung statt, wenn es eine Last bergauf bewegen soll, indem ein Mensch leichter mit 100 ℔. Last eine Höhe hinaufsteigt, als ein Pferd mit 300 ℔., wonach 3 Menschen das Aequivalent eines Pferdes gäben. Eben daher wird man finden, dafs Fuhrleute allezeit die längeren und minder steilen Wege wählen, Fufsgänger dagegen die kürzeren, wenn gleich steileren, insbesondere dann, wenn die zurückzulegende Strecke des Weges nicht sehr grofs ist, indem sonst das Bergsteigen überhaupt zu grofse Ermüdung herbeiführt. Die stärkste Kraftäufserung des Menschen findet beim Rudern statt, indem er hierbei die meisten Muskeln und in der vortheilhaftesten Stellung anstrengt. Vorzüglich suchten die älteren Geometer die Kraft der Menschen namentlich beim Ziehen von Lasten aus der Neigung ihres Körpers und dem Gewichte desselben, für sich allein oder wenn derselbe noch mit einer Last beschwert war, zu bestimmen und auf eine allgemeine Formel zurückzubringen, was aber nicht leicht zu befriedigenden Resultaten führt.

Unter die gröfseren und bedeutendern Versuchsreihen gehört namentlich die durch SCHULZE[2] angestellte, wodurch er

1 G. II. 91.

2 Mém. de Berlin. An. 1783. Berl. 1785. p. 333.

die von L. Euler angegebene allgemeine Formel für die Kraftäufserung der Menschen und Thiere bestätigt gefunden hat. Hiernach ist nämlich $p = P\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$, wenn P die absolute, p die geleistete Kraft und eben so V die absolute und v die angewandte Geschwindigkeit, erstere wie sie ohne Belastung seyn würde, bezeichnen. Die absolute Kraft, welche ein Mensch fortzuschaffen vermag, beträgt nach Euler 60 ℔., nach Lambert[1] 75 ℔. Wenn also die absolute Geschwindigkeit oder diejenige, mit welcher sich der Mensch ohne Last bewegt (wobei $p = 0$ wird), zu 6 par. F. in 1 Sec. angenommen wird, so giebt die Formel für $v = 1$ (also 1 F. Geschwindigkeit in 1 Sec.) nach Euler $p = 41{,}66\ldots$, nach Lambert $p = 52{,}08$ ℔. Das Product pv giebt den Nutzeffect der menschlichen Kraftäufserung, welcher für $v = \frac{V}{3}$ am gröfsten ist. Eine andere Formel von Euler setzt $p = P\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)$, welche für den gröfsten Nutzeffect $v = \sqrt{\frac{V}{3}}$ erfordert, aber mit den Versuchen weniger genau übereinstimmt. Thom. Young[2] bemerkt indefs richtig, dafs jene Bestimmungen auf ganz willkürlichen Principien beruhen.

Es giebt aufser den bisher erwähnten noch viele schätzbare Untersuchungen über die Kraftäufserungen der Menschen, z. B. von Camus[3], Barthez[4], Eckhard[5], J. Baader[6] und Andern; allein diese bleiben insgesammt zurück gegen die auf viele Versuche gestützte gründliche Abhandlung von Coulomb[7], welche eben so wohl wissenschaftlich interessante, als praktisch anwendbare Resultate enthält. Werden die von ihm gebrauchten

1 Mém. de Berlin. Année 1776. p. 19.

2 Lectures. T. II. p. 165.

3 Traité des forces mouvantes. Par. 1722. 8.

4 Nouvelle mécanique des mouvemens de l'homme et des animaux. Carcassonne. An. VI. 4. Neue Mechanik u. s. w. übers. von Sprengel. Halle 1801. 8.

5 Repertory of Arts and Manuf. Vol. II. p. 361. Vol. XV. p. 319.

6 Köhler's Bergmänn. Journ. Jahrg. II. Bd. II. p. 754.

7 Mém. de l'Inst. Sc. Math. et Phys. T. II. p. 308.

Meter in par. Fuſs verwandelt (1 Met. = 3 F. 11,296 Lin. gerechnet) und die Kilogramme in Pfunde (1 Kilogr. = 2 ℔. angenommen), so ergiebt sich Folgendes.

Zuvörderst kann eine Vergleichung zwischen dem, was durch die eine oder die andere Kraft geleistet wird, nur dann statt finden, wenn man die Leistungen auf ein gemeinschaftliches Maſs reducirt, und dieses geschieht, indem man die gewältigten Lasten, die Geschwindigkeiten, womit sie bewegt werden, und die Zeitdauer, während welcher die Arbeit ohne übergroſse Ermüdung verrichtet werden kann, in Rechnung nimmt, wie zuerst Daniel Bernoulli gethan und hiernach die Kraft eines ausgewachsenen Mannes = 1728000 ℔. zu 1 F. Höhe gehoben angenommen hat. Hierunter ist das gesammte Gewicht zu verstehen, welches ein Mann in einem Tage zu der angegebenen Höhe zu heben vermögend seyn soll, und wenn man dann zur leichteren Uebersicht 8 Stunden Arbeit täglich annimmt und die angegebene Leistung auf 480 Minuten vertheilt, so erhält man 3600 ℔. in 1 Min. zu 1 F. bei 8stündiger täglicher Arbeit gehoben, welches mit späteren Angaben hinlänglich genau übereinstimmt.

Coulomb wünschte zu wissen, was für einen Krafteffect ein Mensch zu erzeugen vermöchte, wenn er bloſs sein eigenes Gewicht durch Hinaufsteigen auf eine Treppe höbe, und verlangte daher von den Trägern, sie sollten unbelastet eine Treppe so oft in einem Tage hinauf- und hinabsteigen, als dieses ohne zu groſse Ermüdung geschehen könne, welches sie aber als etwas Unnützes zu thun verweigerten. Aus der Besteigung des Pic von Teneriffa durch de Borda und seine Begleiter ergab sich aber, daſs nicht ausgezeichnet starke Personen ihr Gewicht, welches Coulomb = 70 Kilogramme annimmt, während 8 Stunden bis zur Höhe von 2923 Metern ohne groſse Ermüdung hoben, die zugleich zurückgelegte als eben angenommene Fläche nicht in Anschlag gebracht. Dieses beträgt

1) Für die lothrechte Erhebung eines unbelasteten Mannes, sein eigenes Gewicht als gehobene Last betrachtet, 205 Kilogramme zu 1 Kilometer Höhe während 8 Stunden des Tages gehoben, oder auf die allgemeine vergleichbare Normalgröſse reducirt giebt dieses einen Nutzeffect von 2629,5 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben.

2) Um die Kraftäufserung eines Mannes zu finden, welcher mit einer Last beschwert diese zu einer gewissen Höhe fördert, wählte Coulomb die Holzträger. Diese trugen 68 Kilogramme Holz auf einer 12 Meter hohen Treppe 66mal in einem Tage. Zu dieser gehobenen Last das eigene Gewicht mit 70 Kilogrammen gerechnet giebt 138 × 66 × 12 oder 109 Kilogramme zu 1000 Meter Höhe gehoben. Auch diese auf das allgemeine Mafs reducirt, wenn 8 Stunden Arbeit angenommen werden, beträgt 1400 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben. Es verhält sich demnach diese Gröfse zu der unter Nr. 1. gefundenen wie 100 : 188, jedoch wird dieses Verhältnifs von Coulomb noch für zu geringe gehalten, indem er lieber 1 : 2 annehmen möchte, im Widerspruche mit Dan. Bernoulli, Lambert und den meisten älteren Geometern, wonach die Kraftäufserung der Thiere und Menschen bei jeder Belastung gleich seyn soll, sobald nur die zu wältigende Last ihre Kräfte nicht übersteigt. Ein vorzüglich starker Arbeiter versicherte einst 129 Kilogramme zu 1000 Meter Höhe gehoben zu haben, wonach er jedoch wegen übergroſser Ermüdung die beiden folgenden Tage nicht arbeiten konnte. Letzteres giebt 1657 ℔. zu 1 F. in 1 Min. gehoben und das Verhältnifs beider Gröfsen wird nahe genau 14 : 16. Nimmt man blofs die geförderte Last ohne das eigene Gewicht des Menschen zur Bestimmung des durch ihn beim Hinauftragen von Lasten zu erhaltenden Nutzeffectes, so beträgt dieses nur 54 Kilogramme zu 1 Kilometer Höhe gehoben, oder, 8 Stunden Arbeit angenommen, 901 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben. Es ergiebt sich hieraus, dafs die Kräfte der Menschen für lothrechte Erhebung von Lasten durch Tragen einen nur geringen Nutzeffect geben, welcher übrigens bei Thieren, wie oben erwähnt wurde, noch geringer ist.

Hierbei zeigt sich dann ein interessantes Resultat. Wenn ein Mensch eine Last durch Tragen auf eine gegebene Höhe schafft, so ist der wirkliche Nutzeffect nur diese Last und nicht sein eigenes, zugleich bewegtes Gewicht. Wird die Last vermehrt, so nimmt der Nutzeffect ab, bis die erstere auf etwa 300 ℔. steigt, unter welcher der Mensch sich nicht bewegen kann, also gar keine Höhe erreicht, so dafs demnach der Nutzeffect = 0 ist. Zu eben diesem Resultate gelangt derselbe, wenn die Höhe ohne Last hinaufgestiegen wird, und es mufs also zwischen beiden ein Maximum des Nutzeffectes liegen. Die Be-

rechnung ergiebt, dafs eine Belastung mit 53 Kilogrammen den gröfsten Nutzeffect giebt, und da das Gewicht des Menschen zu gleicher Höhe gehoben 205 Kilogramme beträgt, so folgt aus $\frac{205}{53} = 4$, dafs ein Mensch fast viermal so viel Kraftaufwand äufsert und einen eben so vielmal gröfseren Nutzeffect leisten könnte, wenn er unbelastet zu der erforderlichen Höhe stiege und die Last durch Herablassen seines Gewichtes aufwärts zöge. Der Nutzeffect bei der gewöhnlichen Belastung mit 68 Kilogrammen zu dem mit 53 verhält sich wie 53,86 : 56, so dafs also derselbe beim Tragen von Lasten auf eine gegebene Höhe = 1455 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben beträgt. Dafs sich die Träger hiernach unvortheilhaft mit gröfseren Lasten beschweren, als welche den gröfsten Nutzeffect geben, obgleich beide nicht merklich von einander verschieden sind, leitet Coulomb von dem Bestreben ab, stark zu scheinen; indefs kommt wohl noch ohne Zweifel auch der Grund hinzu, dafs die Träger beim Aufnehmen der Lasten die mit der zunehmenden erstiegenen Höhe wachsende Ermüdung, welche die Geschwindigkeit der Bewegung vermindert und dadurch den Nutzeffect verringert, nicht gehörig schätzen.

3) Ein unbelasteter Mensch kann in der Ebene gehend füglich 50000 Meter oder 153920 F. oder 6,7 geogr. Meilen zurücklegen und bewegt also, wenn sein eigenes Gewicht, wie oben zu 70 Kilogrammen genommen, als die gehobene Last und der horizontale Raum als die Höhe betrachtet wird, auf welche diese Last gehoben ist, eine Last von 3500 Kilogrammen auf ein Kilometer Höhe. Nach der angenommenen Reduction auf Pfunde und Fufsmafs beträgt dieses die enorme Gröfse von 44894 ℔. auf 1 F. Höhe in 1 Min. gehoben, wenn gleichfalls 8 Stunden Arbeit gerechnet werden. Coulomb verglich diesen Krafteffect mit der Anstrengung der Meublenträger, welche 6mal in einem Tage eine Last von 58 Kilogrammen auf 2 Kilometer Entfernung tragen, ohne dafs sie diese Anstrengung mehrere Tage anhaltend auszuhalten vermögen. Beide Gewichte, ihr eigenes und das der transportirten Last, betragen also 128 Kilogramme auf 12 Kilometer Entfernung, wovon das Product 1536 Kilogramme auf 1 Kilometer Entfernung beträgt. Hierzu kommt dann der Rückweg mit 12 Kilometern, worauf sie etwa 0,25 ihrer Kraft verwenden, da die Gröfse eines unbelastet zurückgelegten

Weges = 50 Kilometer gefunden wurde. Hiernach beträgt die gesammte Kraftäufserung eines mit 58 Kilogrammen belasteten Mannes nahe genau 2048 Kilogramme zu 1 Kilometer gehoben oder nach der allgemeinen Art zu messen, gleichfalls 8 Stunden Arbeit gerechnet, 26269 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben. Beide Gröfsen verhalten sich wie 7 : 4. Aus den Angaben solcher Träger, welche gröfsere Lasten auf weitere Entfernungen transportiren, ergab sich, dafs 44 Kilogramme auf 19 Kilometer Entfernung getragen die gröfste zu wältigende Last ist, welches 2166 Kilogramme auf 1 Kilometer gehoben beträgt. Wenn man nun berücksichtigt, dafs die Träger weder die Lasten noch die Wege völlig genau schätzen, so glaubt Coulomb in runder Zahl 2000 Kilogramme auf 1 Kilometer transportirt als Kraftanfwand eines Mannes bei einer in horizontaler Ebene bewegten Last annehmen zu können. Dieses beträgt 25654 ℔. auf 1 F. Höhe in 1 Min. gehoben.

Auch hierbei geht durch die Beschwerung mit der Last ein Theil des Kraftaufwandes verloren und es mufs also zwischen der Belastung mit gar keiner Last, welche die gröfste Entfernung giebt, und mit einer so grofsen, dafs der Mensch sich nicht darunter bewegen kann, ein Maximum der Belastung zur Erzeugung des stärksten Nutzeffectes geben. Da bei keiner Belastung die Kraftäufserung = 3500 Kilogramme und mit 58 Kilogrammen Belastung = 2000 Kilogramme gefunden wurde, für beide gleiche Entfernungen gerechnet, so giebt jene Belastung einen Verlust von 1500 Kilogrammen. Wird dann der Verlust an Kraft der Belastung proportional gesetzt, die letztere = P, die erstere = x genannt, so erhält man die Proportion 1500 : x = 58 : P, woraus x = 25,86 P gefunden wird. Die Kraftäufserung eines Menschen unter einer Last = P ist also derjenigen gleich, welche er unbelastet beweiset, weniger dem Verluste durch die Belastung, oder sie ist = 3500 — 25,86 P. Wird diese Gröfse = 0 gesetzt d. h. wird die Last so grofs angenommen, dafs der Mensch gar keinen Nutzeffect durch ihre Fortschaffung erzeugt, so ist P = 135,4 Kilogramme oder = 271 ℔. dasjenige Gewicht, welches der Mensch auf keine bedeutende Entfernung zu tragen vermag oder wodurch seine Kraft ganz erschöpft wird. Wenn also der Mensch sein eigenes Gewicht = 70 Kilogramme = Q und dazu die Last P durch den Raum = l bewegt, so giebt dieses (P + Q) l = 3500 — 25,86 P

woraus die von ihm auf die Länge des Weges = 1 fortzuschaffende Last P oder $P\,l = \frac{3500 - 25{,}86\,P}{P + Q}$ und hieraus das Maximum von P = 0,72 Q = 50,4 Kilogramme gefunden wird. Hiernach ist also diese Gröfse oder 100 ℔. diejenige Belastung, unter welcher der Mensch auf horizontaler Ebene tragend den gröfsten Nutzeffect giebt. Bei diesem Tragen der Lasten gehen die Träger leer zurück. Nimmt man hierauf und auf ihr eigenes bewegtes Gewicht keine Rücksicht, so findet Coulomb aus den von ihm gebrauchten Formeln, dafs der reine Nutzeffect eines Menschen 692,4 Kilogramme Last auf 1 Kilometer Höhe gehoben beträgt. Dieses kommt nahe genau mit der anfangs angegebenen Gröfse überein, wonach die Lastträger 6mal eine Last von 58 Kilogrammen auf 2 Kilometer Entfernung zu tragen vermögen. Letzteres giebt also, die horizontale Entfernung der Höhe gleich gesetzt, den eigentlichen Nutzeffect eines in der Ebene tragenden Menschen = 696 Kilogramme auf 1 Kilometer Höhe gehoben oder 8930 ℔. auf 1 Fufs Höhe in 1 Minute, 8 Stunden tägliche Arbeit gerechnet.

Endlich ergiebt die Vergleichung der Höhe, welche Menschen unbelastet ersteigen, mit der Entfernung, bis zu welcher sie in der Ebene gehend gelangen, dafs beide Gröfsen für gleiche Ermüdung sich ungefähr wie 1 zu 17 verhalten. Man sieht hieraus, warum das Ersteigen steiler Berge so angreifend ist und insbesondere schwache Personen leicht eine beträchtliche Strecke in der Ebene gehen, bergige Strafsen aber vermeiden müssen.

4) Wenn Erde oder Steine auf einem Schubkarren transportirt werden, so ist der Arbeiter nicht mit der ganzen Last beschwert, sondern er hebt nur einen Theil derselben und überwindet die Reibung des Rades. Nach genauen Versuchen fördert in diesem Falle ein Mann 70 Kilogramme auf 14,61 Kilometer horizontaler Entfernung, welches, die Länge des Weges der Höhe gleichgesetzt, 1022,7 Kilogramme auf 1 Kilometer giebt. Nach der angenommenen Reduction beträgt dieses 13118 ℔. in 1 Min. auf 1 F. Höhe gehoben. Das Verhältnifs dieses Nutzeffectes zu dem vorigen ist also 13118 : 8930 oder nahe 147 : 100, wonach also ungefähr 2 Arbeiter eine gleiche Last in der horizontalen Ebene auf dem Schubkarren transportiren, als 3 Träger auf gleiche Entfernung durch Tragen zu fördern vermögen.

5) Um den Nutzeffect aufzufinden, welchen ein Mann beim Heben eines Rammklotzes leistet, hat Coulomb alle Bedingungen bei dieser Art Arbeit verglichen, woraus als Endresultat hervorgeht, dafs dabei 75,2 Kilogramme zu 1 Kilometer Höhe gehoben werden. Nach genauen Beobachtungen wird diese Arbeit in 3 Stunden vollendet, indem die Arbeiter oft ruhen und viele Zeit auf anderweitige Verrichtungen verwenden müssen. Der Vergleichung wegen mufs aber diese Gröfse gleichfalls auf 8 Stunden vertheilt werden und giebt dann nur 964,6 ℔. in 1 Min. auf einen Fufs Höhe gehoben. Die Ursache dieses geringen Nutzeffectes liegt offenbar darin, dafs hierbei die Kraftäufserung dem Baue des Menschen weniger angemessen ist, insbesondere aber in dem Umstande, dafs die zu hebende Last grofs und die auf ihre Hebung zu verwendende Zeit kurz ist. Um nämlich den Rammklotz recht hoch zu heben oder ihn vielmehr in die Höhe zu schnellen (weswegen derselbe auch höher geschnellt wird als die Tiefe des herabgezogenen Seiles beträgt), wendet der Arbeiter die gröfste Anstrengung an und ermüdet daher so viel schneller, vermindert aber dadurch den Nutzeffect auf gleiche Weise, als beim Tragen zu schwerer Lasten. Uebrigens mag immerhin diese Bestimmung durch Coulomb etwas geringe seyn, ungeachtet die durch Beobachtung gegebenen Gröfsen, worauf sie beruhet, keine eigentliche Einwendung leiden und die aufserordentliche Genauigkeit jenes Gelehrten genugsam bekannt ist. Es giebt übrigens auch andere keineswegs verwerfliche Bestimmungen, welche die Kraftäufserung beim Ziehen der Rammklötze gröfser angeben. Nach Perronet[1] z. B. hob ein Arbeiter an einem Rammklotze 26 ℔. auf 4,5 F. Höhe, und solcher Züge geschahen 30 in 1 Minute. Hiernach betrug also der Nutzeffect 30 × 4,5 × 26 ℔. = 3510 ℔. in 1 Min. 1 F. hoch gehoben, welches allerdings sehr viel wäre, wenn man annehmen dürfte, dafs ein Arbeiter diese Anstrengung 8 Stunden auszuhalten vermöchte; allein man kennt allgemein die langen Pausen, welche zwischen den Touren des Rammens gehalten werden, damit die nach einer langen Tour erschöpften Arbeiter sich erholen, und die zahlreichen Nebenarbeiten, welche zwischen das eigentliche Heben des Rammklotzes fallen. Wenn daher bei jener Bestimmung durch Perronet nur 3 Stunden

1 Description des Projets et de la Construction des Ponts etc.

eigentlicher Arbeit angenommen werden, so geht sie auf 1316 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben herab und kommt der obigen ziemlich nahe. Für das Heben des Wassers aus einem Brunnen vermittelst der Eimer findet Coulomb einen noch geringeren Nutzeffect, nämlich 71 Kilogramme auf 1 Kilometer Höhe gehoben, welches nach der angenommenen Weise reducirt 911 ℔. in 1 Min. auf 1 F. Höhe gehoben giebt. Bei dieser Art von Arbeit geschieht indefs die Anwendung der Muskelkraft auf eine noch weniger vortheilhafte Weise.

6) Bei Arbeitern, welche an einer Kurbel drehen, z. B. an einem Schwungrade bei Schleifsteinen u. s. w., berechnet man den Kraftaufwand in der Regel zu 25 ℔., allein Coulomb bestimmt denselben nur zu 7 Kilogrammen. Die Handhabe beschreibt meistens einen Kreis von 6,25 par. F., statt deren Coulomb 23 Decimeter oder fast 7 par. F. annimmt, und dann sollen 30 Umdrehungen in 1 Minute oder in jeder Secunde eine halbe vollendet werden. Coulomb meint, diese letztere Gröfse müsse auf 20 herabgesetzt werden, selbst wenn die Last nur 7 Kilometer betrage. Die Zeitdauer dieser Anstrengung beträgt dann nicht mehr als 6 Stunden täglich. Diese Bestimmungen geben nur einen geringen Nutzeffect und andere Schriftsteller setzen denselben meistens höher; allein ich glaube dennoch, dafs diese durch Coulomb gegebenen Bestimmungen für mittlere Stärke der Menschen eine richtige und daher sichere Norm abgeben, wie aus einer von mir zufällig angestellten genäherten Messung noch mehr hervorgeht. Bei einer Maschine nämlich, vermittelst welcher durch ein von zwei Menschen bewegtes Schwungrad Wasser aus der Tiefe gefördert wurde, erforderte die Handhabe einen Druck von etwa 30 ℔., um bewegt zu werden, ihr Abstand von der Axe der Welle betrug 13 par. Zolle und die Zahl der Umdrehungen war bei der Probe 25 in 1 Minute, jedoch glaube ich, dafs man sie im Ganzen auf 20 herabsetzen mufs. Allerdings arbeiteten die Arbeiter 12 Stunden des Tages, wurden aber alle Stunden von 2 andern abgelöset, weil die Maschine nie still stand, und so kommen also nur 6 Stunden täglich auf jeden Arbeiter. Hierbei sind Täuschungen sehr leicht möglich, denn es wurde mir selbst nicht übermäfsig schwer, das Schwungrad allein mit der erforderlichen Geschwindigkeit umzudrehen, allein in etwa 3 Minuten war die Ermüdung so grofs, dafs ich die Anstrengung nicht weiter fortsetzen konnte. Cou-

lomb erhält aus den von ihm angenommenen Gröfsen, nämlich 7 Kilogrammen, 23 Decimetern, 20 Umdrehungen und 6stündiger Arbeit täglich, einen Nutzeffect = 116 Kilogramme auf 1 Kilometer Höhe gehoben. Wird diese Gröfse auf 8 Stunden täglich vertheilt und auf die angenommenen Mafse reducirt, so giebt sie 1487 ℔. in 1 Min. auf 1 F. Höhe gehoben.

Christian[1] glaubt dagegen, dafs Coulomb gerade diese Gröfse viel zu geringe angenommen habe. Nach einer von ihm selbst gemachten Beobachtung bewegte 1 Arbeiter eine Kurbel, welche einen Kreis von 25,12 Decimetern beschrieb und 14 Kilogramme Kraft erforderte, 24mal in 1 Min. 7 Stunden des Tages. Diese Bestimmung ist allerdings schätzbar, da alle Gröfsen der Angabe nach genau gemessen worden sind und selbst die Zahl der Umdrehungen an einem Zähler abgelesen wurde. Sie übertrifft die durch Coulomb erhaltene um mehr als das Doppelte und giebt den Nutzeffect = 4547 ℔. zu 1 F. Höhe in 1 Min. bei 8stündiger Arbeit gehoben. Christian bemerkt, dafs der Mann sehr robust und an diese Art von Arbeit gewöhnt gewesen sey, allein 14 Kilogramme mit der angegebenen Geschwindigkeit unausgesetzt und ohne zu ruhen mindestens stundenlang zu bewegen scheint an sich schon viel, aber merkwürdig ist zugleich, dafs Coulomb, ein so genauer Beobachter, diese Gröfse gerade auf die Hälfte herabsetzt. Dürfte man also annehmen, dafs statt eines Arbeiters zwei die Kurbel bewegten, so käme die Bestimmung mit der durch Coulomb gefundenen ziemlich genau überein und gäbe als Nutzeffect 2273 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben. Jedoch liegt die Bestimmung so, wie sie Christian giebt, und noch obendrein für einen robusten, an diese Arbeit gewöhnten Mann, keineswegs aufser dem Gebiete der Möglichkeit. Mehr ist dieses der Fall bei einer Angabe von Lesage[2], wonach der Kurbelgriff eines Paternosterwerkes von den Arbeitern eine Stunde anhaltend mit 6,94 F. Geschwindigkeit in 1 Sec. und 26 ℔. Kraft umgedrehet wurde. Wäre mit dieser einen Stunde das ganze Tagewerk vollendet gewesen, so ergäbe sich ein nur geringer Nutzeffect; müfste aber vorausgesetzt werden, dafs jeder der Arbeiter 8 Stunden täglich gearbeitet habe (4 Stun-

1 Mécan. indust. Par. 1822. III voll. 4. T. I. p. 114.

2 Recueil de divers Mém. extraits de la Bibl. Roy. des Ponts et Chaussées etc. II voll. 4. T. I.

den Ruhezeit eingeschaltet), so erhielte man einen Nutzeffect $= 6{,}94 \times 26 \times 60 = 10826$ ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben, welches COULOMB's Angabe um das 7fache übertrifft. Ein solcher Nutzeffect vermittelst einer Kurbel ist aber kaum denkbar, und hauptsächlich ist die Bewegung durch einen so grofsen Kreis von fast 7 F. in 1 Sec. für die Dauer sehr unwahrscheinlich. Setzt man diese dagegen auf 20 Umdrehungen in 1 Min. herab, so findet man mit CHRISTIAN nahe übereinstimmend einen Nutzeffect von 3608 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben. Noch gröfser ist eine Angabe, welche BELIDOR [1] auf eigene Beobachtungen gründet. Hiernach soll nämlich eine Kurbel von 16 par. Zoll Länge mit 35,5 ℔. Kraft 55mal in einer Minute umgedrehet worden seyn, welches, den Halbmesser des beschriebenen Kreises zu 14 Z. angenommen, einen Nutzeffect von 14312 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben giebt, ein Resultat, welches BELIDOR selbst für zu grofs hält, und wirklich ist auch eine solche Kraftäufserung für die Dauer von 8 Stunden täglich ganz unmöglich. PERRONET [2] giebt dagegen bei einer Last von 16 ℔. (mit den 7 Kilogrammen nach COULOMB nahe übereinstimmend) die Geschwindigkeit der Kurbelbewegung = 47 Z. in 1 Sec. an. Hieraus ergiebt sich ein Nutzeffect von 3760 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben.

Vergleicht man alle diese verschiedenen, sämmtlich auf genaue Beobachtungen gestützten und dennoch um mehr als das Doppelte von einander abweichenden, Bestimmungen mit einander, so scheint für eine anhaltende, 6 bis 8 Stunden täglich zu leistende und mehrere Tage fortgesetzte Kurbelbewegung COULOMB's Angabe, welche etwa in runder Zahl auf 1500 vermehrt werden könnte, für gewöhnliche, nicht eben ausgezeichnet starke und geübte Arbeiter die richtigste zu seyn. Da aber die Paternosterwerke, Schleifmaschinen u. dgl. in der Regel nur wenige Stunden oder etwa einen Tag in Bewegung bleiben, so kann in diesem Falle der durch PERRONET gefundene Nutzeffect füglich erhalten werden, obgleich dabei nicht angegeben ist, wie viele Stunden die Arbeiter täglich gearbeitet haben. CHRISTIAN's Angabe, wobei eine fortdauernde Drehung angenommen wird, mufs wahrscheinlich auf die Hälfte herabgesetzt werden, ent-

1 Architect. Hydraul. T. I. §. 680.

2 A. a. O.

weder indem 2 Arbeiter an der Kurbel dreheten, oder sich alle Stunden ablöseten. Hiermit stimmt dann auch Buchanan's[1] Angabe überein, nach dessen Versuchen ein an der Kurbel arbeitender Mann, die Reibung mit inbegriffen, in 9 Secunden 12,684 Kilogramme auf 5,185 Meter Höhe hebt, welches einen Nutzeffect von 2700 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehoben giebt, wenn man 8 Stunden Arbeit täglich annimmt.

7) Endlich sucht Coulomb auch die Kraftanstrengung und den Nutzeffect aufzufinden, welche dem Graben mit dem Spaten zugehören. Nach seinen Beobachtungen kann man in genäherten Werthen annehmen, daſs ein mäſsig starker Mann mit dem Spaten grabend 100 Kilogramme zu 1 Kilometer Höhe hebt, welches reducirt 1282 ℔. zu 1 F. Höhe in 1 Min. gehoben beträgt. Diese Gröſse ist in Vergleichung mit andern Nutzeffecten geringe und dennoch findet Coulomb selbst sie groſs, weil der Arbeiter, von welchem sie entnommen wurde, stark und in diesem Geschäfte vorzüglich geübt war. Es ist indeſs leicht begreiflich, daſs das Graben mit dem Spaten keinen sehr groſsen Nutzeffect geben kann, weil die zu wältigende Last auf diese Weise sehr unbequem angegriffen wird.

Coulomb's hier mitgetheilte Bestimmungen sind sehr schätzbar und im Ganzen zur Beurtheilung der Sache genügend. Einige derselben wurden bereits mit den durch andere Gelehrte gefundenen Resultaten verglichen, und es wird erlaubt seyn, noch einige der bedeutenderen Angaben über die Kraft der Menschen hinzuzufügen, welche man hauptsächlich in den Werken über praktische Maschinenlehre, z. B. von Guenyveau[2], Borgnis[3], Christian[4] und andern findet. Nach Partington[5] hebt ein Arbeiter, welcher 10 Stunden täglich arbeitet, in 1 Minute 3750 ℔. zu 1 F. Höhe. Wird vorausgesetzt, daſs er die hierbei angenommene Anstrengung nur 8 Stunden anwenden könne, so kommt jene Gröſse auf 3000 ℔. herab, welches mit den von anderen für einen an der Kurbel zur Förderung des Wassers aus der Tiefe arbeitenden Mann gefundenen Werthen übereinstimmt.

1 Repertory of Arts XV. p. 319.

2 Essai sur la Science des Machines etc. p. 8.

3 Traité de Mécanique etc. p. 4. a. v. O.

4 Mécanique industrielle etc.

5 Steam Engine. p. VII.

Buchanan[1] findet den Nutzeffect bei einem Ruderer = 4278 ℔., übereinstimmend mit der oben bereits mitgetheilten Bemerkung, dafs bei dieser Arbeit die Anstrengung der Muskeln am vortheilhaftesten geschieht, mit Ausnahme des Tragens auf horizontaler Ebene; für einen Arbeiter an einer gewöhnlichen Pumpe = 1663 ℔. und für einen Arbeiter an einem Rammklotze hoch = 3673 ℔. Nach Guenyveau's Beobachtungen beträgt der mittlere Nutzeffect der Lastträger, welche die Waaren an den Canal von Givors tragen, mehr als Coulomb für die pariser Meublenträger fand, nämlich 9530 ℔., bei den Trägern in den Bergwerken 3848 ℔., beides auf die angenommene Weise, nämlich zu 1 F. Höhe in 1 Minute und 8stündige Arbeit täglich gerechnet. Zieht ein Mann an einem Seile über die Schultern, so beträgt der Nutzeffect nur 2565 ℔. Bei den Arbeitern, welche die Erze und Steine in den Bergwerken auf kleinen Schlitten über feuchten, thónigen Boden hinführen, beträgt der Nutzeffect 8042 ℔., wenn man die gesammte geförderte Last und nicht blofs die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft berechnet. In eben diesem Sinne leistet ein Mann beim Transporte der Lasten in den Bergwerken auf kleinen vierrädrigen Wagen in horizontaler Ebene, die Wagen auf Bretern gezogen, 12827 ℔., auf rauhen Wegen dagegen nur 7696 ℔. Ein eigenthümlicher, sehr grofser, durch Muskelanstrengung des Menschen erhaltener Nutzeffect, der gröfste, welcher überhaupt dadurch erhalten werden kann, ist bereits oben[2] erwähnt worden. Nach Robison hob nämlich ein alter Mann 580 ℔. Wasser 11 F. hoch in 1 Min. 10 Stunden des Tages, ein junger 766 ℔. zu der nämlichen Höhe. Werden diese Gröfsen auf die angenommene Weise für 8 Stunden berechnet, so beträgt jenes 7975 ℔., dieses sogar 10532 ℔. einer wirklich zu 1 F. Höhe in 1 Min. gehobenen und nicht blofs in der Ebene fortgetragenen oder durch ein Fuhrwerk fortgeschafften Last.

Sehr ausführlich über die Kraftäufserung der Menschen handelt endlich auch v. Langsdorf[3], welcher jedoch weniger die Resultate gemachter Erfahrungen mittheilt, als vielmehr die von

1 Repertory of Arts XV. p. 319.

2 S. Art. *Druckpumpe*. Th. II. S. 629.

3 Ausführl. System der Maschinen-Kunde u. s. w. Heidelb. 1826. 4. Th. I. S. 75.

Bouguer gegebene allgemeine Formel einer vielseitigen Anwendung zum Grunde legt. Es ist nämlich hiernach $p = P\left(1 - \frac{v}{V}\right)$, wenn p die bei einer Bewegung mit der Geschwindigkeit v angewandte Kraft bezeichnet, P die absolute Kraft, welche der Mensch oder das Thier anzuwenden vermag, und V deren absolute Geschwindigkeit. Für P wird dann 120 ℔. Cöln. angenommen und bei Fufsgängern die Geschwindigkeit = 5 F. rhein. in 1 Secunde. Weil aber die letztere so viel mehr abnehmen mufs, je gröfser die Belastung ist, so wird $p = 120\left(1 - \frac{v}{5}\right)$, und da auch die Elevation die Tragkraft vermindert, so wird endlich

$$p = 120\left(1 - \frac{v}{5} - 2\,\mathrm{Sin.}\,\alpha\right)$$

für den Erhöhungswinkel = α gesetzt. Die Zeitdauer der Anstrengung endlich soll 9 Stunden von den 12 Tagesstunden, also mit 3 Ruhestunden täglich, betragen. Sind gleich diese Bestimmungen nicht aus genauen Versuchen entnommen oder auf nothwendige Naturgesetze gegründet, so giebt doch die Anwendung der Formel Resultate, welche mit der Erfahrung sehr genau übereinstimmen. Die oben mitgetheilte Uebersicht zeigt jedoch, dafs die verschiedenen Arten der Anwendung der Muskelkraft sehr bedeutende Aenderungen des zu erhaltenden Nutzeffectes hervorbringen. Für die Kraft des Drückens und Ziehens ändert v. Langsdorf die gegebene Formel in sofern ab, als statt 120 gesetzt wird $(1 - 0{,}005\,\tau^2)\,80$, worin τ die Stundenzahl der täglichen Arbeiter bezeichnet, welche hier zu 8 Stunden als normal, statt der obigen 9 Stunden, angenommen wird. Auch die Kraftanwendungen beim Ziehen eines Rammklotzes oder bei der Bewegung eines Schwengels werden dort ausführlich untersucht. Im Ganzen stimme ich jedoch mit Thom. Young darin überein, dafs es bei einer so vielfach modificirten Aufgabe ungleich besser ist, sich an die Erfahrung unmittelbar zu halten, als eine allgemeine Formel aufzusuchen, welche doch nothwendig vielfach modificirt werden mufs, wenn sie mit den Versuchen übereinstimmende Resultate geben soll.

Endlich darf als allgemein bekannt angesehen werden, dafs der Nutzeffect der Arbeiter sowohl nach ihrer Stärke und Ausdauer, als auch nach der Uebung und Fertigkeit, welche sie

sich in den eigenthümlichen Arten von Arbeiten erworben haben, sehr verschieden ist. Aufserdem kommt aber die Temperatur sehr in Betrachtung, in welcher die Arbeiten verrichtet werden, denn Coulomb fand, dafs die nämlichen Personen auf Martinique unter 14° N. B., wo das Thermometer selten unter 20° R. herabging und sie beständig von Schweifse trieften, kaum halb so viel leisteten als in Frankreich. Nach Moreau de Jonnes[1] werden die Europäer auf den Antillen durch die Hitze so geschwächt, dafs sie in den Monaten Juli und August am Tage sich nur mit grofser Anstrengung zu bewegen vermögen.

Die bisher mitgetheilten Bestimmungen über mechanische Nutzeffecte, welche durch die menschliche Muskelkraft erhalten werden, beziehen sich auf arbeitsfähige und an Anstrengung gewöhnte Männer von mittlerer Stärke. Ueber das Verhältnifs des weiblichen Geschlechtes zum männlichen in dieser Beziehung sind mir zwar Bestimmungen vorgekommmen, aber keine eigentlich zuverlässigen und auf genügende Erfahrungen gegründeten; indefs glaube ich, dafs man das Verhältnifs hoch wie 2:3 oder niedrig wie 4:5 annehmen könne. In Beziehung auf die Menschen verschiedener Völkerschaften und Stämme correspondirt der mechanische Nutzeffect derselben höchst wahrscheinlich der absoluten Kraftanstrengung, deren dieselben fähig sind, indefs dürfte es bei einer ohnehin so complicirten Aufgabe grofse Schwierigkeiten haben, hierüber zu genauen Bestimmungen zu gelangen.

b) Ueber die Muskelkraft der Thiere sind ungleich weniger Erfahrungen vorhanden, als man erwarten sollte, selbst nicht über den Nutzeffect aus der Muskelkraft des Zug- und Lastviehes, obgleich diese Frage nicht blofs an sich interessant, sondern auch in ökonomischer Beziehung nützlich ist. Für letztern Zweck ist insbesondere das *Dynamometer*[2] zu empfehlen, indem vermittelst desselben der Landwirth nicht blofs die absolute Kraft des Zugviehes messen, sondern auch diejenige Kraftanstrengung auffinden könnte, welche zu den verschiedenen Ar-

1 Leroux Journ. de Med. T. XXXVII. Sept. 1816.

2 S. diesen Art. oben Bd. II. Sehr genaue, nach verbesserter Construction eingerichtete Dynamometer verfertigt der Mechanicus Schmidt in Heidelberg für 8 Ldore mit Emballage. Sie zeigen von 0,5 bis 1000 Kilogramme oder in einer sonst beliebigen Gewichtsbestimmung.

beiten, als z. B. zum Umpflügen der ungleichen Arten von Ackerland u. s. w. erforderlich ist, und welche Leistungen daher von gutem oder schlechterem Zugviehe zu erwarten sind. Am meisten hat man die Zugkraft des Pferdes zu finden sich bemühet und mit verwandten Leistungen des Menschen verglichen, wie bereits oben (unter a. im Anf.) erwähnt worden ist, jedoch ohne genaue und scharfe Bestimmungen zu erhalten. Schätzbar ist das durch Regnier vermittelst des Dynamometers erhaltene Resultat, wonach das Maximum der horizontalen Zugkraft eines Pferdes 720 ℔. beträgt, und ich glaube nicht, dafs man dasselbe höher annehmen könne, wenn gleich die Pferde, indem sie mit einem Sprunge gegen das Geschirr stofsen, eine vielleicht auf das Doppelte oder Dreifache steigende Kraft ausüben und Seile zerreifsen, welche 2000 ℔. und mehr zu tragen vermögen.

Unter den bekannt gewordenen Untersuchungen über diesen Gegenstand zeichnen sich vorzüglich die durch Brunacci[1] mitgetheilten vortheilhaft aus, wozu er die Thatsachen aus den Erfahrungen der Ingenieure beim Fuhr- und Bauwesen, der Fuhrleute und anderer erfahrnen Personen hernahm und die am besten mit einander übereinstimmenden zusammenstellte. Aus den meisten Angaben geht jedoch die eigentliche, mit der menschlichen genau vergleichbare Muskelanstrengung nicht hervor, indem blofs die in gegebener Zeit auf bekannte Entfernungen geförderten Lasten mitgetheilt sind, ohne das Gewicht des Fuhrwerkes und den Umstand zu berücksichtigen, dafs bei solchen Transportirungen blofs die Reibung überwunden wird, welche noch obendrein nach dem ungleichen Baue des Fuhrwerkes verschieden ist. Dessen ungeachtet sind diese schätzbaren Bestimmungen nicht blofs unter sich vergleichbar, sondern einige derselben gestatten auch eine Vergleichung der Leistungen des Zugviehes mit denen der Menschen. Im Allgemeinen geht daraus hervor, dafs die Dauer der Anstrengung in dem nämlichen Verhältnisse abnimmt, in welchem die Geschwindigkeit der Bewegung wächst, und dafs der Nutzeffect durch Verminderung der Geschwindigkeit vermehrt wird. Es zogen nämlich von 2 Pferden jedes eine Last von 849,4 Kilogrammen mit 11,3 Kilometer Geschwindigkeit in 1 Stunde nur 3 Stunden täglich, dagegen 1715,2 Kilo-

1 Brugnatelli Giorn. di Fis. 1817. T. X. p. 206. Daraus in G. LXI. 415.

gramme mit 3,57 Kilometer Geschwindigkeit 11 Stunden täglich, wovon die Producte das Verhältnifs = 28787 : 67355 geben. Aufserdem zog ein einzelnes Pferd mit einem zweirädrigen Karren mehr als jedes der zwei oder noch mehr als jedes der vier Pferde vor einem vierrädrigen Wagen. Ein Maulthier leistete fast eben so viel als ein Pferd, welches Resultat aus der schlechteren Beschaffenheit der Italienischen Pferde und der vorzüglichen der dortigen Maulthiere erklärlich ist; Stiere aber leisteten weniger als beide, hauptsächlich wegen der Langsamkeit ihrer Bewegung. Eine unmittelbare Vergleichung mit der menschlichen Kraftanstrengung gewähren die Angaben der Lasten, welche Pferde und Maulthiere auf verschiedene Entfernungen zu tragen vermochten, desgleichen der Strecken, welche beide unbelastet zurücklegten, wobei abermals das Maulthier ungleich mehr leistete. Nimmt man aus den verschiedenen Angaben die mittleren Werthe, so giebt dieses folgende Gröfsen.

1) Vor einem vierrädrigen Wagen zogen von 2 Pferden jedes mit Inbegriff des Wagens 568,5 Kilogramme mit einer Geschwindigkeit von 6,18 Kilometern 7,9 Stunden des Tages. Dieses zur leichtern Uebersicht auf bekanntere Mafse und eine solche Geschwindigkeit reducirt, womit in 2 Stunden eine deutsche Meile zurückgelegt wird, die Meile in runder Summe zu 23000 par. F. gerechnet (geograph. = 22840 par. F.), giebt 1137 ℔. auf 6,53 Meilen transportirt. Weil aber ausdrücklich bemerkt wird, dafs die Pferde bei dieser Arbeit nur 4 Tage arbeiten konnten, am 5ten aber ruhen mufsten, so können nur 5,23 Meilen täglich gerechnet werden. Nach der oben für die Leistungen der Menschen befolgten Norm und unter Voraussetzung achtstündiger Arbeit täglich, die Last des Wagens wegen der Vergleichung mit nachfolgenden Bestimmungen zu 400 ℔. angeschlagen und mit Rücksicht auf den Rasttag, giebt dieses einen Nutzeffect von 234710 ℔. in 1 Min. auf 1 F. Höhe gehoben.

2) Drei Pferde vor einem vierrädrigen Wagen zogen jedes 559,93 Kilogr. mit einer Geschwindigkeit von 4,46 Kilom. in 1 Stunde 11,3 Stunden lang, welches reducirt 1120 ℔. auf 6,74 Meilen und mit Rücksicht auf den Rasttag nahe 5,4 Meilen giebt. Der Nutzeffect hiervon beträgt 255176 ℔.

3) Wird für 4 Pferde diejenige Bestimmung weggelassen, wobei eine auffallend geringe Last mit grofser Geschwindigkeit transportirt wurde, so giebt das Mittel aus drei Bestimmungen

479,3 Kilogramme mit 4,46 Kilom. Geschwindigkeit in 1 Stunde, welches reducirt 958,6 ℔. auf 6,56 Meilen und mit Rücksicht auf den Rasttag 5,2 Meilen beträgt. Am brauchbarsten zur Vergleichung mit demjenigen, was in Deutschland bei Frachtfuhren durch Pferde geleistet wird, ist diejenige Angabe, welche die gröſste Last mit der geringsten Geschwindigkeit bewegt enthält, nämlich 588,6 Kilogramme mit 3,57 Kilom. Geschwindigkeit in 1 Stunde bei 10 Stunden Arbeit täglich. Dieses reducirt giebt 1177,2 ℔. auf 4,3 Meilen und mit Rücksicht auf den Ruhetag auf 3,4 Meilen. Nach obiger Weise berechnet giebt dieses einen Nutzeffect von 197310 ℔.

4) Mit einem zweirädrigen Karren zog ein einzelnes Pferd 1748,9 ℔. 5,2 Meilen weit; von zweien jedes 1679,4 ℔. 4,58 Meilen weit; von dreien 1505,5 ℔. 6,05 Meilen, und von vieren jedes 1552,8 ℔. 6,16 Meilen. Dieses giebt im Mittel einen Nutzeffect von ungefähr 319702 ℔.

5) Mit einem zweirädrigen Karren zog ein Maulthier 1749 ℔. 4,96 Meilen; von zweien jedes 1456 ℔. 5 Meilen; von dreien jedes 1701,5 ℔. 5,69 Meilen; von vieren jedes 1542 ℔. 5,57 Meilen, welches als Nutzeffect 305656 ℔. im Mittel giebt.

6) Ochsen zogen mit einem vierrädrigen Wagen, wenn zwei vorgespannt waren, jeder 1142,86 ℔. 2,89 Meilen; wenn vier vorgespannt waren, jeder 886 ℔. 3,77 Meilen weit. Der Nutzeffect hiervon beträgt im Mittel 160739 ℔.

Im Allgemeinen folgt aus diesen Angaben, daſs die drei Arten Lastthiere, wenn mehrere vereint angespannt sind, kleinere Lasten, aber mit gröſserer Geschwindigkeit bewegen, was ohne Zweifel in der wechselseitigen Ermunterung derselben gegründet ist. Merkwürdig, wahrscheinlich aber aus der Eigenthümlichkeit der zufällig hierfür gewählten Beobachtungen erklärlich, ist zugleich der Umstand, daſs die Leistungen der Pferde vor dem vierrädrigen Wagen auffalleud geringer sind, als vor zweirädrigen Karren. Wird der Nutzeffect dem Producte aus den Lasten in die Geschwindigkeiten proportional gesetzt, so verhält sich dieser beim Pferde, Maulthiere und Ochsen, letzter vor einem vierrädrigen Wagen, erstere vor einem zweirädrigen Karren, im Mittel wie 89199 : 85436 : 33781.

7) Auf einem hügeligen und bergigen, übrigens aber gut gehaltenen Wege zog ein Pferd 700 ℔. 3,12 Meilen; ein Ochse 748,5 ℔. 2,44 Meilen weit.

8) Eine genaue Vergleichung mit dem durch die menschliche Muskelkraft erzeugten Nutzeffecte geben die Beobachtungen über die Kraft im Tragen der Lasten bei Pferden und Maulthieren, wobei die letzteren die ersteren bei weitem übertreffen. Unbelastet legte ein Pferd auf ebenem Wege im Mittel täglich 8,5 Meilen zurück, ein Maulthier aber 9,76 Meilen; die mittlere Last bei ersterem beträgt 182,4 ℔. für 6,23 Meilen täglich, bei letzterem 261 ℔. für 6,15 Meilen; die gröſste getragene Last aber beträgt bei jenem 208 ℔. auf 4,23 Meilen, bei diesem 300 ℔. auf 4,73 Meilen. Wird nach dieser letzteren Gröſse der Nutzeffect beider auf die oben befolgte Weise berechnet, 8 Stunden tägliche Arbeit angenommen, die Entfernung aber als Höhe betrachtet, so hebt ein Pferd 42101,5 ℔., ein Maulthier aber 68054 ℔. täglich zu 1 F. Höhe in 1 Minute. Auf einer gut erhaltenen Bergstraſse trug ein Pferd 184 ℔. 3,34 Meilen täglich, ein Maulthier dagegen 274 ℔. auf eben jene Entfernung; mit 160 ℔. Last beschwert legte jenes 3,5 Meilen, dieses dagegen mit 168 ℔. Last 5,2 Meilen zurück, wovon jenes 28480 ℔., dieses 44866 ℔. zu 1 F. Höhe in 1 Min. gehoben beträgt.

Eine groſse Menge schätzbarer Beobachtungen über die Kraftanstrengung der Pferde hat Wesermann [1] mitgetheilt, worin aber nicht überall die Dauer der Arbeit während eines ganzen Tages oder die Länge des Weges, bis auf welche die Lasten transportirt wurden, angegeben sind. Nach ihm kann ein gutes Pferd auf horizontaler, guter Straſse ohne zu starke Ermüdung eine Zugkraft von 400 ℔. 3 Stunden fortgesetzt aushalten und trägt ohne Schwierigkeit 300 ℔., als gröſste Last 510 ℔. auf gleiche Entfernung, ohne auszuruhen. Auf ebener Straſse, und ohne beim Ansteigen derselben um 5 Grade in einzelnen Strekken des Vorspannes zu bedürfen, zieht ein Pferd füglich 1500 ℔., auf ganz ebener wohl 1800 ℔. und sogar 3000 ℔. Ein Dreispänner fuhr auf ebener Straſse eine Ladung, welche für jedes Pferd 2053 ℔. betrug, mit einer Geschwindigkeit von 11000 par. F. in 1 Stunde, und da die Frachtfahrer meistens 5 Meilen in einem Tage auf ebenen Wegen zurücklegen, so stimmt dieses mit Brunacci's Angaben recht gut überein. Aus den verschie-

1 Taschenbuch für Straſsen- und Wegbaubeamte. Düsseld. 1814. Von mir entlehnt aus v. Langsdorf ausf. System der Maschinenkunde. Th. I. S. 92.

denen Messungen bestimmt Wesermann die Kraftäufserung eines Pferdes zu 175 ℔. mit der angegebenen Geschwindigkeit. Wird dann zugleich angenommen, dafs diese Anstrengung 8 Stunden dauert, so darf man sagen, dafs ein Pferd im horizontalen Zuge 32085 ℔. in 1 Min. zu 1 F. Höhe hebt. Diese Gröfse stimmt sehr genau mit derjenigen Bestimmung überein, welche man seit langer Zeit mit geringen Abänderungen angenommen hat, indem blofs die hier durch 175 ℔. ausgedrückte mittlere Kraft etwas verschieden angenommen wird. Nach Amontons[1] beträgt diese beim Ziehen eines Pfluges nur 150 ℔., welche Bestimmung wegen des Gehens der Pferde auf unebenem und weichem Boden wohl richtig seyn mag. Die Angabe der 175 ℔. rührt schon von Sauveur aus dessen Versuchen her, wurde aber durch Desaguliers auf 180 erhöhet, und im Allgemeinen rechnet man auch 12000 F. Geschwindigkeit auf 1 Stunde, wo nach dann der Nutzeffect nach jener Bestimmung 35000, nach dieser dagegen 36000 ℔. wird. Die Engländer setzen die Geschwindigkeit meistens $=2,5$ engl. Meilen in 1 Stunde, die Zugkraft des Pferdes aber im Minimum $= 150$, im Maximum $= 200$ ℔. und die Dauer der Arbeit $= 8$ Stunden. Watt wollte den Nutzeffect der Pferde hoch angeben, damit seine Dampfmaschinen auch bei einem kleinen Ausfalle dasjenige wirklich leisten möchten, was von ihnen versprochen wurde, wenn man ihren Nutzeffect nach Pferdekräften bestimmte, und er setzte daher die Zugkraft eines Pferdes bei achtstündiger Arbeit täglich $=180$ ℔. in 1 Sec. zu 3 F. Höhe gehoben, welches $=180 \times 60 \times 3 = 32400$ ℔. in 1 Min. zu 1 Fufs Höhe gehoben oder in runder Zahl $= 33000$ ℔. giebt[2]. Smeaton nimmt statt dessen nur 22916 ℔. an, Heron de Villefosse[3] dagegen gleichfalls 175 ℔. in 1 Stunde zu 12000 Fufs gehoben, welches den Nutzeffect $= 35000$ ℔. giebt. Man darf daher allgemein sagen, dafs die Angaben der Pferdekräfte zwischen 24000 und 36000 liegen und dafs 33000 die gangbarste Bestimmung ist.

Ueber die Kraft der Maulthiere sind ungleich wenigere Beobachtungen vorhanden, als über die der Pferde, und die

1 Mém. de Paris 1703.

2 Robison Syst. of Mech. T. II. p. 145. Vergl. dieses Wörterb. Th. II. S. 476.

3 Richesse Minér. T. III. p. 66 u. 86.

oben mitgetheilten von BRUNACCI sind daher so viel schätzbarer, obgleich das Maulthier in der nördlichen Hälfte von Europa diejenige Stärke nicht erreicht, welche ihm in der südlichen eigen ist. Außerdem giebt CAZAUD[1] an, daſs die Maulthiere bei den Zuckermühlen in Westindien von 18 Stunden 2 mit einer Kraft = 150 ℔. und einer Geschwindigkeit von 3 F. in 1 Sec. arbeiten. Wird hierbei auf die Zeitdauer keine Rücksicht genommen, so giebt $150 \times 3 \times 60 = 27000$ ein Product, wonach der Nutzeffect dieser Thiere dem der Pferde ziemlich nahe kommt, und dieses ist nach den Untersuchungen von BRUNACCI sehr wahrscheinlich. Rechnet man dagegen nur 2 Stunden Tagearbeit, oder höchstens 3, so erreicht er noch nicht ganz die Hälfte von diesem. Endlich ist fraglich, in wie weit das heiſsere Klima auf Martinique eine gröſsere Ermüdung des Maulthieres bewirkt, so daſs die Angabe für weniger heiſse Gegenden gar nicht als Norm dienen kann, obgleich das Maulthier die heiſsen Klimate besser erträgt, als das Pferd.

Anstatt noch einzelne, hier und dort zerstreute Angaben aufzusuchen, scheint es mir zweckmäſsiger, die bereits mitgetheilten Nutzeffecte der Menschen und Lastthiere auf die angenommene Normalgröſse, nämlich die in 1 Min. zu 1 F. Höhe gehobene Last reducirt, wenn 8 Stunden tägliche Arbeit gerechnet werden, zur bequemern Uebersicht tabellarisch mitzutheilen. Dabei versteht sich von selbst, daſs nicht überall genau 8 Stunden lang gearbeitet wird, sondern bei einigen Arbeiten ist die verwandte Zeit länger, bei andern kürzer, und wenn man die aus der Natur der Arbeit folgenden Verzögerungen als zur Arbeit mit verwandt rechnen wollte, z. B. das Vorrichten der Werkzeuge und des Materials u. s. w., so ist bekanntlich die Zeit des Arbeitens länger dauernd als 8 Stunden des Tags. In solchen Fällen wird allerdings eine gröſsere Kraftanstrengung erfordert, ohne daſs ein eigentlich gröſserer Nutzeffect berechnet werden kann. Namentlich ist beim Lasttragen der Menschen der Rückgang ohne Last nicht mit berechnet, ungeachtet derselbe nicht als ein eigentliches Ausruhen betrachtet werden kann, vielmehr noch einen Theil von Kraftaufwand erfordert, ohne jedoch den geleisteten Nutzeffect zu vermehren. Hieraus entsteht demnach allerdings eine unvermeidliche Ungenauigkeit,

1 Phil. Trans. 1780. p. 318.

welche jedoch hinsichtlich der nicht scharf zu bestimmenden Dauer der Arbeit entweder überall nicht exsistirt, oder von gar keinem Einflusse ist. Es kann nämlich in Beziehung auf den Nutzeffect sowohl, als auch die durch die Arbeit erzeugte Ermüdung ganz gleichgültig seyn, wie lange Zeit darauf verwandt wird, wenn nur, wie in der Voraussetzung liegt, die Zeit der Ruhe hinreicht, um die verlorenen Kräfte wieder zu ersetzen, damit die nämliche Arbeit von dem nämlichen Individuum am folgenden Tage wieder geleistet werden könne. So dauert namentlich im Sommer sowohl bei den Menschen als auch beim Zugviehe die Zeit des Arbeitens regelmäfsig 14 Stunden mit 2 Stunden Ruhezeit, allein die übrig bleibenden 12 Stunden werden nie ganz unausgesetzt zur Arbeit verwandt, und wird nur das Erforderliche geleistet, so ist es gleichgültig, ob dieses in längerer oder kürzerer Zeit geschieht.

Es ist also der Nutzeffect:

a) Bei Menschen von mittlerer Stärke.

Beim Lasttragen auf eine Treppe . .	1400 ℔.	Coulomb.
— — — auf horizontaler Ebene	8930 -	derselbe.
Desgleichen	9530 -	Guenyveau.
Beim Lasttragen in den Bergwerken .	3848 -	ders.
— — — auf einer Tragbahre . .	3207 -	ders.
Beim Ziehen an einem über die Schulter gehenden Seile	2565 -	ders.
Mit einem Schubkarren	13118 -	Coulomb.
Auf kleinen Schlitten in Bergwerken .	8042 -	Guenyveau.
Auf vierrädrigen Wagen über Breter .	12827 -	ders.
Desgleichen auf rauhen Wegen . . .	7696 -	ders.
Letzteres beides in Bergwerken.		
Beim Heben eines Rammklotzes . . .	965 -	Coulomb.
Desgleichen	3673 -	Buchanan.
Desgl. wenn 8stünd. Arbeit möglich wäre	3510 -	Perronet.
Desgl. wenn 3 Stunden gearbeitet wird	1316 -	ders.
Beim Heben des Wassers mit Eimern	911 -	Coulomb.
Desgl. vermittelst einer Pumpe . . .	1663 -	Buchanan.
Desgleichen	3750 -	Partington.
Desgl. durch das Gewicht eines alten Mannes gehoben	7975 -	Robison.
Desgl. eines jungen Mannes	10532 -	ders.

Beim Drehen einer Kurbel	1487 ℔.	Coulomb.
Desgleichen	4547 -	Christian.
Desgleichen	3760 -	Perronet.
Desgleichen	3608 -	Lesage.
Desgleichen	2700 -	Buchanan.
Beim Graben mit einem Spaten . . .	1282 -	Coulomb.
Beim Rudern	4278 -	Buchanan.

b) Bei Pferden von mittlerer Stärke.

Vor einem vierrädrigen Wagen absolute geförderte Last	234710 ℔.	Brunacci.
Desgleichen	255176 -	ders.
langsame Bewegung	197310 -	ders.
Desgleichen	230000 -	Wesermann.
Vor einem zweirädrigen Karren desgl.	319702 -	Brunacci.
Desgl. auf hügeliger und bergiger Strafse	103922 -	ders.
Tragkraft der Lasten in der Ebene	42101 -	ders.
Desgleichen	55000 -	Wesermann.
Desgleichen auf hügeliger Strafse .	28480 -	Brunacci.
Eigentliche oder absolute Kraftäufserung	32085 -	Wesermann.
Desgleichen	32400 -	Watt.
Desgleichen	35000 -	Sauveur.
Desgleichen	36000 -	Desaguliers.
Desgleichen	35000 -	Heron de Villefosse.
Desgleichen	22916 -	Smeaton.
Gewöhnliche mittlere Angabe . . .	33000 -	
Vor einem Pfluge	30000 -	Amontons.

c) Bei Maulthieren von mittlerer Stärke.

Vor einem zweirädrigen Karren absolute geförderte Last	305656 ℔.	Brunacci.
Beim Lasttragen in der Ebene . . .	68054 -	ders.
Desgleichen auf hügeliger Strafse . .	44866 -	ders.
Eigentliche Zugkraft	27000 -	Cazaud.

d) Bei Ochsen von mittlerer Stärke.

Vor einem zweirädrigen Karren . . .	160739 ℔.	Brunacci.
Desgl. auf hügeliger und bergiger Strafse	86904 -	ders.

Aus den bisher mitgetheilten Untersuchungen ergiebt sich klar, daſs die meistens üblichen Vergleichungen, wonach die Kraftäuſserung eines Pferdes der von 5 oder 7 oder 12 oder 14 Menschen gleich seyn soll, ganz unzulässig sind, weil die verschiedenen Arbeiten sehr ungleiche Resultate geben. Inzwischen läſst sich dennoch füglich eine Vergleichung für die vorzüglichsten gleichartigen Kraftäuſserungen anstellen. Es ist demnach die Kraft bei der Förderung von Lasten durch Tragen in der Ebene

des Menschen	1	nach Coulomb,
des Pferdes	4,8	nach Brunacci,
desgleichen	6,1	nach Wesermann,
des Maulthiers	7,6	nach Brunacci.

Die Kraft bei der Förderung von Lasten auf Schubkarren oder Wagen ist

des Menschen auf Schubkarren . . .	1	nach Coulomb,
des Pferdes vor vierrädrigen Wagen .	17,5	nach Wesermann,
— — vor einem Karren	24,3	nach Brunacci,
des Maulthiers desgl.	23,3	nach dems.
des Ochsen desgl.	12,2	nach dems.

Nach Guenyveau ist der Nutzeffect des Menschen im Fördern der Lasten auf einem Wagen dem nach Coulomb auf einem Schubkarren statt findenden fast gleich, so daſs die angegebene Vergleichung für die Kraft beim horizontalen Zuge überhaupt gelten kann.

Die hier gegebenen Bestimmungen sind wohl ohne Widerrede genauer und der Wahrheit näher kommend, als die durch Hassenfratz[1] aufgestellten. Hiernach ist, die Kraft des Menschen beim Tragen von Lasten = 1 gesetzt:

die des Pferdes	= 8	des Dromedars	= 25
des Maulthieres	= 8	des Elephanten	= 147
des Esels	= 4	des Hundes	= 1
des Kameels	= 31	des Rennthiers	= 3.

Dagegen ist die Kraft des Ziehens im horizontalen Zuge, die des Menschen = 1 gesetzt:

die des Pferdes	= 7	des Ochsen	= 4 bis 7
des Maulthiers	= 7	des Hundes	= 0,6
des Esels	= 2	des Rennthiers	= 2.

1 Encyclop. méthod. Phys. T. III. p. 203.

B. Das Gewicht der Körper,

oder, wenn man will, dessen Ursache, die Schwere, ist eine der bedeutendsten Kräfte, deren man sich in der praktischen Maschinenlehre zur Erzeugung von Bewegungen bedient. Hierbei ist allgemein die bewegende Kraft dem absoluten Gewichte, also der Masse der Körper, oder der Summe der in ihnen vereinten schweren Körperelemente proportional. In vielen Fällen wird dieses durch unmittelbare Wägung des angewandten Körpers genau, in andern durch bloſse Schätzung als mittleres Gewicht bestimmt und in den üblichen Normalgewichten ausgedrückt, z. B. in Grammen und deren Theilen oder Vielfachen, in Pfunden u. s. w., deren relative Werthe sich im Art. *Maſs* finden. Eine genaue Bestimmung wählt man z. B. bei Uhrgewichten, eine genäherte bei der Angabe des Gewichtes der Menschen und Thiere, welche ein Laufrad, eine Tretscheibe u. s. w. in Bewegung setzen. In andern Fällen wird das absolute Gewicht des drückenden Körpers aus seinem Volumen und specifischen Gewichte gefunden, indem man seinen Kubik-Inhalt mit dem Gewichte eines normalen Kubus von Wasser und dem spec. Gewichte des Körpers zum Wasser multiplicirt. So wird z. B. das Gewicht, womit ein Gasometer[1] auf das unter ihm eingeschlossene Gas drückt und dadurch das Ausströmen desselben mit einer gewissen Geschwindigkeit bewirkt, aus dem kubischen Inhalte des Metalles in par. Fuſs und aus dem spec. Gewichte des Körpers gefunden. Die für solche Berechnungen erforderlichen Bestimmungen sind im Art. *Maſs* und im Art. *Spec. Gewicht* mitgetheilt.

C. Die Stoſskraft, oder eigentlicher der Stoſs, womit bewegte Körper ruhende oder bewegte treffen und diese in Bewegung setzen, wird sehr häufig in der Mechanik angewandt. Hierbei wirken dieselben nicht im Verhältniſs ihrer Masse allein, sondern ihre Kraft oder der hierdurch erzeugte und ihr zum Maſs dienende Effect ist eine Function von dieser und der Geschwindigkeit ihrer Bewegung. In vielen Fällen wirkt der Stoſs nicht allein, sondern zugleich auch das Gewicht. Hierher gehört das Wasser bei unterschlächtigen (und zum Theil auch bei oberschlächtigen) Mühlrädern, der Wind bei Windmühlen,

1 Vergl. Th. IV. S. 1090.

der Hammer, der Rammklotz, der Schlägel u. s. w. Sowohl über die Gesetze des Stofses, als auch über die hauptsächlichsten dazu gehörigen Maschinen wird in eigenen Artikeln gehandelt werden.

D. Auch die Centrifugal- oder Schwungkraft wird zu den bewegenden Kräften gezählt und kommt unter andern bei v. LANGSDORF's Saug - Schwungmaschine [1], dem Segnerschen Wasserrade, dem Schwengel bei Pumpbrunnen u. s. w. vor.

E. Die Elasticität ist eine der vorzüglichsten bewegenden Kräfte, wovon der vielfachste Gebrauch gemacht wird. Dahin gehört der Bügel der Armbrust, die Uhrfeder, die comprimirte Luft, der Wasserdampf und überhaupt die Dämpfe nebst den Gasarten. Ferner gehört dahin namentlich auch die Kraft des explodirenden Schiefspulvers, welches in der Ballistik das Hauptagens ausmacht, aufserdem aber wiederholt als Mittel zur Bewegung der Maschinen in Vorschlag gebracht worden ist. Unter andern geschah dieses schon früher durch DIONYSIUS PAPINUS [2], jüngsthin abermals durch ROMERSHAUSEN [3], indem ein ähnlicher Vorschlag, entzündetes Knallglas als explodirendes und nachher ein Vacuum erzeugendes Mittel zu benutzen, wie dieser von CECIL [4] gemacht wurde, mit ihm nahe zusammenfällt. Alle solche heftig explodirenden Substanzen sind jedoch, wegen der plötzlich auf die in Ruhe befindlichen Maschinen wirkenden Gewalt, blofs zum Fortschleudern der Körper geeignet, keinesweges aber zur ruhigen Bewegung von Maschinen, anderer damit verbundener Schwierigkeiten nicht zu gedenken. THOM. YOUNG sagt übrigens [5], dafs die Kraft des Schiefspulvers zwar ungeheuer grofs, der dadurch erzeugte Nutzeffect aber nicht gröfser ist, als welcher durch menschliche Arbeit erzeugt wird.

F. Endlich gehört auch die Wärme, sofern sie die Ausdehnung der Körper und durch ihre Abnahme die Zusammenziehung derselben bewirkt, unter die bewegenden Kräfte. Bisher hat man jedoch in der Mechanik in sofern noch keinen Gebrauch

1 S. oben Th. II. S. 82.

2 S. Art. *Dampfmaschine*. Th. II. S. 424 u. 437.

3 Schweigg. Journ. XXXII. S. 482.

4 Edinb. Phil. Journ. N. XII. p. 427.

5 Lectures. T. II. p. 167.

davon gemacht, dafs man diese Vermehrung und Verminderung des Volumens, namentlich der Metalle, als eigentliches bewegendes Agens benutzt hätte, obgleich Zusammenziehungen durch erkaltende Metalle oft bewirkt und als aufserordentlich starke mechanische Mittel benutzt werden. Namentlich bediente sich Molard der Zusammenziehung erhitzter eiserner Anker, um die gewichenen Mauern eines grofsen Magazines wieder gerade zu richten[1], bei der geringen Volumensvermehrung der Körper durch Hitze würde jedoch dieses Mittel schwerlich in der Mechanik mit Vortheil anzuwenden seyn, wenn die Erwärmung durch absichtlichen Aufwand von Brennmaterial geschehen müfste[2].

9) Nicht wenige und mitunter übrigens vortheilhaft bekannte Gelehrte haben verschiedene *unbekannte Kräfte* in der Natur und namentlich bei den Menschen angenommen. Dafs es dergleichen geben könne, aus deren Wirkung manche noch nicht enträthselte Erscheinungen des vegetabilischen und thierischen Lebensprocesses[3] erklärlich werden könnten, läfst sich im Allgemeinen und in Voraus nicht geradezu leugnen, aber ganz gewifs ist es dagegen, dafs bei der Annahme derselben die gröfste Vorsicht und ein dem Physiker sehr zu empfehlender Skepticismus nicht fehlen dürfen. Dieses gebieten übereinstimmend die bekannten Newtonschen Regeln und die zahlreichen Erfahrungen wirklicher Verirrungen des Verstandes aus dem natürlichen Hange der minder scharfsinnigen Menschen zum Glauben an das Wunderbare, worunter die Einwirkungen der Geister, der Gespenster, der Dämonen und die in manchen Zeiten allgemein geglaubten Zauberkünste gehören. Es ist nicht zu erwarten, dafs die wissenschaftliche Aufklärung vorerst oder überhaupt so tief wieder sinken sollte, um dergleichen Mährchen für wahr zu halten, aber sehr nahe an dieselben grenzen die bis auf die neuesten Zeiten behaupteten und vertheidigten verborgenen Kräfte nebst ihren vermeintlichen Wirkungen.

Es könnte immerhin gefragt werden, ob die Untersuchung von diesen überhaupt in das Gebiet der Naturlehre gehöre. Wird angenommen, dafs letzteres nur diejenigen Erscheinungen in sich

1 Biot Traité de Phys. T. I. p. 181.

2 Ann. Chim. et Phys. T. IX. p. 92 u. 196.

3 Vergl. *Lebenskraft.*

begreife, welche unter den nämlichen Bedingungen nach festen Gesetzen allezeit wieder zum Vorschein kommen, so würden die meisten der berichteten Phänomene dieser Art auszuschliessen seyn, weil sie sich in der Regel nicht allgemein und nach festen Gesetzen, sondern bei einzelnen Individuen als Abnormität zeigen sollen. Indem aber die Anhänger solcher seltenen und wundersamen Kräfte zugleich annehmen, dafs diese als wirkliche und in der Natur vorhandene Kräfte exsistiren, so gehören sie hiernach nicht blofs in das Gebiet der Physik, sondern müssen sich auch überall auf gleiche Weise wirksam zeigen, wo nicht hindernde Bedingungen ihre Wirksamkeit modificiren oder aufheben. Es kann übrigens sehr wohl der Fall seyn, dafs Wirkungen von Kräften lange Zeit verborgen bleiben, weil sie in einem hohen Grade fein sind, wie dieses z. B. bei dem thermomagnetischen Einflusse ungleich erwärmter Metalle auf die Magnetnadel geschehen ist; hat man sie aber einmal aufgefunden und ihre Bedingungen erkannt, dann müssen sie sich jederzeit und allgemein wieder erzeugen lassen. Einer ächten Naturforschung durchaus fremd, ja sogar ihr widerstreitend ist jedoch die Behauptung, dafs zur Erzeugung der Wirkungen verborgener Naturkräfte der Glaube des Beobachters erforderlich sey. Alle Kräfte der Natur sind nothwendig und ihre Aeufserungen bringen durch unausgesetzte Wiederkehr auch bei den befangensten Beobachtern Ueberzeugung hervor, ein vorgefafster Glaube aber hat schon oft Erscheinungen wahrnehmen lassen, welche überall nicht exsistirten, wovon der Aberglaube der finstern Jahrhunderte die sprechendsten Beweise liefert.

Es würde überflüssig seyn, alle verborgenen Kräfte und die sämmtlichen durch sie erzeugten mystischen Erscheinungen, welche bisher als exsistirend angenommen worden sind, nebst den verschiedenen Behauptungen für und wider und den vielfachen Erzählungen zu ihrer Beglaubigung hier aufzunehmen, da ohnehin die meisten nur eine kurze Zeit von leichtgläubigen Beobachtern als wirklich exsistirend geglaubt wurden, nach genauerer Prüfung aber bald wieder in ihr Nichts zurückfielen. Dagegen aber gehört in ein vollständiges physikalisches Werk allerdings eine kurze geschichtliche Angabe des Wesentlichsten, damit diese Kräfte nicht aus Unkunde übergangen scheinen und bei künftig unausbleiblich zu erwartenden ähnlichen Behauptungen dasjenige aufgefunden werden kann, was in frühern Zeiten bereits als

nichtig erkannt wurde. Wer nämlich mit der Geschichte der zahlreichen Verirrungen des menschlichen Verstandes vertraut ist, wird leider zu der Ueberzeugung gelangen, daſs der Hang zum Wunderglauben viel zu groſs und allgemein ist, als daſs auf diesem Boden nicht in wiederkehrenden Perioden stets neue Früchte des Aberglaubens wuchern sollten. Die Hauptclassen sind folgende:

a) *Sympathie* oder *Mitleidenschaft*. Es giebt deren zwei Arten, die moralische und die physische. Die erstere, welche man auch eine psychische nennen könnte und die nicht eigentlich hierher gehört, besteht darin, daſs zwei oder mehrere Personen in Folge gleicher Afficirungen des Gemüths gleiche Empfindungen haben, also gleichzeitig Schmerz, Freude, Zorn, Unwillen u. s. w. empfinden. In der Regel werden diese Gemüthsaffectionen in der einen Person durch vorhandene Ursachen erzeugt, und die von einer oder mehreren anderen wahrgenommenen Aeuſserungen derselben, so wie auch die bloſse Kenntniſs der wirkenden Ursachen, erzeugen dann in ihnen gleiche Empfindungen, indem sie durch lebhafte Vorstellung die Persönlichkeit des beobachteten Leidenden zu der ihrigen machen. Ist dann gleich die Affection des Gemüths bei den mitleidenden Personen in der Regel weniger stark, als bei den eigentlich zunächst und unmittelbar afficirten, so äuſsert doch auch bei den ersteren die rein psychische Ursache einen physiologischen Einfluſs, welcher aus der innigen Verbindung der Seele mit dem Körper sehr leicht erklärlich wird. Hierauf beruhet der wohlthätige Einfluſs froher Umgebungen und der nachtheilige trauriger, insbesondere auf reizbare, zur psychischen Sympathie geneigte Personen, wodurch diese letztere allerdings indirect zur physischen wird. Man hat indeſs auch behauptet, daſs durch Aehnlichkeit der Geister verwandte Personen ohne äuſsern Eindruck und in unbestimmter Entfernung von einander sympathetisch afficirt würden und diesemnach ohne eine bekannte Ursache gleichzeitig Freude oder Traurigkeit empfänden; ja man will viele Fälle beobachtet haben, in denen vermöge einer eigenthümlichen, zunächst physischen, Sympathie gleichzeitig die nämlichen Krankheiten bei verwandten, aber von einander weit entfernten Personen ausgebrochen seyn sollen, welches insgesammt gewissen unbekannten Kräften der Sympathie zugeschrieben wird.

Es ist allerdings richtig, daſs auffallende Fälle dieser Art

vorkommen. Zu ihrer Erklärung und Entfernung aus dem Gebiete des Wunderbaren mufs man aber Folgendes wohl überlegen. Gewisse Personen, namentlich verwandte, insbesondere Zwillingsgeschwister, können leicht einander psychisch und physisch sehr ähnlich seyn. Haben dann aufserdem die nämlichen äufsern Verhältnisse auf sie einen gleichen oder ähnlichen Einflufs, selbst wenn sie von einander entfernt leben, so ist es keineswegs unnatürlich, dafs beide gleichzeitig traurig oder heiter, vergnügt oder mifsvergnügt sind. Ist ohnehin die eine oder die andere von diesen Stimmungen bei beiden vorherrschend, so ist es in gewisser Hinsicht fast nothwendig, dafs eine gleiche Gemüths- und Denkungsart gleichzeitig ähnliche Handlungsweisen und deren Wirkungen hervorbringt, ohne dafs es im mindesten erforderlich ist, zu geheimen sympathetischen Kräften seine Zuflucht zu nehmen, um die Gleichzeitigkeit gewisser Begebenheiten und Schicksale zu erklären, welche solche verwandte Personen betreffen. Nimmt man das vielfache Spiel des Zufalls hinzu und übersieht man nicht, dafs namentlich verschiedene Krankheiten gewissen Lebensperioden der Regel nach zugehören und sich daher ohne auffallend deutliche äufsere Ursachen in gleichmäfsig organisirten Individuen sehr leicht gleichzeitig entwickeln können, so verschwindet das absichtlich gesuchte Wunder; Sympathien, mystische und verborgene Kräfte sind unnöthig und alles läfst sich aus bekannten Gesetzen recht gut erklären.

Viele Menschen glauben aufserdem noch fortdauernd an eine blofs physische oder physiologische Sympathie. Hiernach soll zwischen gewissen Körpern, Handlungen, Formeln u. s. w. und Personen eine Mitleidenschaft exsistiren, wodurch Wunden, Krankheiten u. dgl. geheilt und sonstige Uebel abgewandt werden können. Dahin gehören also hauptsächlich die sympathetischen Curen, wenn man die zum Theil dem religiösen Aberglauben angehörigen Wunderwirkungen geweihter Gegenstände, als diesen Untersuchungen fremd, ausschliefst. Wer bei hartnäckigen Uebeln alle ihm bekannten Mittel vergebens angewandt hat, dem wird man es leicht verzeihen, wenn er dann auch zu sympathetischen seine Zuflucht nimmt; sollten sie aber bei ruhiger Ueberlegung zulässig erscheinen, so müfste es nothwendig auch ähnliche Mittel geben, welche Krankheiten zu erzeugen oder vorhandene unheilbar zu machen vermöchten. Indem Letz-

teres aber nichts anderes, als das früher geglaubte Bezaubern oder Behexen ist, und dieses gegenwärtig nur noch unter den ungebildeten Individuen solcher Provinzen gläubige Anhänger findet, welche überhaupt auf einer geringen Stufe der Cultur stehen, so mufs auch jener ganz analoge Glaube durchaus als Aberglaube verworfen werden. Die physische Sympathie und die hierauf gegründeten Erzählungen sind daher ganz in das Gebiet der Mährchen zu verweisen und es lassen sich überall keine Kräfte mit Bestimmtheit darthun, welche hierbei als wirksam anzunehmen wären.

Dagegen läfst sich nicht ganz in Abrede stellen, dafs bei verschiedenen Personen eine nicht deutlich nachzuweisende Sympathie und auch Antipathie gegen andere Personen und auch gegen Thiere angetroffen werden, welche sich durch grofse Zuneigung oder grofsen Widerwillen äufsern. In Beziehung auf Thiere entsteht beides oft aus einem undeutlichen Vorurtheile ihres Nutzens oder Schadens, welches nicht selten aus den lebhaften Jugendeindrücken herstammt und bei den Zoologen nicht angetroffen wird, weil diese genauer mit den Eigenschaften der Thiere bekannt sind. In nicht seltenen Fällen kann auch die Ausdünstung anderer lebender Wesen, wenn auch durch den Geruch nicht kenntlich nachweisbar, doch etwas Widerliches und die Nerven unangenehm Afficirendes haben oder im Gegentheil angenehm seyn. In Beziehung auf Menschen liegt aber der Zuneigung oder dem Widerwillen unstreitig viel Psychisches zum Grunde, indem sie durch den Eindruck, welchen sie machen, die gegründete oder ungegründete Vorstellung der Klugheit und Gutartigkeit oder eines bösen Willens, der Schadenfreude und der Immoralität erzeugen. Auf allen Fall ist nicht erforderlich, bei diesem allen zu geheimen Kräften seine Zuflucht zn nehmen.

b) *Geheime elektrische und diesen ähnliche Kräfte.* Obgleich die Elektricitätslehre sehr einfach und bestimmt aufgefafst werden kann und das Verhalten dieser Potenz scharf bestimmten Gesetzen unterworfen ist, so haben doch allezeit einzelne Naturforscher mystische Wirkungen und verborgene Kräfte derselben zu finden geglaubt und unter andern liefs sich sogar der eben so besonnene als gelehrte Physiker Winkler in diese Irrthümer verstricken. Es wurde nämlich den in verschlossenen Glasröhren oder Kugeln befindlichen Arzneien nach der Elektri-

sirung dieser Hüllen ein aufserordentlicher Einflufs auf den menschlichen Körper und eine Heilkraft der verschiedensten Krankheiten beigelegt, wenn man sie blofs berührte oder die Glieder damit bestrich. Joh. Fr. Pivati[1] machte dieses nebst den Beobachtungen der wunderbaren Phänomene bekannt, welche in Italien vielen Beifall und allgemeinen Glauben fanden; Nollet dagegen, welcher exprefs deswegen dorthin reisete, konnte sich von der Wahrheit der mitgetheilten auffallenden Erzählungen nicht überzeugen. Desto gläubiger war Winkler, welcher die Versuche nicht blofs wiederholte, sondern auch die Resultate fremder und eigener Erfahrungen in England bekannt machte und dadurch Baker veranlafste, dafs die Sache dort näher geprüft wurde[2]. Hierdurch erschien aber das Ganze nach den genauen Versuchen, welche Watson in Gegenwart von Folkes, Mann, Mortimer, Daval und Canton mit Röhren anstellte, die er theils selbst elektrisirte, theils von Winkler durch dessen Freund Schröder erhalten hatte, als ein Mährchen[3], wovon jener sich dann bald selbst überzeugte und seinen unbegreiflichen Irrthum eingestand; ein warnendes Beispiel gegen Leichtgläubigkeit.

Nicht ganz gleiches Aufsehen erregten die bekannten Versuche Schäffer's mit dem Elektrophore, welche indefs schon oben[4] erwähnt worden sind, und es bedarf hier nur der Bemerkung, dafs nach dem Zeugnisse des eben so gründlichen als vorurtheilsfreien Plac. Heinrich die Nichtigkeit der ganzen Sache und die Ursache der Täuschung unlängst durch Steiglehner genügend nachgewiesen worden ist[5], so dafs also auch hierbei von keinen verborgenen elektrischen Kräften die Rede seyn kann.

Am bekanntesten unter allen durch verborgene und mystische Kräfte angeblich erzeugten Erscheinungen sind diejenigen geworden, welche zur Classe der *Wünschelruthe,* des Wasser- und Mineralien-Fühlens und überhaupt der sogenannten *orga-*

1 Della Elettricità medica. Lettera del chiarissimo Signore J. F. Pivati al celebre Signore F. M. Zanotti. Lucq. 1747. 8. Riflessioni fisiche sopra la Medicina elettrica. A Venezia. 1749. fol.

2 Phil. Trans. abr. X. p. 406.

3 Phil. Trans. 1748. XLV. p. 262. 1751. p. 231.

4 Bd. III. S. 771.

5 G. XXVII. 328.

nischen oder *mineralischen Elektricität* gehören. Die Mährchen von den Kräften der Wünschelruthe, einer in zwei Spitzen oder Zweige auslaufenden, zu einer bestimmten Zeit und unter gewissen Zauberformeln oder auch ohne diese geschnittenen Haselruthe, welche, über verborgenen Metallen in der Hand gehalten, durch den mikrokosmischen Einflufs des Haltenden gewisse eigenthümliche Bewegungen machen soll, sind alt und wurden unlängst von den Gebildetern als nichtig erkannt. An diese reihen sich die verschiedenen Schwingungen kleiner, an einem Faden herabhängender Körper, namentlich eines goldenen Fingerringes, welcher in einem Glase gehalten durch die Zahl seines Anschlagens an die Wände desselben die Tageszeit angeben sollte, und endlich die Behauptungen von der Fähigkeit gewisser Personen, die Anwesenheit von Wasser, Metallen und Mineralien durch ein eigenthümliches Gefühl wahrzunehmen. Am auffallendsten wird es dem vorurtheilsfreien Forscher erscheinen, dafs gerade alle drei Thatsachen, nachdem sie schon einmal als Betrügereien öffentlich bekannt geworden waren, zum zweitenmale hervorgerufen werden und sehr allgemeinen Beifall erhalten konnten [1].

Die *Wünschelruthe* ist seit sehr langer Zeit bekannt [2] und wird durch die Habsucht der Einfältigen, den übermäfsigen Hang zum Glauben an das Wunderbare und die feinen Künste schlauer Betrüger unter der ungebildeten Classe der Menschen

1 Ueber den Beifall, welchen diese Gegenstände in neuerer Zeit erhalten haben, ist schon oben Th. III. S. 776. geredet worden und ich theile daher vorzugsweise nur das Geschichtliche mit.

2 Die älteste Nachricht von ihr findet sich beim Paracelsus, welcher von ihr als von einer bekannten Sache redet. Später wird sie erwähnt durch Kircher in Ars magnetica. Col. 1643. p. 635., Casp. Schott in Physica curiosa. Herbip. 1667. p. 1286., Anleitung zu denen curiösen Wissenschaften. Frankf. 1717. S. 480., Vallemont in La Physique occulté, ou traité de la baguette divinatoire. Par. 1696. u. A. Sehr vollständig findet man die Literatur in: Beiträge zur literärischen Geschichte der Wünschelruthe von Chr. Freiherrn v. Aretin. München 1807. Ausgezogen in G. XVII. 158 u. 482. Ganz kürzlich hat dieselbe noch im Grafen J. de Tristan einen gläubigen Anhänger gefunden, indem sie selbst mit allen ihren zauberischen Wirkungen durch diesen in einem ausführlichen Werke beschrieben worden ist: Recherches sur quelques Effluves terrestres. Par le Comte J. de Tristan. Par. 1826. 430 S. 8. Mit einer Kupfertafel.

noch lange Zeit Anhänger finden, welche meistens ihre Leichtgläubigkeit theuer bezahlen müssen. Zugleich aber sind hauptsächlich zwei Fälle bekannt, in denen der Glaube an ihre Wirkungen, verbunden mit dem an die geheimnifsvollen Schwingungen kurzer Pendel und die eigenthümliche Kraft des Metall- und Wasserfühlens bei gewissen Individuen, unter allen Ständen Verehrer und Bewunderer fand, und wobei zugleich die höheren Classen, insbesondere aber die Gelehrten, grofsentheils sich weit leichtgläubiger bewiesen, als die niederen Volksclassen jemals gethan haben, unter denen in der Regel nur einzelne Individuen, und diese nur insgeheim, so lange ihr Interesse sie trieb und niemand sie auf die Möglichkeit des Betrugs aufmerksam machte, auf die Kraft der Wünschelruthe Vertrauen setzten; am allerauffallendsten aber ist, dafs beide Begebenheiten in ihrem Entstehen und Verlaufe die gröfste Aehnlichkeit, ja fast völlige Gleichartigkeit hatten.

Sowohl Kircher als auch Caspar Schott bezweifelten die Wirkung der Wünschelruthe und auch des Ringes, welcher an einem Faden in ein Glas herabhängend durch seine eigenthümlichen Schwingungen und das Anschlagen an die Wände des Glases gewisse Anzeigen geben, namentlich die Tageszeiten bestimmen sollte, und bei dem hohen Ansehen, worin diese Gelehrte zu ihrer Zeit standen, konnten diese Gaukeleien nicht wohl anders als nur einzelne sich selbst verbergende Anhänger finden. Allein um 1690 fing der bekannte Aymar an, allgemeines Aufsehen zu erregen. Zuerst zeigte er blofs die Wirkungen der Wünschelruthe und die magischen Schwingungen des Ringes am Faden, bald aber brachte ihn die Leichtgläubigkeit seiner Bewunderer dahin, dafs er Wasser, Metalle und sonstige Fossilien in seiner Nähe durch ein eigenthümliches Gefühl wahrzunehmen vorgab, endlich aber wollte er sogar die Spur entlaufener Mörder auffinden, ging dieser nach und wufste die Behörden, welche ihm hierbei Vorschub leisteten, so zu täuschen, dafs des Nichtgelingens ungeachtet sein Ansehen noch vergröfsert wurde. Grofses Aufsehen machte er überall in Paris, bis er durch die Mitwirkung des aufgeklärten Prinzen Condé entlarvt wurde, in dessen Zimmern er einzelne Nägel und Stücke von Tressen entdeckte, wovon er glaubte, dafs man sie absichtlich verborgen habe, von grofsen vorhandenen Metallmassen aber nichts empfand, deren Anwesenheit er nicht ahndete. Er selbst gestand

dem Prinzen, dafs nur die Leichtgläubigkeit des Publicums ihn zum Betrüger gemacht habe; die Polizei machte die Entlarvung desselben bekannt und er entfernte sich mit einer vom Prinzen erhaltenen Unterstützung aus der Stadt, worauf die vielbesprochenen Wunder allmälig in Vergessenheit kamen[1]. Inzwischen sagte Bayle bei dieser Veranlassung voraus, dafs dieses Ausgangs ungeachtet ähnliche Betrüger wieder auftreten würden, weil die Menschen einmal betrogen seyn wollten, und ich trage kein Bedenken, diese so vollkommen eingetroffene Prophezeiung auch noch als für die Zukunft gültig zu wiederholen.

Gerade ein Jahrhundert nach diesen Begebenheiten erregten ganz gleiche Betrügereien die allgemeine Aufmerksamkeit des Publicums, gingen von Italien aus, fanden im südlichen Deutschlande viele Anhänger, konnten aber im nördlichen keine festen Wurzeln fassen. Hauptsächlich versuchte Thouvenel[2] die Mährchen von den Kräften der Wünschelruthe, den Schwingungen kleiner Pendel und der Kunst des Wasser- und Metall-Fühlens aus ihrer Verborgenheit bei einigen Leichtgläubigen unter den ungebildeten Volksclassen in die höheren Sphären heraufzuziehen und den ernsten wissenschaftlichen Forschungen anzureihen. Sein Hauptheld war ein gewisser Pennet, welcher hauptsächlich die geheime Kraft besitzen sollte, ungleich tief verborgene Mineralien durch einen säuerlichen oder alkalischen Geschmack und allgemeine Nervenaffection zu fühlen, wenn er sich denselben näherte, und dann am stärksten, wenn er sich lothrecht oder in gröfserer Nähe über denselben befand. Thouvenel erhielt an dem Grafen Belladora und Gazolo, desgleichen dem Abte Fortis gläubige Anhänger[3], an Spallan-

1 Von ihm handelt ausführlich Vallamont a. a. O.

2 Mém. phys. et méd. montrant les rapports évidens entre les phénomènes de la baguette divinatoire, du magnétisme et de l'électricité. Lond. et Par. 1780. Second mém. ebend. 1783. 8. Recueil de Mémoires concern. l'électricité organique et l'électricité minérale etc. pour servir de suite aux mémoires publiés en 1780 et 83 sur les rapports, qui existent entre les phénomènes du magnétisme, de l'électricité et de la baguette divinatoire. Bresc. 1792. Nouvelles pièces relatives a l'él. organ. etc. Vicenza 1793. 8. Ragguagli dell' esperienze dell' elettrometria eseguita in Brescia. Udine e Verona nell' An. 1793. Venezia 1794.

3 Esperienze eseguite da Pennet in Verona nel Mese di Giuglio 1793 per Dionigi Ramanzini. Verona 1793.

ZANI aber nach genauerer Prüfung einen Gegner [1]. Gröſseren und allgemeineren Beifall, als die Kunst des Wasserfühlens, erhielten die magischen Kräfte der kleinen *Pendel aus Schwefelkiesen* an Fäden aufgehangen, und es ist in der That merkwürdig, daſs diese Mährchen bis auf die neuesten Zeiten herab noch mitunter gläubige Anhänger finden. FORTIS wollte beobachtet haben, daſs solche Pendel in der Hand des Grafen FANTUZZI schwebend gehalten über Wasser und Metallen in Schwingungen geriethen und verschiedene, aber regelmäſsige und nach bestimmten Gesetzen wechselnde, Curven beschrieben. Der scharfsinnige AL. v. HUMBOLDT [2] erklärte sich sogleich dagegen, und Deutschland wäre ohne Zweifel mit einem so weit verbreiteten Glauben an diese Mährchen verschont geblieben, wenn dieser groſse Gelehrte schon damals seinen jetzigen wohlbegründeten Ruf errungen gehabt hätte, indem er nicht bloſs gleich anfangs die ganze Sache belächelte, sondern auch den psychologischen Grund des Hanges zum Glauben an solche Wunderkräfte ächt naturphilosophisch nachwies.

Insbesondere war München der Centralpunct, von wo aus die durch geheime Kräfte erzeugten Wunderphänomene verbreitet wurden, unter deren lebhaften Vertheidigern hauptsächlich RITTER, SCHELLING, FRANZ BAADER, GEHLEN [3], WINTERL [4] und BUCHHOLZ [5] sich als solche auszeichneten, denen die Versuche vorzugsweise gut gelangen. Dort fanden nicht bloſs die Schwingungen der Schwefelkiespendel sehr allgemeinen Glauben, sondern die Kraft des Erz- und Wasser-Fühlens sollte sich auch keineswegs als etwas Auſserordentliches bei PENNET allein finden, indem sie vielmehr bei zwei Frauenzimmern, GANDOLFI und ANFOSSI, dem Abt AMORETTI, dessen Enkel und vielen andern Personen in gleichem Grade gefunden wurde. Freilich war die Leichtgläubigkeit so ungeheuer groſs, daſs irgend jemand nur die Behauptung aufstellen durfte, er besitze diese Kunst,

1 Brugnatelli Ann. di Chim. T. IV.

2 Versuche über die gereizte Muskel- und Nervenfaser. Berl. 1797. I. S. 467.

3 Dessen Journ. Bd. IV. S. 98.

4 Ebend. III. S. 732.

5 Ebend. V. S. 575.

um ohne weitere Prüfung sogleich für einen Wundermann gehalten zu werden. Der bis dahin allein bekannte Apparat der Wünschelruthe wurde durch einen neuen vermehrt, nämlich einen Degen, welcher zwischen den Fingerspitzen gehalten eigenthümliche Drehungen zeigen sollte, ja Ritter erfand noch einen neuen, seinen sogenannten *Balancier*, einen kleinen kupfernen Stab von rectangulärem Querschnitte, 6 Z. lang, 0,5 Z. breit und von willkürlicher Dicke, welcher auf dem senkrecht gehaltenen Mittelfinger waagerecht liegend bei verschiedenen Personen in eine drehende Bewegung gerieth. Diese Phänomene erfolgten jedoch schwerer, als die mit der Wünschelruthe, und ihr Zusammenhang mit den elektrischen wurde dadurch beurkundet, dafs der Balancier nicht isolirt seyn und nicht aus Schellack, als der am besten isolirenden Substanz, bestehen durfte[1]. Hauptsächlich wurde aber noch ein den Pennet übertreffender Wasserfühler, Namens Campetti, aufgefunden und auf königliche Kosten nach München gebracht, wo er nicht blofs diese seine Kunst, sondern auch die verwandten in einem vorzüglichen Grade, jedoch blofs für die ohnehin Wundergläubigen befriedigend, zeigte[2].

Da es kaum ohne Gefahr, als durchaus unphilosophisch verschrieen und verketzert zu werden, möglich war, Zweifel gegen diese Thatsachen zu äufsern, welche von den sich vorzugsweise Naturphilosophen nennenden Gelehrten lebhaft vertheidigt und als der Anfang einer ganz neuen, alles Frühere umstofsenden und bei weitem übertreffenden Periode des Studiums der Naturwissenschaften dargestellt wurde, so wagte es zuerst Gilbert[3] mit grofser Heftigkeit, aber eindringender und scharfer Kritik als Gegner aufzutreten. Sind gleich manche in seinen Aufsätzen enthaltene Persönlichkeiten nicht ganz zu billigen, so müssen es ihm doch die deutschen Physiker danken, dafs er die damals allerdings erforderliche Kühnheit hatte, dem stets weiter sich verbreitenden Strome der Irrthümer in den Weg zu

1 Der Siderismus herausgegeben von J. W. Ritter. Tübing. 1808. Bd. 1. St. 1.

2 Morgenblatt für gebildete Stände. 1807. Jan. N. 26. Bibl. Brit. XXXV. p. 80 ff. u. a. a. O.

3 Dessen Ann. der Phys. XXVI. S. 369.

treten und dadurch zu verhüten, dafs nicht noch mehrere das Schicksal derer theilten, welche beim Verschwinden der vermeintlichen Wunder als abergläubig und einer scharfsinnigen Prüfung und Erforschung der Wahrheit unfähig im In- und Auslande erscheinen mufsten. Auch Marechaux, insbesondere Erman und C. H. Pfaff erklärten sich als Gegner[1], viele dagegen blieben gläubige Anhänger, indem sie zugleich versicherten, dafs namentlich die Versuche mit Schwefelkiespendeln bei ihnen und andern eigenthümlich organisirten Personen nie ohne den entschiedensten Erfolg blieben. Als jedoch nach einiger Zeit Campetti's vorgebliche Kunst des Wasser- und Metallfühlens bei genauen in München selbst angestellten Proben nichtig befunden wurde und das Geschrei seiner wundergläubigen Anhänger verstummte, verloren auch die Schwingungen der Schwefelkiespendel allmälig von ihrem Ansehen, um so mehr seitdem C. H. Pfaff[2], Zimmermann[3] u. A. die Ursachen derselben, als in der gleichzeitigen Fixirung des Pendels und seiner Unterlagen gegründet, durch genaue Versuche nachwiesen. Man nahm übrigens zu diesen Pendeln nicht blofs Schwefelkiese, sondern auch andere Körper, namentlich goldene Fingerringe, vermuthlich aus Unkunde des Umstandes, dafs eben diese schon zu den Zeiten des Caspar Schott gekannt, aber in das Gebiet der Ammenmährchen verwiesen waren. Die damit so leicht anzustellenden Versuche blieben nicht lange das Eigenthum der Physiker, sondern sie wurden auch in gesellschaftlichen Kreisen und namentlich von Damen angestellt, weswegen dann der Glaube an dieselben sich noch eine geraume Zeit in diesen Sphären erhielt, nachdem die eigentlichen Physiker unlängst die Nichtigkeit der Sache erkannt hatten. Eine vorzügliche Ursache des Glaubens an so oft und so vollständig widerlegte Irrthümer lag in der Verbindung derselben mit den Erscheinungen des sogenannten animalischen Magnetismus, welche tief in das Gebiet der Physiologie und Psychologie eingreifend auf dem Wege rein physikalischer Prüfung nicht so leicht widerleglich waren. Unter die späteren öffentlichen Vertheidiger derselben gehören unter

1 Ebend. XXVII. 1 ff.

2 G. XXVII. 41.

3 Ebend. 337.

andern Gerboin[1], Spindler[2], Canali[3], Knoch[4] mit sehr mäſsigenden Modificationen, und hauptsächlich Amoretti, welcher das Ganze in einem ausführlichen Werke behandelte[5]. In diesem Augenblicke kann die Sache als abgethan betrachtet werden, wenn nicht in künftiger Zeit aufs Neue eine Veranlassung gegeben wird, sie abermals wiederholt ins Publicum zu bringen.

c. *Geheime magnetische Kräfte.* Wie der Elektricität werden auch dem *Magnetismus* geheime Kräfte und wunderbare Einwirkungen auf den menschlichen Körper beigelegt. Sofern sich dieses auf den mineralischen Magnetismus bezieht, gehört es unter den Art. *Magnet*, allein die vorzüglichsten und unbegreiflichsten Wunder gehören in das Gebiet des sogenannten *thierischen Magnetismus.* Auch diese ganze Lehre ist gegenwärtig fast gänzlich unter die Classe der Mährchen verwiesen. Weil aber die Sache ein groſses geschichtliches Interesse hat, so verdient sie in einem eigenen Artikel behandelt zu werden. *M.*

Krummzapfen.

Kurbel; *Manubrium*; Manivelle; *Crank.*

Die Kurbel und der Krummzapfen werden zuweilen für gleichbedeutend genommen, in vielen Fällen aber unterschieden, und dann bedeutet *Kurbel* denjenigen Hebel mit Handhabe, vermittelst dessen man Wellen ohne und mit Rädern umdrehet, z. B. bei Caffeemühlen, Elektrisirmaschinen, Schleifsteinen, Spinnrädern und andern kleinen Maschinen; *Krummzapfen* aber eine ähnliche Vorrichtung, durch welche gröſsere Räder, sogenannte Kunsträder, den horizontalen, verticalen oder unter irgend einem Winkel geneigten Stangen, namentlich den Feldgestängen, Bewegung mittheilen oder diese von ihnen erhalten. Die gröſseren Kurbeln oder Krummzapfen haben mehrerer Festigkeit

1 Recherches expérimentales sur un nouveau mode de l'Action électrique. Straſsb. 1808. 8.

2 Ueber das Princip des Menschenmagnetismus. Nürnb. 1811. 8.

3 G. LV. 444.

4 Ebend. LVII. 360. Wagner's Urtheil über sie ebend. LIX. 328.

5 Dieses ist in Deutschland meistens nur aus dem Auszuge in G. LX. 225. bekannt.

Fig. 208. wegen ein in die Welle des Rades eingelassenes breites Blech, eine mit dem Halse der Kurbel in Eins gegossene Platte a b c d, der *Bläuel* oder *Pläuel* genannt, woran sich der Hals e f befindet, welcher meistens zugleich als Zapfen der Welle zu dienen pflegt. An diesem ist rechtwinklig der gerade oder in einer auf die Axe der Welle lothrechten Ebene krummgebogene Theil f g, das *Knie* oder der *Arm*, befestigt, an dessen Ende sich die *Warze* g h befindet, welche bei kleineren Maschinen verlängert und mit einer Handhabe, einem Handgriffe, versehn ist, wenn die Kurbel durch Menschenhände gedreht werden soll.

Aus dieser einfachen Kurbel wird durch geringe Modification eine gedoppelte, selten eine vielfache. Soll nämlich die Welle des gröſseren erforderlichen Kraftaufwandes wegen durch zwei oder mehrere Menschen gedreht werden, so bringt man
Fig. 209. an beiden Seiten derselben eine Kurbel a b c und $\alpha \beta \gamma$ an, ist aber die Kraft, welche die Kurbel umdreht, stark genug, um zwei oder mehrere Maschinerien zugleich in Bewegung zu sezzen, so werden an beiden Seiten der Welle Kurbeln angebracht oder die eine wird zweimal gebogen (doppelt gekröpft), ja dieses kann auch bei beiden geschehn und es ist selbst eine mehrfache Kröpfung leicht möglich, wozu jedoch selten Kraft genug
Fig. 210. vorhanden ist. Hierbei sind die doppelten Kröpfungen a b c, $\alpha \beta \gamma$ rücksichtlich der Länge des Hebels entweder gleich oder ungleich, je nachdem die Bewegungen der an ihnen angebrachten Gestänge und Maschinerien langsamer oder schneller seyn sollen.

Bei groſsen Maschinen müssen die Krummzapfen stark, massiv und, mit Ausnahme der eingesetzten Warze, aus einem Stücke gegossen seyn. Man hat daher an ihrer Stelle, namentlich in England, unlängst die Scheiben eingeführt, welche bei geringerer Masse gröſsere Dauerhaftigkeit besitzen, leichter zu befestigen sind und auſserdem den Vortheil gewähren, daſs die Länge des Hebelarms bei ihnen verändert werden kann. Eine
Fig. 211. solche Scheibe wird mit der viereckigen Oeffnung a auf den Zapfen der Welle gesteckt und vermittelst einer Schraube daran befestigt. Die ungleich weit vom Centrum entfernten Löcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dienen zur Aufnahme der Warze, welche gleichfalls in sie hineingesteckt und mit einer Schraube befestigt wird. Man übersieht bald, daſs die Anwendung dieser Scheibe ganz die

nämliche als die des gemeinen Krummzapfens ist, sie gewährt aber außer größerer Dauerhaftigkeit noch den Vortheil, daſs einzelne zerbrochene Theile leichter wieder ergänzt werden können.

Der Krummzapfen gehört rücksichtlich des dabei zum Grunde liegenden mechanischen Princips zum Hebel und bildet eine so einfache Anwendung hiervon, daſs es auf den ersten Blick befremdend scheint, wie es eine Theorie desselben geben könne. Es ist aber hierbei Folgendes zu bemerken. Wenn der Krummzapfen in seiner eigentlichen Gestalt oder als Scheibe durch die Welle, woran er befestigt ist, umgedreht wird, so ist die auf die Warze von der Welle aus wirkende, also die gegebene Last wältigende Kraft stets gleich, vorausgesetzt, daſs die Umdrehung der Welle selbst mit unveränderter Kraft erfolgt. Geschieht dagegen die Umdrehung der Kurbel vermittelst einer die Warze ersetzenden Handhabe durch Menschen, so ist es für diese wegen der verschiedenen Stellungen, die sie dabei annehmen müssen, unmöglich, unausgesetzt eine gleiche Kraft anzuwenden. In diesem Falle pflegen die an beiden Seiten der Welle anzubringenden Kurbeln in einem Winkel von 180 Graden gegen einander gerichtet zu werden, so daſs die geringsten und gröſsten Kraftäuſserungen beider zusammenfallen und sich einander compensiren. Meistens aber wird durch die Bewegung der Kurbel im Kreise zunächst eine geradlinige hervorgebracht, indem das an der Warze hängende Gestänge sich in horizontaler oder verticaler Richtung bewegt, und eben so oft wird durch ein in gerader Richtung bewegtes Gestänge eine Kurbel in Bewegung gesetzt. Eine einfache Betrachtung ergiebt aber, daſs die hiernach ausgeübte Kraft veränderlich ist und zweimal ihr Maximum und zweimal ihr Minimum bei jedem von der Warze durchlaufenen Kreise erreicht, Ersteres wenn die Richtung des Gestänges auf den Arm des Krummzapfens oder den Radius der Scheibe vom Centrum bis zur Warze lothrecht ist, Letzteres wenn beide in eine gerade Linie fallen. Indem hiernach also zweimal ein Uebergang vom Maximum zum Minimum und zweimal ein umgekehrter statt findet, so fordert die Theorie aufzufinden, wie groſs die Kraft in jeder Lage und somit die Summe der ganzen, bei einer Umdrehung ausgeübten, sey, desgleichen auf welche Weise bei diesen vorhandenen Bedingungen der gröſste Nutzeffect erhalten werde. Die Theorie selbst, um

welche sich unter andern DE LA HIRE[1], LAMBERT[2], KÄSTNER[3], EYTELWEIN[4] und hauptsächlich LANGSDORF[5] verdient gemacht haben, würde hier nicht am rechten Orte seyn, und es genügt vielmehr die Bemerkung, daſs eine gröſsere Gleichheit der Kraft schon durch das angegebene Mittel, zwei Kurbeln in entgegengesetzter Richtung anzubringen, erhalten wird, ungleich zweckmäſsiger aber und die Ungleichheit der Kraft völlig aufhebend ist die bekannte Anwendung des Schwungrades. *M.*

Kryophorus.

Ein von WOLLASTON[6] angegebenes Instrument, vermittelst dessen Wasser durch seine eigene Verdunstung zum Gefrieren gebracht wird. Die Benennung ist entlehnt aus dem Griechischen von κρύειν gerinnen machen, in Eis verwandeln, daher κρύος Eis, Frost; dazu φέρειν tragen, bringen. Die richtige Schreibart ist daher *Kryophorus*, statt dessen auch *Chryophorus* und *Cryophorus* gebraucht wird.

Der Erfinder dieses sinnreichen Apparates ging dabei von folgender Theorie aus. Nach der gewöhnlichen Annahme erfordert Eis 140° F. Wärme, um zu schmelzen, und Wasser 960° F., um in Dampf verwandelt zu werden[7]. Hat man also 32 Grains Wasser von 62° F. und wird 1 Grain von diesen in Dampf verwandelt, so verliert das Ganze $\frac{960}{32} = 30°$ F. Wärme

1 Mém. de l'Acad. T. IX. p. 152.

2 Nova Acta Helvetica. T. I. p. 75.

3 Nov. Comm. Soc. Reg. Gott. T. V.

4 Berl. Denkschr. 1812—13. S. 95.

5 Grundlehren der mechanischen Wissenschaften. Erlang. 1802. 8. S. 587. Theorie des Krummzapfens u. s. w. Erlang. 1803. 32 S. 8. Handbuch der gemeinen und höheren Mechanik fester und flüssiger Körper. Heidelb. 1807. S. 353. Ausführliches System der Maschinenkunde u. s. w. Heidelb. 1826. 4. Th. I. S. 469.

6 Phil. Trans. 1813. p. 71. Daraus in G. XLVIII. 174.

7 Die 140° F. betragen 77,78 C. und 960° F. 533,4 C. Gewöhnlich wird jene Gröſse auf 75° C., diese auf 640° C. gesetzt, wenn man bei beiden Bestimmungen von 0° C. ausgeht. Der Unterschied dieser Bestimmungen ist für den vorliegenden Zweck von keiner Bedeutung.

und wird also auf 32° F. oder den sogenannten Gefrierpunct herabsinken. Werden dann noch 4 Grains in Dampf verwandelt, wonach also nur 27 Grains übrig bleiben, so verlieren diese $\frac{4}{27} \times 960 = 142°$ F. Wärme, wodurch also das Ganze vollständig in Eis verwandelt werden kann. Dafs beim wirklichen Versuchen ein den Zahlenbestimmungen nach so genaues Resultat wegen fortdauernder Zuströmung der Wärme von Aufsen nicht statt finden könne, versteht sich von selbst, obgleich das Princip durchaus richtig ist.

Das Instrument selbst besteht aus einer etwa $\frac{1}{8}$ Z. weiten Glasröhre a a (deren nicht bestimmte Länge zwischen 12 bis 24 Z. beträgt) mit zwei Glaskugeln A, B, welche mit etwas Wasser gefüllt werden, so dafs die eine Kugel nicht völlig zur Hälfte damit erfüllt ist. Hauptsächlich wird dann erfordert, den Apparat durch anhaltendes Sieden des Wassers völlig luftleer zu machen und die Spitze der einen Kugel an der Lampe zu verschliefsen. Alsdann senkt man die eine leere Kugel in eine kaltmachende Mischung, damit sie Wasserdämpfe aus der andern in sich aufnimmt und das Wasser in derselben durch die entstehende Verdampfung in Eis verwandelt. Statt der kaltmachenden Mischung aus Salzen, oder Schnee und Salzen, wendet Marcet Schwefeläther oder noch besser Schwefelkohlenstoff an, womit er die mit etwas Baumwollenzeug überzogene Kugel benetzt und dann zur Verstärkung des Verdampfens Luft mit einem Blasebalge zuführt. Der Versuch gelingt noch besser und schneller, wenn die zu erkaltende Kugel in eine Campane eingeschlossen und letztere zur Erhöhung des Verdampfens luftleer gemacht wird. Fig. 212.

M.

Krystall.

Crystall; *Crystallus;* Cristal; *Crystal.* So heifst jeder natürliche Körper von fester gleichartiger Masse, welcher bei der Annahme der ihm jetzt zustehenden Beschaffenheit nach eigenthümlichen, von seinem Wesen abhängigen Gesetzen durch mehr oder weniger vollkommene Ebenen begrenzt wurde.

Körper, die zwar eine von Ebenen begrenzte Form besitzen, ähnlich dem Krystalle, diese aber durch äufsere Veranlassung anzunehmen gezwungen worden waren, können als

Nachahmungen von Krystallen oder als *uneigentliche* Krystalle betrachtet werden. Hierher gehören 1) Ausfüllungen krystallförmiger, leergewesener Räume durch eine Masse, welche für sich solche Gestalten zu bilden nicht im Stande seyn würde, wie diejenige ist, welche sie hier durch den gegebenen Raum, den sie erfüllen mufs, anzunehmen gezwungen ist (*Afterkrystalle* von Manganerz, Rotheisenstein u. s. w. in Formen, welche vorher von Kalkspathkrystallen eingenommen worden waren u. s. w.). 2) Krystallförmig gestaltete Massen, entstanden durch Umwandlung oder durch ganze oder theilweise Zersetzung anderer Massen mit Beibehaltung der Form, welche diese vor der Zerstörung einnahmen (*Pseudomorphosen* von Bleiglanz oder Schwefelblei, entstanden aus Krystallen von phosphorsaurem Bleioxyde, mit Beibehaltung der Krystallgestalt dieser Substanz). 3) Durch Menschenhand absichtlich gebildete Modelle von Krystallen und so weiter.

Das Wort *Krystall* (κρύσταλλος) heifst Eis, wurde später angewandt zur Bezeichnung des Bergkrystalls und erhielt endlich diejenige Ausdehnung des Sinnes, in welcher wir es jetzt anwenden.

Die Wissenschaft von den Krystallen heifst *Krystallkunde* (*Crystallologia*). Sie zerfällt in die Lehre von den mathematischen Eigenschaften der Krystalle, *Krystallometrie*, und in die Lehre von der Krystallisirung oder Entstehung der Krystalle, *Krystallogenie*. Die Krystallometrie, insofern sie eigenthümliche Gesetze entwickelt, von denen die verschiedenen geometrischen Eigenschaften der fraglichen Körper abhängen, heifst *Krystallonomie* oder *Krystallgesetzlehre*. Insofern es aber eine der wichtigsten Gegenstände der Krystallometrie ist, Krystalle mit Hülfe einer, in Worten oder Zeichen bestehenden, Kunstsprache beschreiben zu lehren, heifst sie auch *Krystallographie*.

Die Krystallometrie hat es sonach zu thun mit Gröfse und Form der Krystalle und ihrer Theile, der Flächen, Kanten, Ecken u. s. w.

Die Gröfse der Krystalle von einer und derselben Masse ist im Allgemeinen sehr verschieden; deshalb sind genaue Angaben darüber von geringem Interesse, obgleich es keineswegs unwichtig seyn dürfte, dafs manche Substanzen kaum die Gröfse einer oder einiger Kubiklinien erreichen, wie z. B. der Diamant, während andere bis zu $\frac{1}{4}$ Kubikfufs und darüber Körperinhalt haben

können, z. B. die Granaten, und noch andere selbst die Gröſse eines Kubikfuſses übersteigen, z. B. der Bergkrystall; während von der andern Seite Krystalle derselben Substanz vorkommen, von so geringem Volumen, daſs sie dem freien Auge kaum sichtbar sind.

Von der Gröſse der Krystalle ist natürlich auch die Gröſse ihrer Flächen und die Länge der diese begrenzenden Seiten, bei übrigens gleichen Umständen, abhängig und daher eben so veränderlich. Soll aber die Form von zwei Krystallen gleich seyn und nur die Gröſse verschieden, so muſs in beiden die Gröſse der einander entsprechenden Winkel dieselbe seyn. Messung der Winkel also ist für die Krystallometrie ein Gegenstand von Wichtigkeit. Die Krystalle haben nämlich, gleich allen von Ebenen begrenzten Körpern, *Kanten* (d. h. gegenseitige Begrenzungen je zweier benachbarter Oberflächentheile eines Körpers in Linien) und Ecken (entstehend durch das Zusammentreffen von 3 oder mehreren Krystallflächen in einem Puncte, in welchem sich auch 3 oder mehrere Kanten schneiden).

Bei Ecken sowohl als bei Kanten kommt in Betracht: 1) die Länge der Kantenlinien, 2) die Gröſse jeder Kante, d. h. die Gröſse der Neigung der beiden sie bildenden Flächen gegen einander, und 3) die Gröſse der ebenen Winkel, welche je zwei in einem Puncte zusammentreffende Kantenlinien bilden. Die Gröſse der Neigung zweier Flächen aber wird bestimmt durch die Gröſse eines Winkels, gebildet von zwei geraden Linien, eine in jeder der beiden Flächen liegend und senkrecht zur fraglichen Kantenlinie, aus ein und demselben Puncte errichtet[1].

In der frühesten Zeit pflegte man die Winkelbestimmungen an den Krystallen dadurch vorzunehmen, daſs man Seiten und einzelne Diagonallinien der Flächen derselben mit dem Zirkel maſs und daraus ebene Winkel und Neigungswinkel berechnete.

1 Um die durch Messung oder Rechnung gefundene Neigung zweier Flächen auszudrücken, dient das Zeichen ||, so daſs zum Beispiel A || B = 30° oder m n o || m n p = 70° Ausdrücke sind, welche die Neigung von A gegen B oder von m n o gegen m n p angeben.

Dasselbe Zeichen gebraucht man gleichfalls, wenn von der Neigung zweier Linien gegen einander die Rede ist und deren Durchschnittspunct nicht mit einem besondern Buchstaben bezeichnet ist, so wie auch, wenn man die Neigung einer Linie gegen eine Ebene angeben will.

Später erfand Carangeau das sogenannte *Anlege-Goniometer* oder Hand-Goniometer (Goniomètre par application), mit dessen Hülfe Romé de l'Isle und später Haüy und andere weit genauere Angaben zu liefern im Stande waren, als ihre Vorgänger. Dieses Goniometer besteht aus zwei linealartigen Vorrichtungen ab und df, die der Länge nach mit Spalten gh und lm versehen sind, welche dazu dienen, eine kleine Axe c anzubringen, zur Umdrehung für das eine Lineal df und zur Verschiebung beider, um beliebige Verkürzung der Schenkel ac und dc erzeugen zu können. Das Lineal ab ist mit seiner Mittellinie gk an einem Arme ck befestigt mittelst der Axe bei c und mittelst eines Stiftes bei e, welcher Arm mit einem in Grade getheilten Halbkreise rts zusammenhängt. Die Befestigung muſs so seyn, daſs der Arm cf auf der Ebene des Kreisbogens aufliegt und die Linie nf sich jedesmal in der Richtung eines der Radien befindet; ebenso muſs auch die eine durch die Mitte der Axe c und durch die Mitte des Stiftes bei e gehende gerade Linie gk die Puncte des Kreisbogens 0 und 180 mit einander verbinden. Die Spalte ik in dem Lineale ab dient mit zur Verschiebung dieses Lineals an dem Stifte bei e.

Fig. 213.

Beim Gebrauche hält man den zu messenden Krystall in der linken Hand, während man mit dem Daumen und Zeigefinger der rechten das Lineal df bewegt und zu bewirken sucht, daſs die einander zugekehrten Ränder der Schenkel ca und cd beider Lineale den zu messenden Neigungswinkel einschlieſsen, und da diese Ränder eine kleine Breite haben, so beurtheilt man durch das Gefühl und durch das Auge, ob ein so vollkommenes Anliegen statt findet, daſs zwischen den fraglichen Krystallflächen und den sie berührenden Theilen der Lineale kein Lichtstrahl hindurch dringen könne. Die Stelle, in welcher sich dann die zugeschärfte, in der Richtung des Halbmessers liegende, Kante nf des Lineals df befindet, giebt die Anzahl der Grade an, welche der fragliche Neigungswinkel miſst. Ist aus irgend einem Grunde die gröſsere Länge der Schenkel ca und cd hinderlich, so werden sie durch die erwähnte Verschiebung verkürzt; oft ist dann auch zugleich der Theil ts des Gradbogens selbst der genauen Anlegung im Wege und deshalb ist der Halbkreis bei t getheilt und mit einem Gelenke verbunden; die Feder co ist bestimmt, den Bogen ts mit dem andern tr und dem Mittelpunct c in einerlei Ebene zu erhalten. Wird ihre Verbindung bei o

gelöst und sie nach cr hin zurückgeschlagen, so läſst sich auch der Viertelkreis ts nach tr hin zurücklegen. Man hat auch ähnliche Werkzeuge, bei welchen die beiden Lineale und die sie verbindende Axe von dem Halbkreise zum Behuf der Messung des Winkels abgenommen, mittelst einer Schraube bei der Messung festgestellt und sodann auf dem Halbkreise wieder befestigt werden können, um die Ablesung der Grade zu bewerkstelligen. Jedoch scheint jene erste Art bei weitem vorzüglicher; mit ihr können bei günstigen Umständen die Messungen bis auf $\frac{1}{4}$ Grad genau statt finden, wenn einmal die nöthige Fertigkeit in der Handhabung derselben erworben worden ist.

Da es in den meisten Fällen darum zu thun ist, eine annähernde Bestimmung der Winkel zu erhalten, und diesem Zwecke durch das Anlege-Goniometer in hohem Grade entsprochen wird, so wird dasselbe durch kein anderes Instrument ersetzt werden können und stets seinen bedeutenden Werth behalten. Zu möglichst genauen Winkelbestimmungen aber ist dasselbe nicht geeignet. Deshalb wurde von Wollaston das nach ihm genannte *Reflexions - Goniometer* (goniomètre à reflexion) erfunden. Schon Haüy benutzte das Spiegeln der Krystallflächen, um die Neigung zweier solcher an einem Krystalle mit der bekannten Neigung zweier Flächen an einem andern durch das gleichzeitige Zurückwerfen der Lichtstrahlen von den einander annähernd parallel gestellten Flächen zu vergleichen.

Das Messen durch Zurückstrahlung des Lichtes von spiegelnden Krystallflächen beruht auf folgender Betrachtung. Es sey ld ein bestimmter Lichtstrahl, der auf eine spiegelnde Fläche gb bei d auffällt und unter dem Winkel adb = ldg nach a hin zurückgestrahlt wird, so daſs die Ebene cda auf der Ebene gb senkrecht steht; bh sey eine zweite spiegelnde Ebene, die mit bg einen Winkel gbh macht, und die Durchschnittskante bei b sey senkrecht auf der Ebene lda. Errichtet man in dem Puncte d eine auf die Ebene gb senkrechte Linie ec, halbirt man den Winkel gbh durch eine Linie bc und fällt von c aus eine Senkrechte cf auf die Ebene bh, so ist wegen Gleichheit der Dreiecke bdc und bfc die Linie cf = der Linie cd und der Winkel dcf ist die Ergänzung von dbf oder gbh zu 180°, weil das Viereck dbfc bei d und f 2 rechte Winkel hat. Denkt man sich nun in dem Puncte c eine auf die Ebene der Gesammtfigur senkrechte Axe, welche der Durchschnittskante der beiden

Fig. 214.

Flächen gb und bh parallel ist, und dreht man um diese den Körper, an welchem die beiden spiegelnden Flächen gb und bh vorkommen, so dafs die Linie cf in der Ebene dcf sich bewegend an die Stelle von cd kommt, während zugleich die auf cf senkrechte bh diejenige Stelle einnimmt, die vorher von gb eingenommen wurde, so mufs wieder der nämliche Lichtstrahl ld in derselben Linie da wie früher in das Auge bei a zurückgeworfen werden. Wird also der Winkel dcf gemessen, so wird dadurch der gesuchte Neigungswinkel gbh gefunden, denn er ist $= 180° - dcf$.

Es kommt also darauf an, irgend ein zu genauer Winkelmessung taugliches Instrument mit einer Vorrichtung zu verbinden, mittelst welcher der Krystall gehalten und in verschiedene Stellungen gebracht werden kann, damit die Linie der zu messenden Kante senkrecht auf die Ebene des in Grade getheilten Kreises gerichtet sey, und wodurch wenigstens annähernd die Erzeugung einer solchen Stellung erhalten werde, in welcher die beiden Krystallflächen, wodurch die zu messende Kante gebildet ist, sich in gleicher Entfernung von der ihnen parallelen Linie, welche in dem Mittelpuncte des eingetheilten Kreises senkrecht auf denselben gedacht wird, befinden, und endlich, wenn diese Stellung erreicht ist, Umdrehung um diese als Axe des Winkelmafses dienende Linie statt finden könne.

Fig. 215. Das Wollastonsche Goniometer besteht daher aus einem Gestelle, welches zwei Füfse d und e und einen an diesen befestigten Nonius c trägt, aus einem in Grade getheilten Ringe ab, befestigt an einer Nabe (d. h. röhrenförmigen Axe), in welcher ein kegelförmiger Stift ff, dessen Axe am Mittelpuncte des Gradkreises auf der Ebene desselben senkrecht steht, drehbar ist. Mit der Aufsenfläche der Nabe ruht diese Vorrichtung in einer Hülse, die am obern Ende des Gestelles angebracht ist. Die am Rande gekörnte Scheibe k ist an der Nabe fest, dreht diese und somit auch den Gradring, wobei zu gleicher Zeit auch jener kegelförmige Stift ff sich mit drehen mufs. Die zweite an dem Rande gekörnte Scheibe i dient dazu, den Stift ff allein in umdrehende Bewegung zu versetzen, ohne dafs der Gradring sich mit bewegt, welcher, um diesen Zweck zu erleichtern, oft noch bei x durch eine Feder, die am Gestelle befestigt ist, während sie zugleich einen Vorsprung der innern Fläche des Ringes berührt, festgehalten wird. Der Stift ff trägt einen Bogen fr,

welcher durch ein einfaches Gelenk mit einem zweiten Bogen to verbunden ist. Dieser trägt einen cylindrischen, in der Hülse p drehbaren und seiner Länge nach verschiebbaren Stift o o. An das obere Ende desselben wird bei h der Krystall mit Wachs befestigt, so daſs die zu messende Kante annähernd dem Augenmaſse nach senkrecht auf der eingetheilten Kreisscheibe sich befindet, wie dieses die Figur zeigt. Das Instrument ist so gestellt, daſs 2 Horizontallinien w und v an einem hinreichend entfernten Gegenstande mit der Axe ff desselben parallel sind. Durch Drehung des Griffes i sucht man den Krystall abwechselnd in jene zwei Stellungen zu versetzen, in welchen die eine oder die andere der Flächen der zu messenden Kante die obere Linie w so abspiegelt, daſs ihr Bild mit der untern direct gesehenen Linie v zusammenfällt. Das Auge muſs dabei der Krystallfläche möglichst nahe seyn. Das erwähnte Zusammenfallen wird nicht auf den ersten Versuch statt finden und man muſs alsdann durch Anwendung der drehenden Bewegungen, welche der Stift o o in der Hülse p gestattet, und jene Bewegung, die das Gelenk bei r erlaubt, dahin zu wirken suchen, nach und nach die Linie der zu messenden Kante möglichst vollkommen senkrecht auf die Ebene der Kreisscheibe zu stellen, indem alsdann auch beide Kantenflächen auf diese Ebene senkrecht sind.

Ob dieses vollkommen gelungen sey, erkennt man daran, daſs durch bloſse Umdrehung des Griffes i es möglich ist, abwechselnd auf der einen und der andern der Krystallflächen, welche die zu messende Kante bilden, die Linie w sich so abspiegeln zu lassen, daſs das Auge ihr Bild mit der direct gesehenen Linie v genau zusammenfallend erblickt. Die Verschiebung des Stiftes o o in der Hülse p hat namentlich den Zweck, die Krystallkante der Verlängerung der geometrischen Axe von ff nähern zu können, damit in dem Viereck dcfb die Seiten dc und cf einander gleich gemacht werden. Man sucht daher gleich anfangs dahin zu wirken, daſs die beiden Kantenflächen der geometrischen Umdrehungsaxe des Kegels ff sehr nahe liegen, ohne jedoch in sie zu fallen, und man hat dann nur eine kleine Verschiebung des Stifts o o nöthig, um mit hinreichender Genauigkeit die Gleichheit der Entfernungen beider Kantenflächen von dieser Axe zu bewirken.

Ist nun auf solche Weise die richtige Stellung des Krystalls in Beziehung zu den Theilen des Krystallhalters durch vielfach

wiederholte Versuche erreicht, so beginnt die eigentliche Messung. Der Gradring stehe auf 180°, der Griff i bringe den Krystall in die Stellung, in welcher diejenige der Krystallflächen, welche bei gleichmäſsiger Neigung der Kantenflächen gegen den Horizont, wenn diejenige Kante sich oben befindet, welche dem Beobachter (der das Instrument so vor sich stehen hat, wie es die Abbildung zeigt) nicht zugekehrt ist, die Linie w abspiegelt, so daſs das erwähnte Zusammenfallen des Bildes derselben mit der Linie v statt hat. Mit dem Griffe k wird sodann Umdrehung bewirkt, bis die andere Fläche dieselbe Lage hat, welche vorhin die erste einnahm. Der Gradkreis hat sich vorwärts bewegt und der Nonius zeigt nun auf einen Winkel, welcher um so viel kleiner ist als 180°, als derjenige Winkel beträgt, welcher die geschehene Umdrehung angeben würde. Der mittelst des Nonius abzulesende Winkel giebt dann also die Gröſse der gesuchten Krystallkante unmittelbar an.

Will man dieses Instrument als Repetitions-Winkelmesser benutzen, so stellt man den Gradkreis auf 0°, bringt mit dem Griff i die dem Beobachter unter der oben angegebenen Bedingung zugekehrte Kantenfläche in die erforderliche spiegelnde Lage, dreht dann den Griff k so, daſs die andere Fläche an die Stelle der ersten versetzt wird, sodann den Griff i, um die erste Fläche wieder an jene Stelle zurückzubringen, dann den Griff k wieder vorwärts, um die zweite Fläche abermals an die Stelle der ersten in die gehörige Lage zu versetzen, u. s. f. abwechselnd, so daſs jedesmal der Stand des Instruments vor jeder neuen Drehung abgelesen wird, damit etwaige zufällige Verrückungen des Krystalls dem Beobachter nicht entgehen und er überhaupt im Stande sey, wenn er über 180° oder über 360° ein- oder mehrmals hinaus miſst, die richtige Summe von Graden der wahren Umdrehung zu erhalten [1].

Man nimmt hierdurch also eine Anzahl von Messungen einer und derselben Kante vor, für welche man als Summe eine Mittelgröſse erhält, die mit der Anzahl der Beobachtungen divi-

1 Auch kann man den Stand des Instruments vor jeder neuen Messung um etwa 10 Grade vorwärts verrücken und so nach und nach $\frac{360}{10}$ oder 36 Messungen einer und derselben Kante vornehmen, deren jede gleichsam einem neuen Nullpuncte des Instruments entspricht.

dirt ein Resultat liefert, welches mit dem wahren Werthe der gemessenen Kante um so näher übereinstimmen wird, je gröſser die Anzahl der möglichst sorgfältig angestellten Beobachtungen ist, indem hierdurch die etwa vorgekommenen kleinen Fehler sich gegenseitig aufheben. Bei einiger Uebung in dieser Art von Messung mit einem gut gearbeiteten Goniometer und bei einer zweckmäſsigen Wahl der beiden Parallellinien, von denen die eine die gespiegelt werdende und die andere die bei der Beobachtung direct gesehene ist (besonders hinsichtlich des Grades der Erleuchtung, die für die obere stärker als für die untere seyn muſs) [1], kann man es dahin bringen, daſs die einzelnen Beobachtungen von einem solchen Mittel aus vielen Messungen um nur 4 bis 5 Minuten verschieden sind [2].

1 Man wählt deshalb am besten einen Querstab an einem Fenster des Zimmers, in welchem die Messung vorgenommen wird, oder vielmehr die Grenze zwischen ihm und der Glasscheibe als gerade horizontale Linie, die von der Krystallfläche gespiegelt werden soll, und eine unter demselben Fenster an der Wand damit parallel gezogene Linie von der erforderlichen Stärke, daſs sie mit freiem Auge auf 8 bis 10 Fuſs Entfernung *deutlich* gesehen werden kann (am besten eine schwarze Linie auf weiſsem Grunde), und von einer Länge, die 4 und mehr Fuſs beträgt, welche dient, um direct gesehen zu werden. Wegen der bessern Beleuchtung dieser unteren Linie sind die Messungen wo möglich in einem Eckzimmer vorzunehmen, das von zwei Seiten Licht erhält.

2 Von der Richtigkeit des Grades der Beleuchtung und von der hierdurch bedingten Schärfe der Beobachtung über das genaue Zusammenfallen der Bilder hängt die Richtigkeit einer Messung in weit höherem Grade ab, als von der gröſseren Entfernung der zum Visiren dienenden Bilder. Namentlich muſs hinsichtlich des unteren Gegenstandes alles, was Blendung des Auges verursachen kann, möglichst sorgfältig vermieden werden. Man muſs zu bewirken suchen, daſs das von der Krystallfläche gespiegelte und das direct gesehene Bild in gleichem Grade dem Auge deutlich erscheine, daſs aber die gröſsere Entfernung der beiden Visirlinien w und v von geringerem Einflusse ist, als man denken sollte, ergiebt sich aus folgender Betrachtung.

Ein Strich von etwa 1 Linie Breite ist auf eine Entfernung von 8—10 Fuſs noch deutlich erkennbar, und wenn also die Grenze des gespiegelten Bildes von w einigermaſsen deutlich ist, so wird nicht leicht ein Fehler von $\frac{1}{12}$ Zoll an der wirklichen Congruenz beider Bilder statt finden dürfen, den man nicht beobachten sollte. Es ist aber $\frac{1}{144} : 8 = \frac{1}{1152} < \text{Tang. } 3'$, indem Tang. 3' ungefähr $= \frac{1}{1146}$ ist. Fig.
Wenn nun ein Lichtstrahl lc von unveränderlicher Lage auf eine 216.

Der gröfste Grad von Genauigkeit wird nur dann erreicht, wenn alle Beobachtungsregeln gehörig befolgt sind, und namentlich auch jene (gegen welche am häufigsten gesündigt zu werden pflegt), dafs man eine möglichst genaue Gleichheit der Entfernung beider Krystallflächen von der geometrischen Umdrehungsaxe des Gradringes mittelst Verschiebung des Stiftes o o in der Hülse p zu erreichen sich bemühen mufs. Dafs die Krystallflächen vollkommen glatt und spiegelnd seyn müssen, wenn man eine genaue Messung anzustellen wünscht, versteht sich wohl von selbst.

Was die Anwendung von Fernröhren mit Fadenkreuz bei diesen Messungen an Krystallen betrifft, so scheint sie nicht in dem Grade, in welchem man es erwarten sollte, von Vortheil zu seyn. Um dieses und zugleich den Grad von Genauigkeit, welchen solche Messungen verstatten, zu versinnlichen, möge folgende Zusammenstellung von Messungen der Kante an einem Quarzkrystalle, welche Kupffer[1] angestellt hat, dienen.

spiegelnde Fläche s p so einfällt, dafs er mit ihr einen Neigungswinkel l c s = a + b macht, so ist der Winkel l c v, den die Verlängerung c v des zurückgeworfenen Strahles c o mit dem eingefallenen Lichtstrahle l c bildet, = 2a + 2b. Tritt an die Stelle des Spiegels s p ein anderer s′p′, der nicht ganz mit der Lage, die jener vorher einnahm, zusammenfällt, sondern blofs einen Winkel = b mit dem einfallenden Lichtstrahle l c bildet, so wird auch hier der Winkel l c v′ zwischen der Verlängerung c v′ des zurückgeworfenen Lichtstrahls c o′ und zwischen dem einfallenden Lichtstrahle c l = 2b seyn, folglich der Winkel l c v′ von dem Winkel l c v um 2a verschieden seyn. Stellt daher a den Fehler vor, den die 2te Krystallfläche macht, wenn sie nicht genau mit der Stelle zusammenfällt, welche vorher die erste einnahm, so ist einleuchtend, dafs dieser Fehler als verdoppelt sich zu erkennen geben wird. Setzt man daher 2a = 3 Minuten, so ist die Gröfse dieses Fehlers a = 1,5 Minuten, der, wie leicht einzusehen, nicht leicht statt finden kann. Dagegen kommt es weit mehr auf genaues Zusammenfallen der beiden Bilder an, dessen Beobachtung dadurch, dafs bei gröfserer Entfernung die Ränder des gespiegelten Bildes sich gleichsam verwischen, schwierig wird, indem bei vielen Krystallen ein noch ziemlich deutliches Bild z. B. von einer Fenstersprosse bei 6 — 8 Fufs Entfernung gesehen wird, das bei 12 — 16 Fufs Entfernung bereits ganz unsichtbar ist, indem die Stärke des Lichtes, also die Schärfe des Bildes, abnimmt im Verhältnifs des Quadrates der Entfernungen.

1 Vergleiche dessen gründliche Preisschrift: Ueber genaue Messung der Winkel von Krystallen.

Eigene Messungen, angestellt mit einem sehr guten Wollastonschen Winkelmesser, der von Apel und Lüders in Göttingen gefertigt ist[1] und einen Nonius hat, welcher nicht bloſs Verschiedenheiten von 3 zu 3 Minuten, sondern von 1 zu 1 Minute angiebt, weichen unter einander nur um höchstens 6 Minuten ab, so daſs Abweichungen vom Mittel aus vielen Messungen nur 3 Minuten betragen.

1) Messungen ohne Fernrohr:

Anzahl der Beobachtungen.	Mittlerer Werth.	Gröſster beobachteter Werth.	Kleinster beobachteter Werth.
32	46 15',4	46° 21'	46° 12'
78	46° 11',9	46° 16'	46° 5'
39	46° 13',7	46° 19'	46° 11'
39	46° 15',1	46° 22'	46° 11'
39	46° 15',0	46° 20'	46° 10'
39	46° 13',9	46° 22'	46° 5'
39	46° 17',0	46° 23'	46° 11'
39	46° 16',4	46° 20'	46° 12'
39	46° 17',0	46° 22'	46° 12'
39	46° 16',0	46° 23'	46° 11'

2) Messungen mit Fernrohr:

Anzahl der Beobachtungen.	Mittlerer Werth.	Gröſster beobachteter Werth.	Kleinster beobachteter Werth.
39	46° 16',0	46° 18'	46° 14'
39	46° 16',3	46° 19'	46° 12'
39	46° 17',3	46° 20'	46° 15'

Zu denen, die am frühesten genaue Messungen mittelst Reflexionen der Lichtstrahlen von Krystallen anstellten, gehört Malus. Er bediente sich des gewöhnlichen horizontalen Repetitionskreises.

Verdienste um Vorschläge zu Reflexionsgoniometern, die mehr oder weniger von dem Wollastonschen verschieden sind,

1 Der Künstler hat die Gradtheilung auf der ebenen Kreisfläche und nicht auf der Cylinderfläche angebracht, wodurch die Eintheilung schärfer und richtiger geworden ist, als sie sonst seyn würde.

haben sich erworben Muncke [1], Rudberg [2], Riese [3] und Andere.

Genaue Winkelmessungen an Krystallen in bedeutender Anzahl haben besonders geliefert: Malus, Wollaston, Brewster, Brooke, Phillips, Mohs, Breithaupt, Haidinger, Kupffer, Gustav Rose u. A.

Formenlehre.

Eine wissenschaftliche Kenntnifs von den Formen der Krystalle, die allen Anforderungen genügt, setzt voraus, dafs man mit den allgemeinen Principien vertraut sey, welche die Gestaltenlehre bei Untersuchungen der verschiedenen möglichen Gestalten überhaupt zu befolgen hat. Da diese Principien jedoch in Werken über reine Mathematik noch nicht so bestimmt ausgesprochen sind, indem die allgemeine Gestaltenlehre in der Ausdehnung, wie sie jetzt vorliegt, eine noch jugendliche Wissenschaft ist, so mufs sie hier erst entwickelt werden, um sodann die Anwendung derselben auf die Krystallgestalt folgen zu lassen.

Von den Flächen.

Jede Fläche, abgesehen von etwaiger Begrenzung derselben, theilt den unbegrenzten Raum in wenigstens zwei Stücke, ist also Grenze für jedes dieser Raumstücke.

Die Art und Weise, wie sie Grenze für *eins* von zwei durch sie getrennten Raumstücken ist, heifst ihre eine *Flächenseite* (*superficies plani*). Jede Fläche hat also (ohne Rücksicht auf ihre Begrenzung) zwei Flächenseiten. Bei einem Kugelflächenstück z. B. ist die eine Flächenseite hohl, die andere erhaben, bei der Ebene sind beide Flächenseiten von gleicher Beschaffenheit, d. h. eben [4].

1 Beschreibung eines Repetitions-Goniometers von G. W. Muncke in v. Leonhard's mineralogischem Taschenbuche. XIII. 438.

2 Kastner's Archiv X. 461.

3 Vorschläge zu einem neuen Goniometer, mit welchem man sowohl spiegelnde als matte Krystalle so genau, als es die Natur ihrer Oberfläche nur gestattet, messen kann u. s. w. von F. C. v. Riese. Bonn 1829.

4 Das Unterscheiden der beiden Flächenseiten einer Fläche ist

Jede Flächenseite einer ganz oder theilweise durch Linien begrenzten Fläche, gewöhnlich einer Ebene, heifse ein *Bild* (*figura*). Das Bild, welches die eine Flächenseite einer begrenzten *Ebene* darbietet, heifse in Beziehung zu dem, welches die andere Flächenseite zeigt, das *Gegenbild* von diesem und umgekehrt dieses das Gegenbild von jenem.

Wenn man von allen Winkelpuncten eines Bildes senkrechte Linien zieht nach einer in derselben Ebene liegenden geraden Linie, diese Senkrechten über die erwähnte Linie hinaus verlängert, jedesmal die Verlängerung gleich dem Verlängerten macht und die Endpuncte der Verlängerungen zweckmäfsig durch Linien verbindet, so entsteht ein neues Bild, das mit dem Gegenbilde des gegebenen übereinstimmt. Zwei Gegenbilder, die in einer solchen Stellung mit einander verbunden gedacht werden, heifsen *Nebengegenbilder*. Das Dreieck a'b'c' ist ein Nebengegenbild vom Dreiecke a b c und umgekehrt. Fig. 218.

Wenn von zwei Bildern a und b das eine a an die Stelle des andern b gesetzt werden kann, so dafs kein Unterschied vorhanden ist, so sagt man, das eine a sey das *Ebenbild* des andern b, sey dem andern *ebenbildlich gleich* oder congruent, verhalte sich zu dem andern ebenbildlich u. s. w. Das Zeichen für das Ebenbildlichseyn ist ≌, z. B. a ≌ b. Ist dagegen das eine Bild a gleich dem Gegenbilde des andern b, so sagt man, die beiden Bilder a und b verhalten sich *gegenbildlich*, seyen gegenbildlich gleich, seyen Gegenbilder; das Zeichen des Gegenbildlichseyns ist |=|, z. B. a |=| b oder das Dreieck a b c |=| a'b'c'. Es seyen a, b, c, d vier Bilder und a |=| b und b |=| c und c |=| d, so ist auch a |=| c und b |=| d und a |=| d und b |=| c. (Fig. 219. Fig. 220. Fig. 218.)

Wenn ein Bild durch eine gerade Linie so in zwei Theile zerlegt werden kann, dafs sich diese beiden Theile gegenbildlich zu einander verhalten, so müssen auch die Gegenbilder der beiden Hälften sich zu einander gegenbildlich verhalten. Ist nun auch die Verbindungsart der beiden Theile des Bildes so, dafs dieselben sich zu einander als Nebengegenbilder verhalten,

besonders wichtig in der Körperlehre, denn wenn man von der Oberfläche eines Körpers spricht, so versteht man darunter sehr oft nur die äufsere Flächenseite dieser Oberfläche, weil sie es ist, die den Sinnen bei der Betrachtung zunächst sich darbietet.

so wird dieses auch auf der andern Flächenseite des Gesammtbildes auf dieselbe Weise der Fall seyn und es ist dann das Gesammtbild seinem Gegenbilde ebenbildlich. Das Gesammtbild
Fig. 221. a e wird durch die Linie b d in 2 Hälften getheilt, die sich zu einander |=| verhalten. Die Gegenbilder beider Hälften verhalten sich gleichfalls zu einander |=|, aber die Verbindung beider Hälften ist nicht so, dafs x ein Nebengegenbild von y ist. Das
Fig. 222. Gesammtbild a b d dagegen wird durch die Linie b c in 2 Hälften getheilt, so dafs x das Nebengegenbild von y ist. Das Gegenbild von x, es heifse x′, mufs daher auch zu dem Gegenbilde von y, das durch y′ bezeichnet werden möge, sich als Nebengegenbild verhalten. Hier ist also:

$$x \mid=\mid y$$
$$y' \mid=\mid y$$

Ebenso

$$y \mid=\mid x$$
$$x' \mid=\mid x$$
$$\overline{}$$
$$y \; \underline{\backsimeq} \; x'$$

folglich x und y zusammengenommen $\underline{\backsimeq}$ mit y′ und x′ zusammengenommen.

Umgekehrt, wenn ein ebenes Bild seinem Gegenbilde ebenbildlich ist, so giebt es auch wenigstens eine gerade Linie, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, die sich wie Nebengegen-
Fig. 223. bilder verhalten. Es sey A B E irgend ein beliebiges Bild, das seinem Gegenbilde ebenbildlich seyn soll. Beschreibe ein Nebengegenbild desselben a b e, ziehe im gegebenen Bilde irgend eine gerade Linie und die dieser entsprechende Linie im Nebengegenbilde, lege das Nebengegenbild so auf das gegebene Bild, wie beide sich decken, so sind nun folgende Fälle möglich:

1) Die gezogene Hülfslinie im Gegenbilde fällt zusammen mit jener ihr entsprechenden im gegebenen Bilde, und zwar:

a) so, dafs die gleichnamigen Enden beider auf einander fallen, wie z. B. die Linie M N mit der Linie m n so zusammenfällt, dafs M und m, N und n sich decken[1]; es werden dann m...b...n und M...D...N, m...d...n und M...B...N sich decken. Es ist also:

1 Dieses ist für zwei Bilder blofs auf einerlei Weise möglich, während bei zwei Ebenen es auf zweifache Weise denkbar ist, nämlich einmal so, dafs das Bild A B E von dem Bilde a b e gedeckt wird, während es das anderemal von dem Gegenbilde von a b e gedeckt wird.

$$\begin{array}{lrcl} & m\ldots b\ldots n & \cong & M\ldots D\ldots N \\ \text{aber} & m\ldots b\ldots n & |{=}| & M\ldots B\ldots N \\ \hline & M\ldots D\ldots N & |{=}| & M\ldots B\ldots N. \end{array}$$

Zieht man eine beliebige, durch irgend einen Punct R in MN auf MN senkrechte Linie PQ, so wird die entsprechende Linie pq im Gegenbilde gleichfalls senkrecht auf mn seyn müssen, und da mr = MR und der Winkel mrq = MRP = 90°, so werden auch bei dem oben erwähnten Aufeinanderliegen beider Bilder die Puncte q und P, p und Q sich decken. Es ist also:

$$\begin{array}{lrcl} & q & \cong & P \\ \text{aber} & q & |{=}| & Q \\ \hline & P & |{=}| & Q \\ \text{und ebenso} & PR & |{=}| & QR. \end{array}$$

Da nun dasselbe gilt für jede mit PQ parallele Linie, so ist M...D...N das Nebengegenbild von M...B...N und MN die Linie selbst, welche die Theilung in zwei Nebengegenbilder bewirkt;

b) so, dafs die ungleichnamigen Enden beider auf einander liegen, wie z. B. die Linie PQ mit der Linie qp so zusammenfallen würde, dafs P und q, Q und p sich decken. Der Halbirungspunct R der Linie PQ ist dann der einzige Punct dieser Linie, welcher mit dem ihm *gleichnamigen* Puncte r in der gegenbildlichen Linie pq zusammenfällt[1]. Ziehe die MN durch den Punct R senkrecht auf PQ und im Nebengegenbilde durch r die mn senkrecht auf pq, so wird bei dem Sichdecken beider Figuren wegen des Zusammenfallens von PR mit qr und R mit r und wegen der rechten Winkel bei R und r die Linie mn mit MN zusammenfallen müssen, und zwar so, dafs der in qap liegende Punct m mit dem in PAQ liegenden Puncte M,

1 Dieses ist für *zwei Bilder* blofs auf einerlei Weise, nämlich so möglich, dafs q...a...p mit P...A...Q zusammenfällt u. s. w., denn der 2te Fall (welcher bei Vergleichung zweier *begrenzten Ebenen* möglich wäre), gemäfs welchem q...a...p und P...E...Q sich decken würden, fordert, dafs für eines der beiden genannten Flächenstücke q...a...p oder P...E...Q, z. B. für q...a...p, mithin für die ganze Fläche a...b...e, von welcher es einen Theil ausmacht, Umkehrung d. h. Vertauschung der beiden Flächenseiten statt fände, wodurch also das Gegenbild von a...b...e (mithin das Ebenbild von A...B...E) und nicht a...b...e selbst mit A...B...E verglichen werden würde.

so wird dieses auch auf der andern Flächenseite des Gesammtbildes auf dieselbe Weise der Fall seyn und es ist dann das Gesammtbild seinem Gegenbilde ebenbildlich. Das Gesammtbild
Fig. 221. a e wird durch die Linie b d in 2 Hälften getheilt, die sich zu einander $|=|$ verhalten. Die Gegenbilder beider Hälften verhalten sich gleichfalls zu einander $|=|$, aber die Verbindung beider Hälften ist nicht so, dafs x ein Nebengegenbild von y ist. Das
Fig. 222. Gesammtbild a b d dagegen wird durch die Linie b c in 2 Hälften getheilt, so dafs x das Nebengegenbild von y ist. Das Gegenbild von x, es heifse x′, mufs daher auch zu dem Gegenbilde von y, das durch y′ bezeichnet werden möge, sich als Nebengegenbild verhalten. Hier ist also:

$$x \;|=|\; y$$
$$y' \;|=|\; y$$
Ebenso
$$y \;|=|\; x$$
$$x' \;|=|\; x$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$y \;≌\; x'$$

folglich x und y zusammengenommen ≌ mit y′ und x′ zusammengenommen.

Umgekehrt, wenn ein ebenes Bild seinem Gegenbilde ebenbildlich ist, so giebt es auch wenigstens eine gerade Linie, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, die sich wie Nebengegen-
Fig. 223. bilder verhalten. Es sey A B E irgend ein beliebiges Bild, das seinem Gegenbilde ebenbildlich seyn soll. Beschreibe ein Nebengegenbild desselben a b e, ziehe im gegebenen Bilde irgend eine gerade Linie und die dieser entsprechende Linie im Nebengegenbilde, lege das Nebengegenbild so auf das gegebene Bild, wie beide sich decken, so sind nun folgende Fälle möglich:

1) Die gezogene Hülfslinie im Gegenbilde fällt zusammen mit jener ihr entsprechenden im gegebenen Bilde, und zwar:

a) so, dafs die gleichnamigen Enden beider auf einander fallen, wie z. B. die Linie M N mit der Linie m n so zusammenfällt, dafs M und m, N und n sich decken[1]; es werden dann m...b...n und M...D...N, m...d...n und M...B...N sich decken. Es ist also:

1 Dieses ist für zwei Bilder blofs auf einerlei Weise möglich, während bei zwei Ebenen es auf zweifache Weise denkbar ist, nämlich einmal so, dafs das Bild A B E von dem Bilde a b e gedeckt wird, während es das anderemal von dem Gegenbilde von a b e gedeckt wird.

$$m\ldots b\ldots n \cong M\ldots D\ldots N$$

aber $$\frac{m\ldots b\ldots n \mid=\mid M\ldots B\ldots N}{M\ldots D\ldots N \mid=\mid M\ldots B\ldots N.}$$

Zieht man eine beliebige, durch irgend einen Punct R in MN auf MN senkrechte Linie PQ, so wird die entsprechende Linie pq im Gegenbilde gleichfalls senkrecht auf mn seyn müssen, und da mr = MR und der Winkel mrq = MRP = 90°, so werden auch bei dem oben erwähnten Aufeinanderliegen beider Bilder die Puncte q und P, p und Q sich decken. Es ist also:

$$q \cong P$$

aber $$\frac{q \mid=\mid Q}{P \mid=\mid Q}$$

und ebenso $$PR \mid=\mid QR.$$

Da nun dasselbe gilt für jede mit PQ parallele Linie, so ist M...D...N das Nebengegenbild von M...B...N und MN die Linie selbst, welche die Theilung in zwei Nebengegenbilder bewirkt;

b) so, daſs die ungleichnamigen Enden beider auf einander liegen, wie z. B. die Linie PQ mit der Linie qp so zusammenfallen würde, daſs P und q, Q und p sich decken. Der Halbirungspunct R der Linie PQ ist dann der einzige Punct dieser Linie, welcher mit dem ihm *gleichnamigen* Puncte r in der gegenbildlichen Linie pq zusammenfällt[1]. Ziehe die MN durch den Punct R senkrecht auf PQ und im Nebengegenbilde durch r die mn senkrecht auf pq, so wird bei dem Sichdecken beider Figuren wegen des Zusammenfallens von PR mit qr und R mit r und wegen der rechten Winkel bei R und r die Linie mn mit MN zusammenfallen müssen, und zwar so, daſs der in qap liegende Punct m mit dem in PAQ liegenden Puncte M,

1 Dieses ist für *zwei Bilder* bloſs auf einerlei Weise, nämlich so möglich, daſs q...a...p mit P...A...Q zusammenfällt u. s. w., denn der 2te Fall (welcher bei Vergleichung zweier *begrenzten Ebenen* möglich wäre), gemäſs welchem q...a...p und P...E...Q sich decken würden, fordert, daſs für eines der beiden genannten Flächenstücke q...a...p oder P...E...Q, z. B. für q...a...p, mithin für die ganze Fläche a...b...e, von welcher es einen Theil ausmacht, Umkehrung d. h. Vertauschung der beiden Flächenseiten statt fände, wodurch also das Gegenbild von a...b...e (mithin das Ebenbild von A...B...E) und nicht a...b...e selbst mit A...B...E verglichen werden würde.

mithin n mit N zusammenfällt, folglich, gemäfs dem Falle a), die Linie MN eine solche ist, die das Bild ABE in zwei nebengegenbildliche Hälften theilt.

2) Die gezogene Hülfslinie im Gegenbilde fällt nicht zusammen mit der ihr entsprechenden Linie im gegebenen Bilde, sondern

a) sie schneidet sie so, dafs also in jedem der beiden Bilder zwei derartige Linien vorhanden angenommen werden können, die vier Winkel um einen Scheitel bilden. TV sey eine solche Fig. 224. Linie und T′V′ die andere, welche mit der nebengegenbildlichen Linie jener, nämlich mit tv zusammenfällt, wenn beide Bilder sich decken. Die entstehenden Durchschnittspuncte R und r decken sich, wenn beide Bilder auf einander liegen, und es ist

$$\begin{array}{rc} & tr \backsimeq T'R \\ \text{aber} & tr \mid=\mid TR \\ \hline & T'R \mid=\mid TR. \end{array}$$

Halbirt man den Winkel TRT′ durch eine Linie RN oder MN, so ist MN eine solche Linie, die $\backsimeq$ ihrer gegenbildlichen Linie mn ist (weil es für einen bestimmten Winkel nur eine einzige Linie giebt, die ihn halbirt), auch mufs der Punct N, welcher innerhalb der Schenkel des Winkels TRT′ liegt, bei dem Aufeinanderliegen beider Figuren zusammenfallen mit dem Puncte n, welcher im Nebengegenbilde dieselbe Bedeutung hat. Die Linie MN hat mithin die Eigenschaft wie im Falle a), bewirkt also auch die fragliche Theilung der Figur AB′E in zwei Nebengegenbilder; oder

b) sie ist ihr parallel. Es ist dieses der Fall a), wenn man den Winkel TRT′ immer kleiner werdend denkt, so dafs zuletzt beim Parallelseyn von TV mit T′V er = o wird. Eine zwischen diesen beiden parallelen Linien in gleichem Abstande von beiden und mit ihnen parallel hinlaufende Linie ist dann diejenige, welche die Theilung des Bildes in zwei nebengegenbildliche Hälften bewirkt.

Jedes Bild ist nun entweder seinem Gegenbilde ebenbild- Fig. 225. *lich oder nicht.* Wenn ein Bild a einem andern b ebenbildlich und auch dem Gegenbilde von b ebenbildlich ist, so ist es dem b *ebenbildlich und gegenbildlich zugleich*, ist das *ebenbildliche Gegenbild* von b. Dieses setzt voraus, dafs jedes der beiden Bilder a und b seinem Gegenbilde ebenbildlich d. h. congruent

sey. Zeichen für das Ebenbildlichgegenbildlichseyn $|\stackrel{\frown}{=}|$, z. B. a $|\stackrel{\frown}{=}|$ b.

Für 2 einander gleiche Bilder oder Theile von Bildern giebt es demnach folgende Arten des Gleichseyns oder Gleichwerthigseyns hinsichtlich auf Form:

1) die beiden Bilder sind einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich, z. B. a $|\stackrel{\frown}{=}|$ b,

2) nicht, dann sind sie einander entweder

A. blofs ebenbildlich, z. B. a $\stackrel{\frown}{=}$ b, oder Fig. 219.

B. blofs gegenbildlich; so ist a $|=|$ b und das Dreieck 220.
abc $|=|$ dem Dreiecke a'b'c'. 218.

Nähere Untersuchungen der Eigenschaften einer Fläche müssen nun auch zur Vergleichung der Theile derselben unter einander führen, wobei zu achten ist auf die Menge von Theilen, die als gleichwerthige sich erkennen lassen, und auf die Art dieser Gleichwerthigkeit. Theile einer ebenen Figur können aber einander gleichwerthig seyn in Beziehung auf ihr Verhalten zu irgend einem gegebenen Puncte innerhalb der Fläche, oder abgesehen hiervon d. h. als Theile der Figur an sich. Denkt man sich irgend eine gegebene Figur und einen in ihr gegebenen bestimmten Punct c und errichtet aus ihm eine Linie senkrecht zur ebenen Figur, ohne sie über den Punct c hinaus zu verlängern, so dafs sie also blofs auf der einen Flächenseite der Ebene aufsteht, und nennt diese Linie die Normale für den Punct c, so kann man sich auch noch eine 2te solche Figur denken, die nebst der dazu gehörigen Normale so beschaffen ist, dafs, wenn beide Normalen und beide Ebenen zusammenfallen, auch eine Stellung, welche dieser Bedingung entspricht, für die 2te Figur möglich ist, in welcher sie die gegebene deckt. Diese 2te Figur mit ihrer Normale kann gebraucht werden, um mittelst ihrer die Theile der gegebenen Figur in Beziehung auf das Gleichartige ihres Herumliegens um den gegebenen Punct zu untersuchen, und heifst darum *Vergleichungsfigur* der gegebenen. Die Vergleichung geschieht dadurch, dafs man die mit der Vergleichungsfigur sich deckende gegebene Figur um die gemeinschaftliche ruhig bleibende Normale so dreht, wie ein Rad um seine Axe, während die Vergleichungsfigur ihre Stellung unverändert behält, d. h. unbewegt bleibt. Es wird dann während der ganzen Umdrehung die Ebene, in welcher die gegebene Figur liegt, stets zusammenfallend bleiben mit der Ebene,

in welcher die Vergleichungsfigur liegt. Man achtet dann auf die Anzahl der unter den angeführten Bedingungen möglichen Stellungen der gegebenen Figur, *in denen sie die ruhig bleibende Vergleichungsfigur deckt* (mit der Vergleichungsfigur sich in identischer oder ebenbildlicher Stellung befindet), wobei die nach jeder *ganzen* Umdrehung eintretende Stellung, als mit der ursprünglichen Stellung vollkommen übereinstimmend, nicht als eine besondere Stellung betrachtet wird, so daſs beide nur für *eine* Stellung gezählt werden. Das hierdurch erhaltene Resultat heiſst dann, allgemein ausgedrückt: *jedes gegebene Bild habe, in Beziehung zu der gegebenen Normale, p identische Stellungen einer bestimmten Art,* wo p eine ganze Zahl bedeutet. Da die ursprüngliche an sich willkürlich ist, so ist bei einem derartigen Bilde, in Beziehung auf die bestimmte Normale, die Anzahl identischer Stellungen von jeder Art = p. Man sagt auch, das Bild habe, in Beziehung auf die Normale, p identische Stellungen jeder Art. So hat z. B. ein Bild des gleichseitigen Dreiecks in Beziehung auf die in seinem Mittelpuncte aufstehende Normale 3, ein solches des Rhomboids, in Beziehung auf die in seinem Mittelpuncte aufstehende Normale, 2 ebenbildliche Stellungen jeder Art.

Wenn zwei Puncte oder Theile A und B eines ebenen Bildes hinsichtlich auf ihr Verhalten zu einem in diesem Bilde liegenden gegebenen Puncte C und zum Bilde selbst, in welchem sie liegen, so mit einander übereinstimmen, daſs der eine A in einer Stellung des Bildes, welche durch Umdrehung um die Normale des Punctes C erhalten wurde, an dem Orte sich befindet, den in der ursprünglichen Stellung der Punct oder Theil B einnahm, während zugleich diese neue Stellung des Bildes eine der ursprünglich gegebenen *ebenbildliche* Stellung ist, so sagt man, die beiden Puncte oder Theile A und B seyen *einander ebenbildlich hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem Puncte* C, seyen durch Umdrehung des Bildes um den Punct C mit einander vertauschbar.

Jede ebene Figur hat unendlich viele Normalen, in Beziehung zu welchen es für sie zu jeder bestimmten Stellung keine andere ebenbildliche giebt. Wenn eine ebene Figur eine Normale hat, in Beziehung zu welcher sie 2 oder mehrere ebenbildliche Stellungen jeder Art gestattet, so hat sie keine andere Normale auſser dieser, in Beziehung zu welcher sie gleichfalls

zwei oder mehrere ebenbildliche Stellungen gestattet. Die Figur hat dann einen *einzigen bestimmten Mittelpunct*, und die Normale, welche in diesem Mittelpuncte aufsteht, ist die einzige, in Beziehung auf welche dem Bilde zwei oder mehr ebenbildliche Stellungen jeder Art eigen sind.

Wenn 2 Puncte oder Theile A und B eines ebenen Bildes einander ebenbildlich sind, hinsichtlich auf ihr Verhalten zu irgend einem Puncte C in diesem Bilde, der nicht Mittelpunct der Figur ist, so sind sie auch einander ebenbildlich hinsichtlich auf ihr Verhalten zum Mittelpuncte, d. h. sie sind als Theile der Figur selbst einander ebenbildlich. Von einem Bilde, welches, in Beziehung zu der in seinem Mittelpuncte aufstehenden Normale, p ebenbildliche Stellungen jeder Art hat, sagt man, es entspreche einem *pgliedrigen ebenen Strahlensysteme*, sey eine *pgliedrige ebene Figur*, ein pgliedriges ebenes Bild; denn die Anzahl der in einem solchen Bilde denkbaren ebenbildlichen, vom Mittelpuncte ausgehenden Strahlen jeder Art ist = p. So ist in den Abbildungen jede der Figuren a, b, c und a, b, c, d, e eine 2gliedrige ebene Figur (*figura binoradiata*); jede der Figuren a, b, e und a, b, c eine 3gliedrige (*figura ternoradiata*); jede von den Figuren a und b und a, b, c eine 4gliedrige (*figura quaternoradiata*) u. s. w. Für p = 1 entsteht die 1gliedrige ebene Figur (*figura singuloradiata*), hierher gehören z. B. die Figuren a, b, c, d und a, b, c, d u. s. w.

Fig. 227. 230. 231. 229. 230. 226. 235.

Ein pgliedriges Bild hat sonach p ebenbildliche Theile jeder Art.

Eine 2te Art der Vergleichung der Theile eines ebenen Bildes hinsichtlich ihres Verhaltens zu einem in diesem Bilde gegebenen Puncte hat den Zweck zu untersuchen, ob nicht Theile vorhanden sind, die in der genannten Beziehung sich zu den der Vergleichung unterworfenen Theilen gegenbildlich verhalten. Sie geschieht dadurch, dafs man als Hülfsfigur oder Vergleichungsfigur das Gegenbild der gegebenen Figur sich denkt mit der entsprechenden Normale und dafs man sodann diese Hülfsfigur nebst ihrer Normale so stellt, dafs die Normale der gegebenen Figur mit der Normale der Hülfsfigur zusammenfällt und zu gleicher Zeit die Ebene, in welcher die gegebene Figur liegt, mit der, in welcher die Hülfsfigur liegt, zusammenfällt, und sodann, wenn es nöthig ist, durch Drehung der gegebenen Figur um die gemeinschaftliche Normale erforscht, ob unter den

nunmehr statt findenden Bedingungen eine Stellung der gegebenen Figur möglich ist, in welcher sie mit dieser unbeweglich gebliebenen Hülfsfigur ebenbildlich erscheint. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn das gegebene Bild seinem Gegenbilde ≌ ist.

Wenn von 2 Theilen A und B einer gegebenen Figur der eine A bei dieser Vergleichungsart zusammenfällt mit dem Theile B′ der Vergleichungsfigur, welcher zu dem Theile B der gegebenen Figur sich gegenbildlich verhält, so müssen auch A und B in der gegebenen Figur einander gegenbildlich seyn hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem Puncte, in welchem die gegebene Normale aufsteht.

Wenn 2 Puncte oder Theile A und B eines ebenen Bildes einander gegenbildlich sind in Beziehung auf ihr Verhalten zu einem in diesem Bilde liegenden gegebenen Puncte C, so müssen sie auch einander gegenbildlich seyn in Beziehung auf ihr Verhalten zum Mittelpuncte der Figur, d. h. als Theile der Figur
Fig. 231. selbst einander gegenbildlich seyn. Die Theile q o r, u o p, s o t des Bildes c sind ≌. Jeder aber verhält sich |=| zu jedem der Theile s o r, u o t und q o p, die unter sich wieder ≌ sind. Da es nun einleuchtend ist, dafs von jeder pgliedrigen Figur auch das Gegenbild eine pgliedrige Figur seyn mufs, so ist auch ersichtlich, dafs eine Figur, welche nebst der Normale eines bestimmten Punctes c derselben ihrem Gegenbilde hinsichtlich auf ihr Verhalten zu der Normale desselben Punctes c′ ≌ ist, angesehen werden könne, als seyen in ihr gleichsam 2 einzelne pgliedrige Strahlensysteme vereinigt, von denen das eine sich zum andern gegenbildlich verhält, und dafs man daher eine solche Figur eine 2fach pgliedrige nennen könne. So ist z. B. jedes
Fig. 230. der Bilder a, b, c, d, e ein 2fach 2gliedriges (*figura dupliciter*
231. *binoradiata*); jede der Figuren a, b, c eine 2fach 3gliedrige
232. (*figura dupliciter ternoradiata*); jede der Figuren a, b, c ist eine 2fach 4gliedrige (*figura dupliciter quaternoradiata*). Die
227. Bilder aber, welche durch a, b, c dargestellt sind, sind 1fach
229. 2gliedrige (*figura simpliciter binoradiata*); die Bilder b und c aber sind 1fach 3gliedrige (*figura simpliciter ternoradiata*) und so weiter.

Auch bei der 2fach pgliedrigen Figur ist für p = 2 oder gröfser der Punct c, in welchem die berücksichtigte Normale aufsteht, der Mittelpunct derselben. In jeder 2fach 3gliedrigen
Fig. 231. Figur z. B., wie a oder c, sind vom Mittelpuncte ausgehend

möglich: 3 Strahlen op, or und ot von einerlei Art, die sich (in Beziehung auf die Art ihrer Lage in der Gesammtfigur) |≌| verhalten, und 3 andere Strahlen oq, ou und os einer 2ten Art, die ebenfalls einander |≌| zugleich sind. Jeder Strahl, der zwischen op und oq liegt, ist ≌ mit einem solchen zwischen or und os und einem 3ten zwischen ot und ou, aber |=| mit einem ihm sonst gleichwerthigen zwischen or und oq, so wie einem solchen zwischen ot und os und wieder zwischen op und ou.

Nennt man die ebenbildlich und gegenbildlich zugleich sich verhaltenden Strahlen 2seitige oder doppelte Strahlen (*radii duplices*), während man die übrigen bloſs einfache Strahlen (*radii simplices*) nennt, so kann man sagen: in jeder 2fach pgliedrigen ebenen Figur können gedacht werden p doppelte Strahlen einer ersten und p doppelte Strahlen einer zweiten Art, während die Anzahl von einfachen Strahlen jeder Art = 2p ist, wovon jedoch die p einen unter sich ebenbildlichen zu den p andern unter sich ebenbildlichen sich gegenbildlich verhalten. Es werden hier sonach 2 Strahlen (Puncte, Theile u. s. w.) einer ebenen Figur als gleichwerthig betrachtet, sowohl wenn sie bloſs gegenbildlich sind, als auch, wenn sie bloſs ebenbildlich sind. Jede 2fach pgliedrige Figur kann als eine pgliedrige betrachtet werden, nicht aber jede pgliedrige Figur ist eine 2fach pgliedrige. Die pgliedrigen Bilder sind demnach entweder

a) *2fach pgliedrig*, wenn ein solches Bild mit seinem Gegenbilde vertauscht d. h. in identische Stellung gebracht werden kann, oder

b) *1fach pgliedrig*, wenn Vertauschung eines pgliedrigen Bildes in diesem Sinne nicht möglich ist.

Werden die p einen 2seitige Strahlen der ersten Art genannt, so heiſsen die p andern 2seitige Strahlen der 2ten Art. Jeder andere Strahl heiſst ein *einundeinseitiger* oder *einfacher* (*radius simplex*). Die Anzahl einfacher Strahlen jeder Art ist 2p, indem die p einen unter sich für einerlei Flächenseite identischen nicht zusammenfallen mit den p andern sich zu ihnen wie rechts und links verhaltenden[1], die unter sich wieder für einerlei Flächenseite identisch sind.

1 Die Figur 233a stellt ein 2fach 3gliedriges, die Figur 233b ein 2fach 4gliedriges Strahlensystem dar, ohne Verbindung mit einer bestimmten ebenen Figur. Die doppelten Strahlen der einen, z. B.

Es werden hier sonach sowohl 2 Strahlen (Puncte, Theile u. s. w.) einer ebenen Figur, die für einerlei Flächenseite links und rechts sich verhalten, als auch solche, die identisch sind, als *gleichwerthig* betrachtet, wenn man eine 2fach pgliedrige Figur als eine 2fach pgliedrige ansieht, während blofs Theile, die für einerlei Flächenseite identisch sind, als *gleichwerthig* betrachtet werden, wenn man sagt, die 2fach pgliedrige Figur sey eine pgliedrige.

Die Anzahl der denkbaren Arten von einfachen Strahlen in einer 2fach pgliedrigen ebenen Figur ist unendlich, was hier so viel sagen will als gleich der Menge von Strahlen, die innerhalb der Schenkel eines Winkels von $\frac{360}{2 \cdot p}$ Graden vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgezählt, während bei der pgliedrigen ebenen Figur die Anzahl der denkbaren Arten von Strahlen gleich der Menge von Strahlen ist, die innerhalb der Schenkel eines Winkels von $\frac{360}{p}$ Graden vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, den einen der Schenkel selbst mitgezählt, indem dort alle Strahlen einfache sind.

Was von den 2fach pgliedrigen Figuren im Allgemeinen für ihren bestimmten Mittelpunct gilt, das gilt bei dem Werthe von $p = 1$ von den 2fach 1gliedrigen Figuren für *jeden* Punct in der *einen* Linie, durch welche sie in zwei sich ebenbildlich verhaltende Hälften getheilt werden können. Der *Gleichwerthsmittelpunct* einer 2fach 1gliedrigen Figur ist daher blofs in einer bestimmten Linie willkürlich annehmbar, während der der 1fach 1gliedrigen ebenen Figur in der ganzen Erstreckung der Ebene, in der sie liegt, willkürlich angenommen werden kann.
Fig. 235. Die Figuren a, b, c, d etc. sind 2fach 1gliedrige Figuren (*figu-*
226. *rae dupliciter singuloradiatae*), während die Figuren a, b, c, d... 1fach 1gliedrige Figuren (*figurae simpliciter singuloradiatae*) sind.

ersten Art sind mit α, die der zweiten Art mit β bezeichnet, von den einfachen sind nur eine oder ein Paar Arten γ und δ angegeben. Die zur Vergleichung dabei gezeichneten einfach pgliedrigen Strahlensysteme, das 1fach 3gliedrige Strahlensystem Fig. 234 a und das 1fach 4gliedrige Strahlensystem Fig. 234 b enthalten blofs einfache Strahlen, von denen nur ein Paar Arten angegeben sind.

Es wäre durch das Vorhergehende dargethan:

1) dafs jede gegebene oder denkbare Figur überhaupt eine pgliedrige Figur seyn müsse, wenn p eine der ganzen Zahlen 1, 2, 3 ∞ bedeutet;

2) dafs jede pgliedrige Figur entweder eine 2fach pgliedrige oder blofs eine 1fach pgliedrige seyn könne; auch ist

3) ersichtlich, dafs Figuren von gleich grofser Anzahl der Seiten sehr verschiedenen Strahlensystemen entsprechen, dafs aber die Menge ebenbildlicher Seiten = p und dafs höchstens die Menge gleichwerthiger Seiten = 2p sey, in welchem Falle dann die p einen unter sich ebenbildlichen zu den p andern unter sich ebenbildlichen sich gegenbildlich verhalten rücksichtlich aller der Eigenschaften, die ihnen als Seiten der Gesammtfigur zugeschrieben werden können.

Um die nähere Beschaffenheit einer untersuchten Figur bezeichnen zu können, setze man fest, dafs, wenn man von einer Menge von 6 Dingen z. B. andeuten will, dafs die 3 einen unter sich und wieder die 3 andern unter sich mehr zusammengehörig sind, als eines von den ersten drei mit einem von den 2ten drei, während man doch die sämmtlichen 6 Dinge unter einem gemeinschaftlichen Namen vereinigen will, man sagt, es seyen 2 × 3 *Dinge* (zu lesen zwei mal drei Dinge), während, wenn alle 6 Dinge auf gleiche Weise zusammengehören, man den Ausdruck 6 *Dinge* unmittelbar gebraucht. Gleiches gelte von den beiden allgemeinen Ausdrücken q × r und qr, wovon der erstere q × r dem 2 × 3, der andere qr dem 6 entspricht; ebenso 2 × p und 2p (zu lesen *zweimal* p der eine, *zwei* p der andere). Man wird dann auch eine Menge von Dingen, die aus drei Sechsheiten und aus zwei Dreiheiten[1] besteht, bezeichnen durch den Ausdruck 3 × 6 *und* 2 × 3 *Dinge* u. s. w., allgemein n × t und r × p Dinge.

Es sey ferner t = 2p, so dafs p irgend eine ganze Zahl bedeutet, n sey irgend eine beliebige ganze Zahl, so schreiten bei den 1fach pgliedrigen Figuren die Ausdrücke für die Anzahl sämmtlicher Seiten fort nach dem Gesetze 1p, 2p, 3p np. Es giebt daher 1fach 1gliedrige Figuren, welche 3 × 1seitig sind, wie a, oder 4 × 1seitig, wie b, 5 × 1seitig, wie c, Fig. 226.

1 Statt Binion, Ternion u. s. w. mögen die Ausdrücke Zweiheit, Dreiheit u. s. w. ähnlich Einheit, Vielheit gebraucht werden.

Fig. 227. 6 × 1seitig wie d u. s. w.; 1fach 2gliedrige Figuren, welche
228. 2 × 2seitig wie a, 3 × 2seitig wie c u. s. w. Die 1fach 3glie-
drigen Figuren a, b, c sind 1 × 3seitig die erste, 2 × 3seitig
229. die 2te und 3 × 3seitig die 3te. Die 1fach 4gliedrigen Figuren
sind 4seitige wie a, 2 × 4seitige wie b, 3 × 4seitige u. s. w.
Bei den 2fach pgliedrigen Figuren schreitet der Ausdruck für die
Gesammtseiten-Anzahl fort nach dem Gesetze p, 2p, t, t und p,
Fig. t und 2p, 2t..... nt, nt und 1p, nt und 2p......... So ist
230. a eine 2 × 2seitige, b eine 4seitige, c eine 4 und 2seitige, d
eine 4 und 2 × 2seitige, e eine 2 × 4seitige...... 2fach 2glie-
231. drige Figur, ferner a eine 3seitige, b eine 2 × 3seitige, c eine
232. 6seitige.... 2fach 3gliedrige Figur, und wieder a eine 4seitige,
b eine 2 × 4seitige, c eine 8seitige.... 2fach 4gliedrige Figur.

Es sey hier zu gleicher Zeit erlaubt, einige zweckmäfsige
Benennungen einzuführen zur Bezeichnung von Figuren, welche
Fig. für den vorliegenden Zweck vorzüglich wichtig sind. Die Aus-
226. drücke Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. (*trigonoides, tetragonoides, pentagonoides*) mögen sowohl ein Dreieck, Viereck u. s. w. bezeichnen, von dem man im Namen keine *besondere Regelmäfsigkeit ausdrücken will*, als auch ein 1fach 1gliedriges 3 × 1 seit, 4 × 1 seit u. s. w., dem *keine höhere Regelmäfsigkeit zusteht*. Von den ihrer Form nach 2fach 1gliedrigen
Fig.
235. heifse die 2 und 1seitige oder das gleichschenklige Dreieck a *Keilfläche* oder *Keil* (*sphenoides* oder *isoscéloides*); die 2 × 2seitige c heifse *Lanzenfläche* oder *Lanze* (*Doroides*); von den schwalbenschwanzartigen 2fach 1gliedrigen 4 Ecken b und 5 Ecken d mögen die letzteren mit dem Ausdrucke *Sterzenflächen* oder Sterzen[1] (*Uroides*) belegt werden, während die ersteren als Spreizflächen oder Spreizen nicht unpassend benannt werden dürften.

1 Der Ausdruck Sterze bezieht sich vorzüglich auf solche Schwänze von Vögeln, bei denen ein Hervortreten dieses Körpertheils in jener geraden Richtung statt hat, durch welche derselbe auf ähnliche Weise in 2 nebengegenbildliche Hälften zertheilt ist, wie 2fach 1gliedrige Figuren überhaupt zertheilt werden können. Die Aehnlichkeit von Figur 235 d, β mit den Schwalbensterzen und den Pflugsterzen bedarf wohl kaum noch hervorgehoben zu werden. Da die 2fach pgliedrige tseitige Figur 231 c, so lange sie ringsum begrenzt ist, stets zusammengesetzt gedacht werden kann aus p einzelnen Lanzenflächen rqos, puoq, tson, so hiefse eine solche Figur ein *Lanzenpling*, z. B.

Von den Axen eines Körpers und von der Gleichwerthigkeit der Theile des Körpers, in Beziehung auf ihre Verbindung mit einer Axe sowohl als auch im Allgemeinen.

Wenn man sich einen gegebenen Körper in einer bestimmten gegebenen Stellung im Raume und einen aufserhalb des Körpers gegebenen Punct (*Anfangspunct*) denkt, dessen Entfernung von jedem Puncte des Körpers unveränderlich ist, so kann man von diesem Puncte aus gerade Linien nach jedem Eckpuncte des Körpers ziehen und über den Anfangspunct hinaus rückwärts verlängern und die Verlängerung gleich machen der Linie, welche verlängert wurde. Die sonach diesseit und jenseit des Anfangspunctes in gleichem Abstande befindlichen Endpuncte einer und derselben solchen Linie nenne man Gegenpuncte. Durch die Gegenpuncte der Winkelpuncte einer jeden Begrenzungsebene lege man eine Ebene; sie ist die *Gegenfläche* der *ihr entsprechenden* Begrenzungsfläche des gegebenen Körpers. Der von der Gesammtheit der Gegenflächen der Begrenzungsflächen eines gegebenen Körpers eingeschlossene Raum heifst der *Gegenkörper* des gegebenen Körpers. Umgekehrt ist dieser der Gegenkörper von jenem. Alle Gegenkörper, die für einen und denselben gegebenen Körper entstehen, je nachdem man von einem andern Anfangspuncte ausgeht, sind unter sich, wenn sie in einerlei Stellung gebracht werden, congruent. Die äufsere Flächenseite jeder einzelnen Begrenzungsebene eines

Lanzen-Drilling, Lanzen-Vierling (*ditrigonum, ditetragonum*) u. s. w. Die dem Lanzen-Zwilling entsprechende Figur ist die Raute, bei welcher jede der beiden Lanzen zu einem Keile geworden ist. Die von p ebenbildlichen Seiten begrenzte Figur, sie sey eine 1fach pgliedrige oder eine 2fach pgliedrige, heifse ein *pseit*, so also 3seit, 4seit, 5seit (*trigonum, tetragonum, pentagonum*) u. s. w., statt gleichseitiges, gleichwinkliges 3eck, 4eck, 5eck u. s. w. Das 2fach pgliedrige pseit kann sonach betrachtet werden als ein Lanzen-p-ling, in welchem das Verhältnifs zwischen der Länge eines doppelten Querstrahls der ersten Art und eines solchen der 2ten Art $= \text{Cos.}\left(\frac{360^\circ}{2p}\right) : 1$, oder umgekehrt $= 1 : \text{Cos.}\,\frac{360^\circ}{2p}$.

Körpers ist congruent der innern Flächenseite der ihr entsprechenden Begrenzungsebene seines Gegenkörpers, d. h. die äufseren Flächenseiten von einander entsprechenden Flächen zweier Gegenkörper verhalten sich |=|[1]. Zwei sich wie Gegenkörper zu einander verhaltende Körper stimmen aufserdem überein rücksichtlich auf Gröfse der sich entsprechenden Kanten und Winkel, so wie in Hinsicht auf Gröfse des umschlossenen Raumes. Die Gegenecken zweier Gegenkörper verhalten sich wie zwei Ecken, von denen die eine bei Verlängerung der Ebenen und Kanten der anderen über den Scheitel hinaus, als die von den Scheitelwinkeln dieser gebildete, entsteht.

Wenn ein Körper auf einer Ebene stehend gedacht wird in bestimmter Stellung und man fällt von allen seinen Eckpuncten senkrechte Linien auf diese Ebene und vereinigt die hierdurch in dieser Ebene bestimmten Puncte so mit einander, dafs für jede Kante des Körpers eine ihr entsprechende Linie in der horizontalen Ebene entsteht, so hat man eine horizontale Projection des Körpers für die bestimmte Stellung. Verlängert man die aus den Ecken des Körpers auf die horizontale Ebene gefällten Perpendikel, so dafs jede Verlängerung gleich lang gemacht wird mit der verlängerten Linie, so entstehen unterhalb der horizontalen Ebene Puncte, die als Eckpuncte eines neuen Körpers betrachtet werden können, an welchem jede Begrenzungsfigur das Gegenbild ist von der Figur, welcher sie im gegebenen Körper entspricht, so dafs mithin dieser 2te Körper ein Gegenkörper des ersten ist. Man sieht daraus, dafs das hier betrachtete Bild der horizontalen Projection des 2ten Körpers das Gegenbild ist von der Horizontalprojection des 1sten Körpers und dafs man daher auch sagen kann, Gegenkörper oder gegenbildliche Körper seyen solche, die so beschaffen sind, dafs die Bilder der einander entsprechenden Horizontalprojectionen beider sich als Gegenbilder verhalten. Zwei gegenbildlich sich verhaltende Körper, die in solcher Stellung mit einander verbunden gedacht werden, wie die hier betrachtete ist, heifsen *auf einerlei Horizontalprojection*

1 Könnte man die Gesammtoberfläche eines gegebenen Körpers umstülpen (wie man einen linken Handschuh umstülpt, um ihn rechts zu machen), so würde dieselbe nach dieser Veränderung einen Raum umschliefsen, der dem des Gegenkörpers des gegebenen, wenn er mit ihm in einerlei Stellung gebracht wäre, jedenfalls congruent seyn würde.

stehende, oder *gleichstellige*, *gegenbildliche Körper*; ein Ausdruck, welcher für Körper das ist, was der Ausdruck nebengegenbildlich für ebene Figuren.

Wenn ein Körper und ein Anfangspunct und eine durch diesen Anfangspunct gehende Linie so gegeben sind, daſs die Lage des Punctes und der Linie in Beziehung zum Körper bekannt und unveränderlich ist und man die Beschaffenheit des Körpers kennt, so kann man in Beziehung zu irgend einem beliebigen andern Anfangspuncte und einer von diesem ausgehenden Linie sich einen Körper denken, der dem gegebenen, wenn er mit ihm in einerlei Stellung gebracht wird, congruent ist, während zugleich jene Linien und deren Anfangspuncte für beide Körper congruiren. Insofern ein solcher Körper sammt der ihm angehörigen Linie und deren Anfangspuncte dazu dient, um die Theile eines gegebenen Körpers in Beziehung auf das Gleichartige ihres Verhaltens zu einer solchen mit ihm in Verbindung stehenden Linie und zu deren Anfangspuncte mit einander zu vergleichen, so heiſst er *Vergleichungskörper* des gegebenen Körpers. Der leichteren Darstellung wegen ruhe der Vergleichungskörper so auf einer Horizontalebene, daſs wenigstens ein Punct desselben *in*, aber keiner *unter* die Horizontalebene fällt, während die Linie, von der es sich handelt, auf dieser Ebene senkrecht steht. Diese Linie selbst heiſse in dieser Hinsicht vorläufig die *Umdrehungsnormale* des Körpers für die gegebene aufrechte Stellung desselben auf der Horizontalebene. Unter dieser Umdrehungsnormale sind jedoch nicht die beiden in ihr (als bloſse Linie genommen) denkbaren Richtungen, sondern es ist nur die eine davon gemeint, die andere Richtung heiſse *Umdrehungs-Gegennormale*.

Insofern hier nur von der einen der 2 in einer Linie liegenden Richtungen die Rede ist, hat man auch hier wieder 2 Arten der Vergleichung der Theile eines Körpers in Hinsicht auf gleichmäſsiges Vertheiltseyn gleichwerthiger Theile um eine solche Normale, die jenen Vergleichungsarten bei ebenen Figuren ganz ähnlich sind. Bei der *ersten Art der Vergleichung* bringt man den gegebenen Körper nebst dessen Umdrehungsnormale in einerlei Stellung mit dem Vergleichungskörper, so daſs Congruenz statt hat, dreht dann den gegebenen Körper um die Normale seines Anfangspunctes als Axe der Umdrehung und beachtet die Anzahl der unter den hier vorhandenen Bedingungen

möglichen Stellungen des gegebenen Körpers, in denen er seinem Vergleichungskörper ebenbildlich (congruent) ist, die nach der ganzen Umdrehung nothwendig eintretende, mit der vor der Drehung statt gefundenen ursprünglichen Stellung identische, nicht als eine besondere betrachtend, so daſs beide nur für *eine* Stellung gezählt werden. Man erhält so das Resultat: *der Körper habe für diese bestimmte Umdrehungsnormale p identische oder ebenbildliche Stellungen einer*, folglich auch jeder, *Art.*

Wenn eine gerade Säule mit quadratischer Basis mit einer ihrer Grundflächen auf einer Horizontalebene steht, so hat sie für die durch die Mittelpuncte beider quadratischen Flächen gelegte Umdrehungsnormale d. h. für die eine Richtung in dieser Umdrehungsaxe 4 ebenbildliche Stellungen jeder Art. Eine gerade Pyramide mit gleichseitig-dreiseitiger Basis, die in der Horizontalebene liegt, hat für die durch die Spitze gehende Umdrehungsnormale 3 identische Stellungen jeder Art. Denkt man
Fig. 228. sich unter der Figur b einen Körper, der von einer 2 × 3seitigen Fläche und 3 gröſseren und 3 kleineren Dreieckflächen begrenzt ist, so daſs die letzten 6 Flächen sich in einem Puncte schneiden, der über dem Mittelpuncte jener 2 × 3seitigen Fläche in der Mittelpunctsnormale derselben liegt, so hat dieser Körper für diese Normale 3 ebenbildliche Stellungen jeder Art. Für irgend eine bestimmte gegebene Stellung eines Körpers auf einer Horizontalebene kann jede auf der Horizontalebene senkrechte in Beziehung zum Körper in unveränderlicher Lage gedachte Linie als Umdrehungsnormale angesehen werden. Unendlich viele von diesen Normalen sind *so* beschaffen, daſs, wenn man den Körper um sie, als Umdrehungsaxen, dreht, derselbe keine zweite Stellung erhält, die der ersten identisch wäre (denn die nach der ganzen Umdrehung statt findende ist wieder die erste). Wenn bei einer bestimmten Stellung eines Körpers auf der Horizontalebene eine der unendlich vielen denkbaren Normalen so beschaffen ist, daſs in Beziehung zu ihr der Körper 2 oder mehrere identische Stellungen jeder Art hat, so ist unter den übrigen dieser Normale parallelen Linien keine andere mehr, in Beziehung zu welcher der Körper, wenn sie als Umdrehungsnormale für denselben gedacht wird, noch eine 2te der ursprünglichen identische Stellung hätte. Bildet man durch Fällung von Perpendikeln aus allen Eckpuncten des Körpers auf die Horizontalebene und Vereinigung je zweier solcher durch die Perpendikel

aus den beiden Enden einer jeden Kante des Körpers bestimmten Puncte in dieser Ebene mittelst gerader Linien die *Horizontalprojection* des Körpers, so trifft eine solche Normale den einzigen bestimmten Mittelpunct, welchen diese Projection in solchem Falle hat. Zwei Puncte oder Theile A und B eines Körpers, die so mit einander übereinstimmen, daſs der eine A in einer durch Umdrehung um eine bestimmte Normale entstandenen, der ursprünglichen Stellung identischen, Stellung des Körpers an dem Orte sich befindet, den in der ursprünglichen Stellung der andere Punct oder Theil B einnahm, heiſsen in Beziehung zu dieser Normale ebenbildliche oder identische Puncte oder Theile des Körpers. Abstrahirt man von der bestimmten Normale, so sind allgemein zwei Puncte oder Theile a und b eines Körpers einander ebenbildlich oder *identisch*, wenn der Körper sich in eine solche identische Stellung mit einem beliebigen Vergleichungskörper von ihm setzen läſst, in welcher der Punct oder Theil a des gegebenen Körpers mit dem Puncte oder Theile b des Vergleichungskörpers zusammenfällt.

Wenn ein Körper in Beziehung zur Normale des Mittelpunctes einer für ihn möglichen Horizontalprojection p identische, durch bloſse Umdrehung um diese Normale mit einander vertauschbare Stellungen jeder Art hat, so nennt man ihn einen *in Beziehung zu dieser Normale pgliedrigen Körper* und diese Umdrehungsnormale selbst eine *pgliedrige Axe des Körpers* (so Fig. 229 b.
ist z. B. die Linie, welche durch den Mittelpunct der Endflächen einer geraden Säule mit 2 × 4seitiger 4gliedriger Basis geht, eine viergliedrige Axe, *axis quaternoalatus*); denn wenn man jeden der beiden durch diese Axe von einander getrennten Theile einer jeden durch diese Axe legbaren Ebene eine *Flügelebene* oder Flügelfläche dieser Axe nennt, so ist die Anzahl der in Beziehung zu einer und derselben Richtung in dieser Axe ebenbildlichen Flügelebenen jeder Art = p. Wenn für eine gegebene Stellung eines Körpers auf einer Horizontalebene keine Normale möglich ist, in Beziehung zu welcher der Körper mehr als 1*gliedrig* wäre, so ist hierdurch noch keine Bestimmung gegeben, welche von diesen einander parallelen Normalen als die fragliche 1*gliedrige Axe* (*axis singuloalatus*) anzusehen sey, so daſs, wenn keine weitere Bestimmung gegeben ist, jede auf der Horizontalprojection in diesem Falle senkrechte Linie für diese 1gliedrige Axe angenommen werden kann. Jede auf

eine pgliedrige Axe senkrechte Ebene ist eine in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe pgliedrige Figur, denn die Menge in ihr liegender, in Beziehung auf eine solche Richtung in jener Axe ebenbildlicher Puncte oder Theile jeder Art ist = p. Ihrer Form nach, als ebene Figur an sich betrachtet, mufs sie gleichfalls eine pgliedrige Figur im weiteren Sinne des Wortes seyn, d. h. eine x . pgliedrige oder 2fach x . pgliedrige, wo nicht x, wohl aber p verschiedene Werthe haben kann für die verschiedenen einander parallelen solchen Ebenen. Auch die auf eine Axe senkrechte Horizontalprojection eines in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe pgliedrigen Körpers ist eine in Beziehung auf diese Richtung pgliedrige Figur. Jede p heit unter sich in genannter Beziehung ebenbildlicher Flügelflächen dieser Axen entspricht einer in der Horizontalprojection liegenden p heit von unter sich ebenbildlichen Strahlen. Jede p heit unter sich in Hinsicht auf ihr Verhalten zu der einen Richtung in jener Axe ebenbildlicher, der Axe paralleler Linien steht auf einer p heit unter sich ebenbildlicher Puncte der Horizontalprojection u. s. w.

Bei der *zweiten Art der Vergleichung der Theile eines Körpers, in Beziehung auf ihr Vertheiltseyn um eine bestimmte Axe,* bildet man den zu dem bestimmten Anfangspuncte der fraglichen Normale gehörigen Gegenkörper des Vergleichungskörpers, bringt den zu untersuchenden gegebenen Körper in identische Stellung mit dem Vergleichungskörper so, dafs auch die zu untersuchenden Normalen und deren Anfangspuncte für beide Körper congruiren, setzt dann an die Stelle des Vergleichungskörpers seinen Gegenkörper dadurch, dafs man jene Normale dieses Gegenkörpers in einer beliebigen, durch sie gelegten Ebene um den Anfangspunct so dreht, dafs sie 180° durchläuft und dann zusammenfällt mit der Umdrehungsnormale des *gegebenen* Körpers, so dafs der zu der umgekehrt gewordenen Normale gehörige Körper selbst umgekehrt d. h. aus der *antinormalen* Stellung in die *normale* versetzt ist, läfst diesen nun ruhig bleiben, dreht den gegebenen Körper um seine Normale und beachtet, ob für ihn unter diesen Bedingungen eine Stellung möglich ist, in welcher er mit dem erwähnten Gegenkörper des Vergleichungskörpers congruent ist oder nicht. Zwei Puncte oder Theile a und b eines Körpers heifsen in Beziehung auf ihr Verhalten zu einer bestimmten Normale gegenbildlich

gleich, wenn für den gegebenen Körper eine solche Stellung möglich ist, in der er seinem Gegenkörper congruent wird, während zugleich die fraglichen Normalen und deren Anfangspuncte zusammenfallen und der Punct oder Theil a des gegebenen Körpers mit demjenigen Puncte oder Theile des Gegenkörpers zusammenfällt, welcher der dem Puncte b *entsprechende* Gegenpunct ist. Allgemein und ohne Rücksicht auf eine bestimmte Normale sagt man: zwei Puncte oder Theile a und b eines seinem Gegenkörper in ebenbildlicher Stellung congruenten Körpers seyen gegenbildlich gleich, wenn der gegebene Körper sich mit dem Gegenkörper so in identische Stellung bringen läſst, daſs der Punct a des gegebenen Körpers mit dem, dem Puncte u. s. w. b als Gegenpunct u. s. w. entsprechenden, Puncte des Gegenkörpers congruirt. Denn wird z. B. der dem Puncte b entsprechende Punct des Gegenkörpers mit b′ bezeichnet, so ist

also $b' \mid=\mid b$,
ist dann $a \cong b'$,
so muſs auch $a \mid=\mid b$ seyn.

Ist die Umdrehungsnormale, in Beziehung zu welcher eine solche Uebereinstimmung zwischen Körper und Gegenkörper statt hat, eine pgliedrige Axe des Körpers, so ist der Körper in Beziehung zu dieser Axe *2fach pgliedrig* und umgekehrt die Axe selbst in Beziehung auf den Körper eine 2fach pgliedrige (so ist z. B. eine gerade Pyramide mit gleichseitig-dreiseitiger Basis in Beziehung auf die durch die Spitze und durch den Mittelpunct der Grundfläche gehende Axe ein 2fach 3gliedriger Körper und diese seine Axe eine 2fach 3gliedrige, *axis bis ternoalatus*); denn es können in einem solchen Körper gleichsam 2 zu einer und derselben Richtung dieser Axe gehörige pgliedrige Flügelflächensysteme mit einander verbunden gedacht werden, auf ähnliche Weise, wie in der 2fach pgliedrigen ebenen Figur zwei pgliedrige ebene Strahlensysteme mit einander verbunden gedacht wurden. Analog den doppelten Strahlen und den einfachen bei ebenen Figuren hat man hier 2 Arten *doppelter*, unendlich viele Arten *einfacher* Flügelflächen und das rücksichtlich der Anzahl von Strahlen jeder Art und rücksichtlich der Menge von Strahlenarten Gesagte läſst sich für eine *bestimmte* 2fach pgliedrige Axe, hinsichtlich der einen von beiden in ihr als einer Linie liegenden Richtungen zunächst betrachtet, unmittelbar auf die Flügelebene anwenden. Eine doppelte Flügelfläche theilt, wenn

sie verlängert wird, den Körper *in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften,* gleich wie ein über den Mittelpunct hinaus verlängerter doppelter Strahl eine ebene Figur in 2 nebengegenbildliche Hälften zerlegt. Eine pgliedrige Axe, die nicht 2fach pgliedrig ist, heifst 1fach pgliedrig. Ein Körper heifst sonach in Beziehung zu einer pgliedrigen Axe ein 2fach pgliedriger, oder man sagt, eine pgliedrige Axe sey eine 2fach pgliedrige, wenn das Verhältnifs sämmtlicher Theile des Körpers zu der einen Richtung in dieser Axe ein solches ist, welches dem Verhältnisse der Theile des Gegenkörpers zu der in diesem jener Richtung der fraglichen Axe entsprechenden Richtung ebenbildlich ist. Es sind dann also die einander entsprechenden Richtungen der Axe des gegebenen Körpers und jener des Gegenkörpers rücksichtlich auf das Verhalten zu sämmtlichen Theilen des Körpers, dem die Axe angehört, einander *ebenbildlich* und *gegenbildlich* zugleich.

Wenn ein Körper in Beziehung zu keiner Normale einer bestimmten Horizontalprojection von ihm höher als 2fach 1gliedrig ist, so liegen sämmtliche Normalen jener Projection, in Beziehung zu denen der Körper 2fach 1gliedrig ist, in einer einzigen bestimmten, auf der Horizontalprojection senkrechten Ebene und die Annahme einer von ihnen zur 2fach 1gliedrigen Axe für die hier statt findenden aufrechten Stellungen des Körpers kann, wenn keine anderweitigen Bestimmungsgründe vorhanden sind, willkürlich geschehen. Wenn man eine 2fach pgliedrige Normale als eine 2fach pgliedrige betrachtet, so sieht man die in Beziehung zu ihr sich gegenbildlich verhaltenden Theile des Körpers sowohl, als die blofs ebenbildlichen, für gleichwerthig an. Sagt man von einer 2fach pgliedrigen Normale, sie sey eine pgliedrige, so achtet man blofs auf die in Beziehung zu ihr ebenbildlichen Theile. Jede auf einer 2fach pgliedrigen Axe senkrechte Ebene ist eine in Beziehung auf die eine Richtung in dieser Axe 2fach pgliedrige; denn die Menge in ihr liegender, in Beziehung auf die eine Richtung in jener Axe ebenbildlicher Strahlen jeder Art ist p und je zwei solche pheiten verhalten sich in Beziehung zu derselben Richtung jener Axe gegenbildlich. Die Anzahl der, durch das Zusammenfallen zweier sich gegenbildlich verhaltenden Strahlen in einen einzigen gebildeten, Doppelstrahlen der einen Art sowohl als der andern Art ist p.

Jede auf eine 2fach pgliedrige Axe senkrechte Schnittebene des Körpers ist als ebene Figur an sich betrachtet nothwendig eine 2fach pgliedrige ebene Figur im weiteren Sinne des Wortes, d. h. eine 2fach x.pgliedrige, wo x, nicht aber p für die verschiedenen einander parallelen Ebenen der Art verschieden seyn kann. Die hier erwähnte Eigenschaft der Horizontalschnitte ist eins der wichtigsten Erkennungsmittel einer 2fach pgliedrigen Axe. Die auf die 2fach pgliedrige Axe senkrechte Horizontalprojection eines Körpers ist in demselben Sinne eine 2fach pgliedrige ebene Figur. Jeder einfachen Flügelfläche entspricht ein einfacher Strahl in der Horizontalprojection. Zwei sich in Beziehung auf eine Richtung in der Axe gegenbildlich verhaltende, einander gleichwerthige Flügelflächen stehen auf sich gegenbildlich verhaltenden Strahlen der Horizontalprojection.

Bisher war immer nur von der einen in einer Axe liegenden Richtung die Rede. Vergleicht man beide solche Richtungen mit einander, so ergiebt sich schon aus dem Vorhergehenden, dafs der Körper, der in Beziehung zur einen Richtung in einer Axe sich als ein 1fach pgliedriger oder als ein 2fach pgliedriger zeigte, auch hinsichtlich der andern Richtung ebenfalls 1fach pgliedrig oder 2fach pgliedrig seyn müsse. Man kann dieses ausdrücken durch den Satz: die beiden Richtungen einer jeden Axe seyen gleichnamig (oder die beiden Enden einer Axe seyen gleichnamig). Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Axe können aber seyn

a) *gleichwerthig* in Beziehung zum Körper im Allgemeinen und dann nennt man die Axe eine *gleichendige* oder *2endige*,

b) *nicht gleichwerthig* in dieser Hinsicht und dann heifst sie eine *ungleichendige* oder 2 × 1*endige* Axe.

Die einfachste Art des Gleichendigseyns einer Axe oder, was dasselbe ist, des Gleichendigseyns eines Körpers in Beziehung zu einer Axe ist nun aber diejenige, bei welcher der Körper durch eine auf diese Axe senkrechte Ebene so in 2 gleichwerthige Hälften getheilt werden kann, dafs jedes der aus den Puncten der oberen Hälfte auf die mittlere Horizontalfläche gefällten Perpendikel, wenn man es unter diese Ebene hinab so weit verlängert, dafs die Verlängerung gleich dem Verlängerten ist, einen Punct der unteren Hälfte trifft, der dem oben dazu gehörigen gleichwerthig ist. Es folgt daraus, dafs in diesem Falle jede der fraglichen Axe parallele Linie im Körper eine

gleichendige sey. Eine solche gleichendige Axe, bei welcher jede der Axe parallele Linie eine gleichendige ist, nenne man eine gleichstellig 2endige Axe.

Bei einer gleichstellig 2endigen Axe verhalten sich die beiden Enden nothwendig gegenbildlich. Ist dabei die Axe eine 2fach pgliedrige, so sind ihre beiden Enden zugleich ebenbildlich. Bezeichnet man die Enden der einen Axe mit a und b, die derselben Axe im Gegenkörper mit a′ und b′, so ist a |≘| a′ und b |≘| b′, weil die Axe 2fach pgliedrig ist. Da nun aber eben angeführt wurde, dafs a |=| b, mithin auch a′ |=| b′ seyn müsse, so folgt

aus	a ≘ a′
und	b′ \|=\| a′,
dafs auch	a \|=\| b′.
Da aber auch	b \|=\| b′ ist, weil b \|≘\| b′,
so mufs	a ≘ b seyn.

So wie bei jeder 2fach pgliedrigen Axe ist auch bei der gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Axe der mitten auf die Axe senkrechte Schnitt, rücksichtlich seines Verhaltens zu der Axe, eine 2fach pgliedrige Figur. Auch als ebene Figur an sich betrachtet mufs sie nicht nothwendig eine mehrgliedrige seyn. Ist die gleichstellig 2endige Axe eine 1fach pgliedrige, so sind ihre beiden Enden blofs gegenbildlich, ohne zugleich ebenbildlich zu seyn. Der mittlere, auf einer gleichstellig 2endigen 1fach pgliedrigen Axe senkrechte Schnitt ist in Beziehung zu jeder der beiden Richtungen in der Axe eine 1fach pgliedrige Figur und auch als ebene Figur an sich betrachtet mufs er nicht nothwendig mehrgliedrig seyn. Der Ausdruck, ein auf eine Axe senkrechter Schnitt sey in Beziehung zu dieser Axe 2fach pgliedrig oder auch 1fach pgliedrig, bezieht sich immer auf sein Verhalten zu jeder der beiden Richtungen in der Axe einzeln genommen, sowohl hier als noch im Folgenden.

Um die übrigen möglichen Arten des Gleichendigseyns von Axen zu finden, dient folgende Betrachtung. Da für jede bestimmte pgliedrige Axe eines Körpers nur *eine* mittlere, auf ihr senkrechte Schnittebene möglich ist, so ist einleuchtend, dafs, wenn der Körper durch diese Ebene in 2 gleichwerthige Theile getheilt werden soll, es für jede pheit unter sich ebenbildlicher Strahlen in der oberen Flächenseite dieser Horizontalebene, die in irgend einer bestimmten Beziehung zur oberen Körperhälfte

stehen (*der oberen Körperhälfte angehören*), auch eine p heit unter sich ebenbildlicher, der unteren Körperhälfte angehöriger Strahlen in der unteren Flächenseite dieser Ebene geben müsse, welche sowohl rücksichtlich auf das Verhalten zu der Körperhälfte, der sie angehören, im Allgemeinen, als auch rücksichtlich auf ihr Verhalten in Beziehung zu der mittleren Horizontalebene selbst jener zuerst genannten Strahlen-p-heit gleichwerthig seyn mufs. Das Gleichwerthigseyn 2er Strahlen in dem mittleren Horizontalschnitte ist aber, insofern man der Allgemeinheit wegen blofs von einfachen Strahlen redet, auf 2erlei Weise möglich. Sie sind nämlich entweder für das Bild einer und derselben Flächenseite ebenbildlich oder gegenbildlich.

a) Sie seyen ebenbildlich für das Bild der einen Flächenseite des Horizontalschnitts als ebene Figur an sich betrachtet. Soll nun nicht, wie bei dem Gleichstellig2endigseyn der Axe, das unmittelbare Zusammenfallen derjenigen Strahlen-p-heit, welche der obern Körperhälfte angehört, mit derjenigen Strahlen-p-heit des Horizontalschnitts, welche sich auf die untere Hälfte bezieht, statt finden, so ist ersichtlich, dafs man eine Menge $= 2p$ für das Bild der einen Flächenseite des Horizontalschnitts ebenbildlicher Strahlen vor sich haben wird und dafs also dann das Bild des mittleren Horizontalschnitts eine nicht weniger als tgliedrige ebene Figur seyn darf (wenn $t = 2p$ ist). Es mufs dann jeder der p Strahlen, welche sich auf die untere Körperhälfte beziehen, den Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden halbiren, den 2 benachbarte zu ihnen gehörige Strahlen mit einander bilden, welche sich eben so auf die obere Hälfte des Körpers beziehen, d. h. jede Flügelfläche der fraglichen Axe, die für die untere Körperhälfte eine bestimmte Bedeutung hat, mufs die Neigung von $\frac{360}{p}$ Graden halbiren, welche von zweien einander in Beziehung zur oberen Körperhälfte ebenbildlichen Flügelflächen dieser Axe mit einander gebildet wird, deren jede in Beziehung auf jene Bedeutung für die obere Körperhälfte sich zu jener in Beziehung auf ihre Bedeutung zur unteren Körperhälfte als gleichwerthig oder als gegenbildlich gleich verhält. Die beiden Körperhälften verhalten sich demnach selbst zu einander gegenbildlich.

Wenn bei einer gleichendigen Axe nicht jede ihr parallele

Linie eine gleichendige ist und dennoch die beiden Körperhälften, folglich auch die beiden ihnen entsprechenden Richtungen der zu untersuchenden Axe sich gegenbildlich verhalten, so sagt man, die Axe sey gerenstellig oder 2endig. Bei der *2fach pgliedrigen gerenstellig 2endigen Axe* verhalten sich die beiden Körperhälften zugleich auch als *ebenbildlich* und der mittlere Horizontalschnitt ist, als ebene Figur an sich betrachtet, ein 2fach tgliedriger, während er für jede einzelne Richtung in der Axe blofs ein 2fach pgliedriger ist. Bei der blofs 1fach *pgliedrigen* gerenstellig 2endigen Axe aber verhalten sich die beiden Körperhälften *nicht als ebenbildlich* und der mittlere Horizontalschnitt ist, als ebene Figur an sich betrachtet, ein *tgliedriger*, während er in Beziehung auf jede der beiden Richtungen in der Axe einzeln genommen blofs ein pgliedriger ist.

b) Die in der mittleren Horizontalebene liegende p heit von in Beziehung zur obern Körperhälfte einander ebenbildlichen einfachen Strahlen verhält sich zu der ihr gleichwerthigen pheit unter sich in Beziehung zur untern Körperhälfte ebenbildlicher, in derselben Horizontalebene liegender Strahlen für das Bild der einen Flächenseite dieses Schnittes als gegenbildlich gleich. Daraus folgt, dafs die mittlere, auf die fragliche Axe senkrechte Schnittebene, als ebene Figur an sich gedacht, für eine jede pgliedrige Axe eine 2fach pgliedrige seyn müsse, in welcher p doppelte Strahlen der einen und p doppelte Strahlen der andern Art vorkommen und in welcher der Winkel, welchen 2 benachbarte gegenbildliche gleichwerthige einfache Strahlen mit einander bilden, durch den dazwischen liegenden doppelten Strahl (der 1sten oder der 2ten Art) halbirt wird. Wird der ganze Körper um einen solchen doppelten Strahl seines mittlern Horizontalschnittes als eine Umdrehungsaxe umgedreht, so werden je 2 Strahlen der Horizontalebene, deren Winkel, den sie mit einander bilden, durch jenen doppelten Strahl halbirt wird, mit einander vertauscht, woraus folgt, dafs ebenso die diesen Strahlen angehörigen Flügelflächen mit einander vertauscht werden, so dafs in diesem Falle beide Hälften des Körpers ebenbildlich sind.

Wenn nun die beiden Enden einer Axe demnach ebenbildlich sind, aber nicht zugleich sich gegenbildlich verhalten, so heifse die Axe eine *ebenbildlich 2endige* (im engern Sinne). Für die ebenbildlich gleichendige pgliedrige Axe ist der mittlere auf

ihr senkrechte Schnitt, als ebene Figur an sich gedacht, 2fach pgliedrig, während er in Beziehung auf eine jede der beiden Richtungen in dieser Axe bloſs 1fach pgliedrig ist. Jede Axe ist sonach hinsichtlich ihres Charakters entweder

a) *gleichendig* oder *2endig*, und dann ist sie

α) *gleichstellig 2endig*, wenn *jede* der Axe parallele Linie gleichendig ist.

I. αα) *gleichstellig 2endig 2fach pgliedrig;* es sind dann beide Enden ebenbildlich gegenbildlich.

II. ββ) *gleichstellig 2endig 1fach pgliedrig;* es sind dann beide Enden bloſs gegenbildlich und nicht ebenbildlich.

β) *ungleichstellig oder nicht gleichstellig 2endig,*

αα) *gerenstellig 2endige* Axe, wenn die beiden Enden einer solchen Axe sich gegenbildlich verhalten.

III. aa) *gerenstellig 2endig 2fach pgliedrig,* wenn beide Enden einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich sind.

IV. bb) *gerenstellig 2endig 1fach pgliedrig,* wenn die beiden Enden einander bloſs gegenbildlich und nicht zugleich ebenbildlich sind.

V. ββ) *ebenbildlich gleichendig 1fach pgliedrig,* wenn die Axe nicht gegenbildlich gleichendig, aber doch gleichendig, mithin ebenbildlich gleichendig ist. Sie kann aus diesem Grunde auch nicht 2fach pgliedrig seyn.

b) *ungleichendig oder 2 × 1endig*, und dann ist sie

VI. αα) *ungleichendig 2fach pgliedrig,*

VII. ββ) *ungleichendig 1fach pgliedrig.*

Man kann diese Verhältnisse auch auf folgende Weise tabellarisch darstellen. Bei jeder Axe ist entweder

1) jedes Ende seinem Gegenbilde d. h. der entsprechenden Richtung im Gegenkörper ebenbildlich d. h. ihr ebenbildlich und gegenbildlich zugleich. Die Axe ist dann eine *2fach pgliedrige.*

a) Die beiden Enden sind gleichwerthig, folglich einander ebenbildlich und gegenbildlich zugleich, *gleichendige 2fach pgliedrige Axe* oder *2endige 2fach pgliedrige Axe.*

α) Jede der Axe parallele Linie ist gleichendig; dann ist die Axe *gleichstellig, 2endig 2fach pgliedrig;*

β) nicht *jede* der Axe parallele Linie ist gleichendig, dann ist die Axe *gerenstellig 2endig 2fach pgliedrig;*

b) die beiden Enden sind ungleichwerthig, *ungleichendige 2fach pgliedrige Axe.*

2) Jedes Ende der Axe ist seinem Gegenbilde *nicht ebenbildlich*, dann ist die Axe blofs *1fach pgliedrig*;

a) beide Enden sind gleichwerthig, *gleichendige 1fach pgliedrige Axe*. Sie können einander nicht ebenbildlich und gegenbildlich zugleich seyn, sondern sind blofs

α) einander *ebenbildlich*, ohne zugleich gegenbildlich zu seyn; *ebenbildlich gleichendige 1fach pgliedrige Axe*[1], oder

β) einander nicht ebenbildlich, folglich *gegenbildlich; gegenbildlich gleichendige 1fach pgliedrige Axe*.

αα) Jede der Axe parallele Linie ist gleichendig, *gleichstellig 2endige 1fach pgliedrige Axe;*

ββ) nicht jede der Axe parallele Linie ist gleichendig, *gerenstellig 2endige 1fach pgliedrige Axe;*

b) beide Enden der 1fach pgliedrigen Axe sind ungleichwerthig, *ungleichendige oder 2 × 1endige 1fach pgliedrige Axe*.

Um die beiden Enden einer Axe hinsichtlich ihrer etwaigen Gleichwerthigkeit mit einander zu vergleichen, kann man auch die Gesammtheit der auf dieser Axe senkrechten Schnittebenen untersuchen, dadurch dafs man je 2 derselben, die gleich weit vom Halbirungspuncte der Axe abstehen, hinsichtlich auf das Bild, welches ihre dem Mittelpuncte des Körpers nicht zugekehrte d. h. ihre äufsere Flächenseite darbietet, vergleicht. Sind nun die Bilder der äufsern Flächenseiten je 2er zusammengehöriger, auf die Axe senkrechter Schnitte *ebenbildlich*, so ist die Axe *ebenbildlich gleichendig*, sind sie aber gegenbildlich, so ist auch die Axe *gegenbildlich gleichendig*, und sind endlich dieselben ebenbildlich und gegenbildlich zugleich, so ist auch die Axe *ebenbildlich gegenbildlich gleichendig* und zugleich ist dann natürlich die Axe eine *2fach pgliedrige*.

Mittelpunct des Gleichwerthes.

Wenn ein Körper eine gleichendige Axe hat, so sind von dem Halbirungspuncte derselben die einander in Beziehung zu der Axe (d. h. für beide Richtungen in der Axe) gleichwerthigen Puncte desselben gleich weit entfernt. Ist der mittlere Schnitt senkrecht auf eine 2endige Axe ein solcher, der als ebene Figur

1 Es sind hier stets der Axe parallele Linien vorhanden, welche ungleichendig sind.

an sich betrachtet sowohl, als auch in Hinsicht auf das Verhältnifs desselben zu jeder der beiden Richtungen in jener Axe einzeln genommen nicht blofs 1fach oder 2fach 1gliedrig ist, so hat diese Schnittebene einen bestimmten Mittelpunct und dieser ist zugleich Mittelpunct des Körpers, von welchem die unter sich gleichwerthigen Puncte und Theile derselben gleich weit abstehen, d. h. ist *Mittelpunct des Gleichwerths für den Körper*. Wenn ein Körper keine 2endige Axe besitzt, für welche der mittlere auf ihr senkrechte Schnitt *in der erwähnten Beziehung* mehr als 1fach oder 2fach 1gliedrig ist, so hat der Körper auch keinen *absolut bestimmten Mittelpunct des Gleichwerthes*. Ueberhaupt kann man folgende Fälle unterscheiden:

a) Der Körper hat einen einzigen bestimmten Mittelpunct des Gleichwerthes.

b) Es ist eine gerade, in Beziehung zum Körper in bestimmter Lage befindliche Linie denkbar, in welcher jeder Punct als Mittelpunct des Gleichwerths für den Körper angenommen werden kann, z. B. in der einfach geraden Pyramide mit regelmäfsiger 6seitiger Basis die auf der Basis im Mittelpuncte derselben senkrecht stehende Linie.

c) Es ist eine Ebene im Körper denkbar, in welcher jeder Punct als Mittelpunct des Gleichwerths angenommen werden kann. In einer Gestalt z. B., welche entsteht, wenn man zwei sich gegenbildlich verhaltende Pyramiden mit 1fach 1gliedrigen dreieckigen Grundflächen mit diesen Grundflächen so an einander legte, dafs die neue Gestalt eine auf der gemeinschaftlichen Ebene beider Hälften senkrechte gleichstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axe erhält, würde eben diese gemeinschaftliche Ebene beider Hälften die fragliche Eigenschaft besitzen.

d) Jeder in Beziehung zum Körper gedachte Punct kann als Mittelpunct des Gleichwerthes angesehen werden; dieses ist der Fall, wenn der Körper keine 2 gleichwerthigen Puncte irgend einer Art hat, z. B. bei einer von vier ungleichschenkligen Dreiecken umschlossenen Gestalt. Dafs nicht umgekehrt alle vom Mittelpuncte des Gleichwerthes gleich weit abstehende Puncte eines Körpers auch gleichwerthig seyen, ist unmittelbar einleuchtend. Man kann von nun an den Begriff der Axe dahin beschränken: Axe sey jede der durch den, für den Körper seiner Beschaffenheit gemäfs angenommenen, Mittelpunct des Gleichwerths gehenden Linien.

Bei der Vergleichung zweier oder mehrerer Axen eines Körpers mit einander findet man

1) ob sie hinsichtlich ihres Charakters mit einander übereinstimmen oder nicht, d. h. ob sie *gleichnamig* oder *ungleichnamig* sind;

2) ob gleichnamige Axen auch *gleichwerthig* sind *oder nicht.* Eine Axe, die keiner andern Axe desselben Körpers gleichwerthig ist, heiſse eine einheitliche Axe des Körpers (*axis singularis*), weil sie für sich eine Einheit bildet und sich dadurch von solchen einzelnen Axen unterscheidet, die mit andern zusammengenommen Zweiheiten, Dreiheiten u. s. w. von Axen gleicher Art bilden.

Wenn ein Körper nur *eine* Axe besitzt, welche eine *einheitliche Axe* ist, so sind seine wichtigsten Stellungen die, bei denen diese Axe senkrecht steht; diese Axe heiſst dann *Hauptaxe des Körpers* (*axis principalis*).

Wenn ein Körper mehrere einheitliche Axen besitzt, so ist kein Grund vorhanden, warum man nicht eine derselben willkürlich (oder wegen anderer nicht rein mathematischer Rücksichten) sollte als Hauptaxe betrachten können. Haben die verschiedenen einheitlichen Axen eines Körpers auch einen verschiedenen Charakter, so wird man ihn, je nachdem man die eine oder die andere solche einheitliche Axe als Hauptaxe ansieht, als Glied in verschiedenen Reihen von Gestalten-Familien betrachten müssen, wenn man die Gesammtheit sämmtlicher denkbarer Gestalten in Abtheilungen bringt, die von den Eigenschaften und dem Charakter der Axen entnommen sind. Wenn ein Körper keine einheitliche Axe besitzt, so kann für ihn auch keine Axe als Hauptaxe angenommen werden, wenn man nicht zwischen wesentlich Gleichwerthiges eine Verschiedenheit setzen will, die in der Beschaffenheit des Körpers ungegründet ist. Man nennt eine Gestalt, in welcher eine Axe als Hauptaxe angenommen werden muſs oder angenommen werden kann, eine *hauptaxige Gestalt,* während man eine solche, die keine Hauptaxe hat, eine *hauptaxenlose Gestalt* nennt.

Strahlensysteme hauptaxiger Gestalten.

Man denke sich in jeder Axe die beiden, vom Mittelpuncte des Körpers ausgehenden, in ihr liegenden Richtungen einzeln und nenne diese Richtungen Strahlen oder *Radien,* so ist er-

sichtlich, dafs in jedem Körper so viele Strahlen möglich seyn werden, als in einer Kugel Radien denkbar sind. Durch die Hauptaxe und durch jeden Strahl aufser ihr kann eine Hauptflügelfläche (Flügelfläche der Hauptaxe) gelegt werden. Durch einen in einer bestimmten Hauptflügelfläche liegenden Strahl kann eine auf jene Flügelfläche senkrechte Ebene gelegt werden. Durch einen und denselben solchen Strahl kann nur *eine* derartige Ebene gelegt werden, weil durch ihn auch nur *eine* Flügelfläche der Hauptaxe geht. Wenn nun aber durch einen Strahl zwei auf einander senkrechte Ebenen gelegt sind, so bilden diese in Beziehung zu dem Strahle selbst vier Flügelflächen desselben. Die auf solche Weise entstehenden vier Flügelflächen eines Strahles, der nicht in die Hauptaxe fällt, können nicht alle vier gleichwerthig seyn, sondern nur höchstens je zwei einander diesseit und jenseit des Strahles gegenüberstehende, weil in dem einen solchen Paare die Hauptaxe liegt, im andern nicht.

Aus dem Gesagten folgt, dafs bei hauptaxigen Gestalten ein Strahl, der nicht in die Hauptaxe fällt, höchstens 2gliedrig seyn könne, d. h. dafs er entweder

1) 2fach 2gliedrig oder
2) 1fach 2gliedrig oder
3) 2fach 1gliedrig oder
4) 1fach 1gliedrig seyn müsse.

Welche von diesen vier verschiedenen Benennungen ihm gebühre, hängt von der Beschaffenheit der beiden erwähnten, durch ihn gelegten Ebenen und von der Art und Weise ab, wie er in jeder derselben liegt. Ist die Flügelfläche der Hauptaxe, in welcher er liegt, eine doppelte, so wird sie auch für ihn 2 doppelte Flügelflächen bilden. Die Hauptaxe hat aber nur dann doppelte Flügelflächen, wenn sie eine *2fach* pgliedrige ist. Soll ein Strahl ein 2gliedriger seyn, so mufs er in der Flügelfläche der Hauptaxe so liegen, dafs er mit beiden Strahlen der Hauptaxe gleiche Winkel bildet, d. h. er mufs auf die Hauptaxe senkrecht seyn; denn an jedem 2gliedrigen Strahle müssen je 2 einander gerade entgegenstehende (d. h. einen Winkel von 180° mit einander bildende) Flügelflächen einander ebenbildlich seyn, was nicht möglich wäre, wenn ein solcher Strahl mit dem einen Strahle der Hauptaxe einen gröfseren Winkel bildete, als mit dem andern. Es mufs aber auch ferner aus demselben Grunde der mittlere Querschnitt den ganzen Körper nebst jener einzel-

nen Hauptflügelfläche, in welcher der fragliche Strahl liegt, in zwei ebenbildliche Hälften zertheilen, so dafs hierdurch das Bild jeder einzelnen Flächenseite dieser Hauptflügelfläche, als ebene Figur an sich betrachtet, in zwei nebengegenbildliche Hälften getheilt wird, wenn der Strahl ein 2gliedriger seyn soll. Theilt der mittlere Horizontalschnitt den Körper in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften, so bildet er für jeden in ihm liegenden Strahl 2 entgegengesetzte doppelte Flügelflächen. 2fach 2gliedrige Strahlen müssen daher entweder in doppelten Hauptflügelflächen oder in einem solchen mittleren Horizontalschnitte liegen, der den Körper in 2 gleichstellig gegenbildliche Hälften theilt. Ein Strahl, der diesen beiden Bedingungen zugleich entspricht, ist 2fach 2gliedrig. Ein Strahl, der weder in einer doppelten Hauptflügelfläche, noch auch im mittleren Querschnitte liegt, wenn dieser für jeden in ihm liegenden Strahl doppelte Flügelflächen bildet, ist 1fach 1gliedrig. Da die Menge von ebenbildlichen Stellungen eines Körpers, mithin auch eines Strahlensystems, wobei ein bestimmter (1fach oder 2fach) xgliedriger Strahl aufwärts gerichtet ist, von dem Werthe der Zahl x abhängt, die seinen Charakter bestimmt, d. h. = x ist, so wird, wenn n die Menge ebenbildlicher xgliedriger Strahlen bezeichnet, auch n . x die Menge von Stellungen jeder bestimmten Art seyn, bei welchen ein solcher xgliedriger Strahl aufwärts gerichtet ist. Die in der vertical gestellten Hauptaxe liegenden beiden Strahlen heifsen *Hauptstrahlen*, deren Flügelflächen *Hauptflügelflächen.* Die in dem mittleren Horizontalschnitte (mittleren Querschnitte) liegenden Strahlen heifsen *Querstrahlen*, die gegen die Horizontalebene geneigten Strahlen, die auf einer oder der anderen Flächenseite der Horizontalebene schief aufstehen, heifsen *Strebestrahlen.* Die Ausdrücke *radius principalis, transversus, obliquus* dürften diese Unterschiede bezeichnen können.

Nach diesen Erläuterungen wird nun die Auffassung der Verschiedenheiten von Strahlensystemen in hauptaxigen Gestalten[1] möglich seyn.

1 Da es schwierig ist, sich die körperlichen Strahlensysteme deutlich vorzustellen, ohne sie an einzelnen Gestalten entwickelt zu haben, so wird bei der nun folgenden Untersuchung der Eigenschaften der einzelnen Reihen von Strahlensystemen jedesmal eine Verwei-

I. Die Hauptaxe sey gleichstellig 2endig 2fach pgliedrig, z. B.

Fig. 236	gleichstellig	2endig	2fach	1gliedrig
— 237	—	2 —	2 —	2 —
— 238	—	2 —	2 —	3 —
— 239	—	2 —	2 —	4 —
— 240	—	2 —	2 —	6 —

Man hat dann

1) *Zwei 2fach pgliedrige* $|\overset{\frown}{=}|$ sich verhaltende *Hauptstrahlen*, welche zusammen die gleichstellig 2endige Hauptaxe bilden.

2) *p Querstrahlen der ersten Art*, welche 2fach 2gliedrig sind, sich $|\overset{\frown}{=}|$ verhalten und in den der Hauptaxe angehörigen doppelten Flügelflächen der 1sten Art und im mittleren Querschnitte liegen. Je 2 benachbarte bilden einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden.

3) *p Querstrahlen der 2ten Art*, die gleichfalls 2fach 2gliedrig sind, sich daher unter einander als $|\overset{\frown}{=}|$ verhalten und in den doppelten Hauptflügelflächen der 2ten Art liegen. Jeder bildet mit jedem ihm benachbarten der ersten Art einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden.

4) Die übrigen Querstrahlen, deren jeder ein *2fach 1gliedriger Querstrahl* ist, dessen doppelte Flügelflächen in dem mittleren Querschnitte liegen. Die Anzahl 2fach 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist $\doteq 2p$; in Beziehung zum einen Hauptstrahle verhalten sich die p einen (von denen je 2 benachbarte

sung auf einige abgebildete Gestalten vorangeschickt werden, an denen derartige Strahlensysteme für einzelne bestimmte Zahlenwerthe von p erkannt werden können. Man hat nämlich nur nöthig, in der allgemeinen Beschreibung an die Stelle der Zahl p die einzelne bestimmte Zahl zu setzen, die ihr entspricht, so hat man die specielle Beschreibung des einzelnen Strahlensystems, welches dieser oder jener abgebildeten Gestalt entspricht. Die Abbildungen der körperlichen Gestalt sind (wenn nicht ausdrücklich eine Abweichung von diesem Gesetze angegeben ist) stets so gezeichnet, dafs die als Hauptaxe zu betrachtende Linie parallel liegt mit den kürzeren Seiten der rechtwinkligen Einfassung der ganzen Tafel, auf welcher die Abbildung sich befindet.

unter Winkeln von $\frac{360}{p}$ Graden divergiren) unter sich als ebenbildlich und zu den p andern unter sich in derselben Beziehung ebenbildlichen als gegenbildlich; in Beziehung zur ganzen Hauptaxe aber, so wie in Beziehung zum ganzen Körper, sind die p zu einer und derselben Art gehörigen 2fach 1gliedrigen Querstrahlen $|\cong|$. Die Anzahl von Arten 2fach 1gliedriger Querstrahlen ist unendlich, d. h. hier so viel als gleich der Menge von Strahlen, welche innerhalb der Schenkel eines ebenen Winkels von $\frac{360}{2p}$ Graden von dessen Scheitel divergirend ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgezählt[1].

5) Die Strebestrahlen in den *Hauptflügelflächen erster Art*, deren jeder ein *2fach 1gliedriger Strebestrahl* ist, dessen doppelte Flügelflächen in jener durch ihn gehenden Hauptflügelfläche liegen. Die Anzahl solcher Strahlen einer Art ist $= 2p$. Je 2 einer Art liegen in einer und derselben Hauptflügelfläche und der Winkel, den jeder mit dem ihm zunächst liegenden Hauptstrahle bildet, ist für beide Strebestrahlen von gleicher Gröfse. Die Anzahl von Arten solcher Strebestrahlen ist unendlich, d. h. gleich der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fafst.

6) Die *2fach 1gliedrigen Strebestrahlen in den Hauptflügelflächen 2ter Art*, für deren jeden die ihm angehörigen doppelten Flügelflächen in der Hauptflügelfläche 2ter Art, die durch ihn geht, liegen. Von ihnen gilt, was von denen gesagt worden ist, die in den Hauptflügelflächen erster Art liegen.

7) Die übrigen Strebestrahlen sind 1fach 1gliedrige. Je 2 1fach 1gliedrige, sich gegenbildlich verhaltende, gleich-

1 Um ähnliche Ausdrücke kürzer geben zu können, bedeute *Menge der Strahlen, die ein Winkel von n Graden fafst,* die Anzahl von Strahlen, die in einem Winkel von n Graden innerhalb der beiden Schenkel liegend, vom Scheitel ausgehend gedacht werden können, die beiden Schenkel selbst nicht mitgerechnet.

Aehnlich diesem ist der Ausdruck: *Menge von Strahlen, die von einer* (auf anzugebende Weise) *bestimmten Ecke* gefafst werden, = Menge von Strahlen, die innerhalb dieser Ecke liegend von dem Eckpuncte ausgehen können, die in den Ebenen, von denen die Ecke gebildet wird, liegenden Strahlen nicht mitgezählt.

werthige Strebestrahlen liegen in einer und derselben einfachen Hauptflügelfläche, die 2p einfachen Hauptflügelflächen enthalten daher $2 \cdot 2p = 4p$ 1fach 1gliedrige Strebestrahlen einer Art; die 2p einen unter sich ebenbildlichen verhalten sich zu den p andern unter sich ebenbildlichen als gegenbildlich gleich. Die Anzahl ebenbildlicher 1fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art ist daher $= 2p$. Die Menge von Arten 1gliedriger Strebestrahlen ist ∞, d. h. gleich der Anzahl von Strahlen, die eine Ecke faſst, welche von 2 rechten und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden gebildet ist.

Ist p eine gerade Zahl, so ist nicht bloſs die Hauptaxe eine gleichendige Axe, sondern je 2 entgegengesetzte Strahlen sind gleichwerthig und bilden eine gleichendige Axe. Von den übrigen Axen sind alle 2fach 2gliedrigen Axen dann *gleichstellig 2endig*, alle 2fach 1gliedrigen und alle 1fach 1gliedrigen aber sind *gerenstellig 2endig*. Ist p eine ungerade Zahl, so ist je ein 2fach 2gliedriger Querstrahl der ersten Art einem solchen der 2ten Art entgegengesetzt und bildet mit ihm eine ungleichendige Queraxe, je 2 zu einer 2fach 2gliedrigen Queraxe senkrechte Querstrahlen bilden dann eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe. Jede andere Axe des Körpers, die in eine durch die Hauptaxe und durch eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe gelegte Ebene fällt, ist eine ebenbildlich gleichendige 1fach 1gliedrige Axe. Alle übrigen 2fach 1gliedrigen sowohl, als auch 1fach 1gliedrigen Axen sind ungleichendige Axen.

Die Menge von ebenbildlichen Stellungen einer jeden einzelnen beliebigen Art ist für jede Gestalt mit gleichstellig 2endiger 2fach pgliedriger Hauptaxe $= 2p$; denn die Producte aus der Anzahl n von ebenbildlichen Strahlen einer Art in die Zahl x, welche die Menge von ebenbildlichen Stellungen beim senkrechten Aufwärtsgerichtetseyn eines solchen Strahles angiebt, ist stets $= 2p$.

Es ist nämlich

	Der Werth von n	Der Werth von x
Bei den 2fach pgliedrigen ebenbildlichen Hauptstrahlen	2	p
Bei den p 2fach 2gliedrigen Querstrahlen jeder der beiden Arten . .	p	2
Bei den 2p einander *ebenbildlichen* 2fach oder 1fach 1gliedrigen Strahlen	2p	1

Auch ist ersichtlich, dafs das Product der sämmtlichen Zahlen in jedem der einzelnen Theile $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Ausdrucks:

„Zu einer Art von Strahlen gehören entweder α) 2 Strahlen, „die 2fach pgliedrig, oder β) p Strahlen, die 2fach 2gliedrig, „oder γ) 2p Strahlen, die 2fach 1 gliedrig, oder δ) 2×2 p „Strahlen, die 1fach 1gliedrig sind"

ein und dieselbe Gröſse habe, denn $2 . 2p = p . 2 . 2 = 2p . 2 . 1 = 2 . 2p . 1$, ein Gesetz, welches von den die Menge der ebenbildlichen Stellungen betreffenden hier sowohl als bei den folgenden Strahlensystemen abhängt.

II. Die Hauptaxe sey gleichstellig 2endig 1fach pgliedrig, z B.

Fig. 241 gleichstellig 2endig 1fach 2gliedrig
— 242 — 2 — 1 — 4 —
— 243 — 2 — 1 — 6 —

Es sind dann vorhanden:

1) Zwei *1fach pgliedrige Hauptstrahlen*, die sich gegenbildlich verhalten (nicht aber ebenbildlich sind); sie haben keine doppelte Flügelfläche.

2) *Querstrahlen.* Jeder Querstrahl ist 2fach 1gliedrig, so dafs der mittlere Querschnitt seine doppelte Flügelfläche enthält. Die einer und derselben Art angehörigen Querstrahlen sind in Beziehung zum ganzen Körper und auch in Beziehung auf das Bild jeder einzelnen Flächenseite des mittleren Querschnitts ebenbildlich. Die Anzahl von Querstrahlen einer Art ist = p. Die Anzahl von Arten der Querstrahlen ist = ∞, d. h. gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden (den zwei benachbarte Querstrahlen einer Art mit einander bilden) faſst, den einen Schenkel des Winkels dazu gerechnet.

3) *Strebestrahlen.* Jeder Strebestrahl ist 1fach 1gliedrig. Die einer und derselben Art angehörigen, auf einerlei Flächenseite des mittleren Querschnittes schief aufstehenden sind ebenbildlich. Die Menge ebenbildlicher Strebestrahlen einer Art ist = p. Die auf entgegengesetzten Flächenseiten jenes Schnittes aufstehenden solchen Strahlen *einer* Art verhalten sich gegenbildlich. Die Anzahl von Strebestrahlen einer Art ist also = 2 p. Die Menge von Arten solcher Strahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fafst, welche von zwei rechten und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden eingeschlossen ist, + der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fafst. Ist p eine gerade Zahl, so sind je zwei einander entgegengesetzte Strahlen gleichwerthig, mithin ist jede Axe gleichendig, und zwar die Hauptaxe gleichstellig 2endig 1fach pgliedrig, jede Queraxe gerenstellig 2endig 2fach 1gliedrig, jede Strebeaxe gerenstellig 2endig 1fach 1gliedrig. Ist p aber ungerade, so ist nur die Hauptaxe gleichstellig 2endig 1fach pgliedrig, jede andere Axe ist aber ungleichendig.

Die Menge ebenbildlicher Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichtetem Hauptstrahle ist hier blofs = 1 . p, so wie auch die Menge von Stellungen jeder einzelnen andern Art = p . 1 ist. Auch hier ist 1 . p = p . 1.

III. Die Hauptaxe sey gerenstellig 2endig 2fach pgliedrig, z. B.

Fig. 244 A u. B.	gerenstellig	2endig	2fach	1gliedrig
— 245	—	2 —	2 —	2 —
— 246 A, B, C, D, E, F.	—	2 —	2 —	3 —

Man hat dann

1) *Zwei Hauptstrahlen*, deren jeder *2fach pgliedrig* ist; sie verhalten sich wie $|\overset{\backsim}{\equiv}|$. Die doppelten Flügelflächen der ersten (oder zweiten) Art für den einen Hauptstrahl fallen mit den doppelten Flügelflächen der zweiten (oder ersten) Art des andern Hauptstrahls in eine und dieselbe doppelte Flügelfläche der ganzen Axe zusammen.

2) 2*p Querstrahlen der ersten Art*, deren jeder in einer der p doppelten Flügelflächen der ersten Art des einen, mithin auch in einer der p doppelten Flügelflächen der andern Art des andern Hauptstrahls liegt und ein *2fach 1gliedriger* ist, dessen doppelte Flügelflächen in jener Flügelfläche des Hauptstrahls

liegen; man könnte einen solchen durch den Ausdruck strebestrahlenartig 2fach 1gliedriger Querstrahl bezeichnen. Die p einen Strahlen der Art sind einander in Beziehung zur obern Körperhälfte, die andern in Beziehung zur untern |≌|, in Beziehung zum *ganzen Körper* sind diese und jene einander |≌|.

3) 2 *p Querstrahlen der 2ten Art*, deren jeder den Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden, den zwei benachbarte Querstrahlen der ersten Art mit einander bilden, halbirt und ein 1fach 2gliedriger Querstrahl ist. Die p einen verhalten sich sowohl in Beziehung zu jeder einzelnen Körperhälfte, als auch in Beziehung zu den p andern als |=|.

3) Die übrigen Querstrahlen, welche 1*fach* 1*gliedrig* sind. Von einer und derselben Art solcher Strahlen sind in Beziehung zu einer jeden der beiden (oberen und unteren) Körperhälften einzeln genommen p unter sich ebenbildliche vorhanden, die zu p andern, ihnen in derselben Beziehung gleichwerthigen, sich gegenbildlich verhalten, für beide Hälften des Körpers zusammen sind 2 p ebenbildliche, mithin 2 . 2 p gleichwerthige 1fach 1gliedrige Querstrahlen einer Art möglich. Die Anzahl der Arten 1fach 1gliedriger Querstrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{4p}$ Graden faſst.

4) Die 2*fach* 1*gliedrigen Strebestrahlen;* sie liegen in den doppelten Flügelflächen der Hauptaxe, die auch für sie die doppelten Flügelflächen enthalten. Die einer Art angehörigen sind |≌| und ihre Anzahl ist 2 p, indem in jeder der 2 p doppelten Flügelflächen nur einer von jeder Art liegt. Die Gesammtheit 2fach 1gliedriger Strebestrahlen, die in jeder doppelten Flügelfläche der Hauptaxe liegt, zerfällt durch den 2fach 1gliedrigen Querstrahl in 2 Abtheilungen, deren eine der doppelten Flügelfläche 1ster Art für den einen Hauptstrahl, die andere der doppelten Flügelfläche 2ter Art für den andern Hauptstrahl angehören. Die Anzahl von Arten für jede Abtheilung ist gleich der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel faſst.

5) Die übrigen *Strebestrahlen,* welche 1fach 1gliedrig sind. Nur eine solche Flügelfläche der Hauptaxe, welche durch einen 1fach 2gliedrigen Querstrahl geht, enthält zwei gleichwerthige 1fach 1gliedrige Strebestrahlen, und zwar ebenbildliche; jede andere einfache Flügelfläche der Hauptaxe aber enthält keine

2gleichwerthige solche Strahlen. Die Anzahl in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlicher 1fach 1gliedriger Strebestrahlen jeder Art ist $= p$, in Beziehung zum ganzen Körper einander ebenbildlich sind je $2p$ solcher Strahlen, die sich zu $2p$ andern ihnen gleichwerthigen wie gegenbildlich verhalten, so daſs die Anzahl 1fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art $= 2 \,.\, 2p = 4p$ ist. Die Gesammtheit der in einer und derselben Hauptflügelfläche liegenden Strebestrahlen wird durch den in derselben Flügelfläche liegenden Querstrahl in 2 Abtheilungen gesondert, daher man auch im Allgemeinen die 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen in 2 Abtheilungen theilt. Die Menge von Arten 1fach 1gliedriger Strebestrahlen beider Abtheilungen zusammengenommen ergiebt sich daher = der zweimal genommenen Menge von Strahlen, welche eine Ecke faſst, die von 2 rechten und einem Winkel von $\frac{360}{4p}$ Graden gebildet ist, + der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel faſst.

Ist p eine gerade Zahl, so ist jede 2fach 1gliedrige Queraxe gleichstellig 2endig, jede 1fach 2gliedrige, so wie jede Queraxe ebenbildlich 2endig, jede in der durch die Hauptaxe und durch die 1fach 2gliedrige Queraxe gelegten Ebene liegende 1fach 1gliedrige Strebeaxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Axe aber ungleichendig. Ist aber p ungerade, so ist jede Axe gleichendig, und zwar die 2gliedrige Queraxe gleichstellig 2endig, jede andere Axe aber gerenstellig 2endig 1fach 1gliedrig. Die Menge ebenbildlicher Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichtetem pgliedrigen Hauptstrahle ist hier, weil die 2 Hauptstrahlen ebenbildlich sind, $= 2 \times p$; wenn einer der p ebenbildlichen 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht aufwärts gerichtet ist, $= p \times 2$, und wieder, wenn irgend einer der $2p$ ≌ (1fach oder 2fach) 1gliedrigen Strahlen senkrecht aufwärts gerichtet ist, $= 2p \times 1$. Es ist aber $2 \times p = p \times 2 = 2p \times 1$.

IV. Die Hauptaxe sey gerenstellig 2endig 1fach pgliedrig, z. B.

Fig. 247 gerenstellig 2endig 1fach 1gliedrig
— 248 — 2 — 1 — 3 —

Man hat in diesem Falle:

1) 2 gleichwerthige sich wie |=|, nicht ≌, verhaltende

1fach pgliedrige Hauptstrahlen (die also keine doppelten Flügelflächen haben).

2) *Querstrahlen*, deren jeder *1fach 1gliedrig* ist; je p sind in Beziehung zu einem Hauptstrahle ≌ und verhalten sich zu den p ihnen gleichwerthigen, die unter sich in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander ≌ sind, in Beziehung zum ganzen Körper als gegenbildlich gleich. Die Anzahl Querstrahlen einer Art ist also $= 2p$, die Anzahl der Arten von Querstrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden faſst, den einen der Schenkel dieses Winkels selbst dazu gezählt.

3) *Strebestrahlen*, deren jeder gleichfalls *1fach 1gliedrig* ist. Die p einen, unter sich in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlichen, verhalten sich zu den p andern, die mit ihnen zu derselben Art gehören (und unter sich in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander ≌ sind), in Beziehung zum ganzen Körper als gegenbildlich gleich. Daher ist die Anzahl von Strebestrahlen einer Art $= 2p$. Die Menge der Arten von Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Summe aus der Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, welche von 2 rechten und einem Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden eingeschlossen ist, und der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel faſst.

Ist p eine gerade Zahl, so ist jede Queraxe ebenbildlich gleichendig, jede Strebeaxe aber ungleichendig. Ist aber p ungerade, so ist jede Axe gleichendig und zwar gleichendig gerenstellig.

Die Menge von ebenbildlichen Stellungen jeder einzelnen Art bei senkrecht aufwärts gerichteten Hauptstrahlen ist, da die beiden Hauptstrahlen nicht ebenbildlich sind, bloſs $= 1 \times p$. Da von sämmtlichen übrigen Strahlen stets nur je p einander ≌ sind und da jeder Strahl, der nicht Hauptstrahl ist, bloſs 1gliedrig ist, so ist bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetseyn von Quer- oder Strebestrahlen irgend einer Art die Anzahl ebenbildlicher Stellungen $= p \times 1$. Es ist $1 \times p = p \times 1$.

V. Die Hauptaxe sey ebenbildlich 2endig 1fach pgliedrig[1], z. B.

1 Gestalten, denen solche Strahlensysteme entsprechen, sind von jeder Art zwei möglich, die sich zu einander gegenbildlich verhalten,

Fig. 249 A. ebenbildlich gleichendig 1fach 2gliedrig

— 249 B. ebenbildlich gleichendig 1fach 3gliedrig.

Es sind dann vorhanden:

1) 2 ebenbildliche 1fach pgliedrige Hauptstrahlen,

2) p ebenbildliche 1fach 2gliedrige Querstrahlen der ersten und

3) p ebenbildliche 1fach 2gliedrige Querstrahlen der zweiten Art. Jeder 2gliedrige Querstrahl der ersten oder 2ten Art ist ein doppelter Strahl der ersten oder 2ten Art in der ebenen Figur, die der mittlere Horizontalschnitt bildet und welche eine 2fach pgliedrige ist.

4) Jeder andere *Querstrahl* ist blofs 1fach 1gliedrig. Die p einen, in Beziehung zum einen Hauptstrahle einander ebenbildlichen, verhalten sich zu den ihnen gleichwerthigen in Beziehung zum andern Hauptstrahle einander ebenbildlichen p andern, wenn man sie in Beziehung zum ganzen Körper vergleicht, als ebenbildlich, während sie in Beziehung auf einerlei Flächenseite des als ebene Figur (d. h. ohne Rücksicht auf Bedeutung im Körper) betrachteten mittleren Querschnittes sich gegenbildlich verhalten. Die Anzahl 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist also = 2 p. Die Anzahl der Arten solcher Strahlen ist = der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden fafst.

5) *Strebestrahlen;* sie sind *1fach 1gliedrig*, je 2p gehören zu einerlei Art und sind in Beziehung zum ganzen Körper ebenbildlich, die p einen sind einander ebenbildlich in Beziehung zum einen, die p andern zum andern Hauptstrahle. Nur in denjenigen Hauptflügelflächen, in welchen 2gliedrige Querstrahlen liegen, sind auch zu beiden Seiten dieses Querstrahls gleichwerthige (namentlich ebenbildliche) Strebestrahlen befindlich. Die Anzahl von Arten der Strebestrahlen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke fafst, welche 2 rechte und einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden hat, + der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel fafst.

ohne ebenbildlich zu seyn; dasselbe gilt daher auch von den Strahlensystemen selbst, die zwei solchen Gestalten angehören. Es ist keine Stellung für die eine Gestalt möglich, in der sie mit der ihr ähnlichen und gleichen congruirte.

Ist p eine gerade Zahl, so sind die 1fach 2gliedrigen Queraxen sowohl als auch die 1fach 1gliedrigen ebenbildlich 2endig, die in eine durch die Hauptaxe und eine 2gliedrige Queraxe gelegte Ebene fallenden Strebeaxen sind ebenbildlich gleichendig, die übrigen aber ungleichendig. Ist p eine ungerade Zahl, so ist jede 1fach 2gliedrige Queraxe ungleichendig, jede auf eine 2gliedrige Queraxe senkrechte 1fach 1gliedrige Queraxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Queraxe aber ist ungleichendig; jede in einer durch die Hauptaxe und durch eine ebenbildlich gleichendige Queraxe gelegten Ebene liegende Strebeaxe ist ebenbildlich gleichendig, jede andere Strebeaxe aber ist ungleichendig.

Die Menge der ebenbildlichen Stellungen für die senkrecht stehende Hauptaxe ist $= 2$ p, weil die Hauptaxe aus 2 ebenbildlichen pgliedrigen Hauptstrahlen besteht; bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetseyn eines 2gliedrigen Querstrahls $= p \times 2$, weil die Anzahl 2gliedriger Querstrahlen einer Art $=$ p ist, und endlich bei dem senkrechten Aufwärtsgerichtetseyn eines 1gliedrigen Quer- und Strebestrahles $= 2p \times 1$, weil je 2p der 1gliedrigen Strahlen einander ebenbildlich sind und jeder nur eine einzige aufrechte Stellung jeder Art gestattet. Es ist $2 \times p = p \times 2 = 2p \times 1$.

VI. Die Hauptaxe sey ungleichendig 2fach pgliedrig, z. B.

Fig. 250 ungleichendig 2fach 2gliedrig,
— 251 ungleichendig 2fach 3gliedrig.

Es ist dann vorhanden:

1) Ein *oberer*
2) Ein *unterer* } *2fach pgliedriger Hauptstrahl,* beide Hauptstrahlen ungleichwerthig.

3) p Querstrahlen der ersten Art,
4) p Querstrahlen der zweiten Art, } welche strebestrahlenartig 2fach 1gliedrig sind. Die von einerlei Art sind also einander $|\cong|$.

5) Die übrigen Querstrahlen, deren jeder 1fach 1gliedrig ist; je p sind ebenbildlich und gleichwerthig mit p andern unter sich ebenbildlichen, zu denen sie sich gegenbildlich verhalten. Die Anzahl 1fach 1gliedriger Querstrahlen einer Art ist also

$= 2p$. Die Menge der Arten derselben ist gleich der Menge der Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{2p}$ Graden faſst.

6 u. 7) Die 2fach 1gliedrigen Strebestrahlen, *die* (gleich den 2fach 1gliedrigen Querstrahlen) *in die doppelten Hauptflügelflächen der ersten oder der zweiten Art* fallen. Die Anzahl |≌| 2fach 1gliedriger Strebestrahlen einer Art ist p, die Menge von Arten für jede dieser beiden Abtheilungen 2fach 1gliedriger Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Anzahl von Strahlen, die ein rechter Winkel faſst.

8) Die *1fach 1gliedrigen Strebestrahlen*, von denen je p unter sich ebenbildliche mit p andern unter sich ebenbildlichen, die sich zu ihnen gegenbildlich verhalten, zu einerlei Art gehören, so daſs die Anzahl solcher Strahlen einer Art $= 2p$ ist. Die Menge von Arten 1fach 1gliedriger Strebestrahlen ist gleich dem Doppelten der Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, welche von 2 rechten und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden gebildet ist. Ist p eine gerade Zahl, so sind die 2fach 1gliedrigen Queraxen gleichstellig 2endig, die andern Queraxen aber sind ebenbildlich gleichendig. Die Strebeaxen sind ungleichendig. Ist p ungerade, so sind bloſs die auf die 2fach 1gliedrigen Queraxen senkrechten 1fach 1gliedrigen Queraxen gleichendig, und zwar gleichstellig 2endig, alle übrigen Axen aber sind ungleichendig.

Die Menge der ebenbildlichen Stellungen für eine Gestalt mit ungleichendiger 2fach pgliedriger Hauptaxe ist für den senkrecht aufgerichteten Hauptstrahl der einen Art $= 1 \times p$, für einen senkrecht aufwärts gerichteten 1fach 1gliedrigen Strahl aber, weil immer nur p ebenbildliche Strahlen der Art vorhanden sind, $= p \times 1$; $p \times 1 = 1 \times p$.

VII. Die Hauptaxe sey ungleichendig 1fach pgliedrig, z. B.

Fig. 252 A. ungleichendig 1fach 1gliedrig
— 252 B. — 1 — 2 —
— 252 C. — 1 — 3 —
— 252 D. — 1 — 4 —

So hat man

1) einen *Hauptstrahl der ersten Art*,
2) einen *Hauptstrahl der zweiten Art*,
} deren jeder ein 1fach pgliedriger dem andern nicht gleichwerthiger Strahl ist.

3) *Querstrahlen.* Jeder Querstrahl ist 1fach 1gliedrig; je p eine Art ausmachende Querstrahlen sind einander ebenbildlich, die Anzahl der Arten von Querstrahlen ist = der Menge von Strahlen, die ein Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden faſst, den einen Schenkel dazu gezählt.

4) *Strebestrahlen.* Sie sind 1fach 1gliedrig; je p ebenbildliche machen eine Art aus. Die Anzahl der Arten ist gleich dem Doppelten der Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, welche von 2 rechten Winkeln und einem Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden eingeschlossen ist, + dem Doppelten der Menge von Strahlen, die ein rechter Winkel faſst. Ist p gerade, so sind alle Queraxen ebenbildlich gleichendig, die Strebestrahlen aber sind ungleichendig. Ist p ungerade, so sind alle Axen ungleichendige. Die Menge ebenbildlicher Stellungen einer solchen Gestalt ist so, wie bei ungleichendiger 2fach pgliedriger Hauptaxe.

Ist p = ∞, so fällt der Unterschied zwischen 2fach pgliedrig und 1fach pgliedrig weg, so wie auch die Unterschiede hinsichtlich der Art der Gleichendigkeit, und man hat nur

A. Gestalten mit gleichendiger und zwar gleichstellig 2endiger unendlichgliedriger Hauptaxe, z. B. Doppelkegel;

B. Gestalten mit ungleichendiger unendlichgliedriger Hauptaxe, z. B. einfacher Kegel.

Abhängigkeit der Axen eines Axensystems von einander.

Wenn bei einer hauptaxigen Gestalt die Beschaffenheit der Axe selbst unbekannt, jedoch eine Axenart derselben gegeben ist, so daſs man weiſs:

1) wie viel gleichwerthige und dann auch wie viel ebenbildliche Axen dieser gegebenen Art im Körper vorhanden sind;

2) ob jede der gegebenen Axen 1fach oder 2fach mgliedrig sey, so daſs m die gegebene Zahl 1 oder 2 bedeutet;

3) ob jede solche gegebene Axe entweder a) eine gleichendige sey, und dann in welcher Art die Gleichendigkeit bei ihr statt finde, oder b) eine ungleichendige, und dann ob die zu suchende Hauptaxe selbst eine gleichendige sey oder nicht, so kann man den Charakter der Hauptaxe sowohl, als auch die

Beschaffenheit des ganzen Strahlen- oder Axensystems finden. Man wisse z. B., in einer hauptaxigen Gestalt seyen vorhanden 3 gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, die demnach einander ebenbildlich sind, so giebt 1) die Anzahl 3 zu erkennen, dafs man es nicht mit einer Hauptaxe zu thun habe; 2) dafs diese Axen, wenn sie Queraxen sind, strebestrahlenartig 2fach 1gliedrig seyn müssen; denn wären sie querstrahlenartig 2fach 1gliedrig und dennoch gerenstellig gleichendig, so müfste ihre Anzahl eine gerade seyn, was die Zahl 3 nicht ist. Sie können also blofs aus 2fach 1gliedrigen Strebestrahlen oder aus strebestrahlenartigen 2fach 1gliedrigen Querstrahlen bestehn. Daraus folgt dann wieder, dafs jeder der beiden Hauptstrahlen 3 doppelte Flügelflächen der 1sten und 3 doppelte Flügelflächen der 2ten Art haben müsse, und zuletzt, dafs die Hauptaxe eine 2fach 3gliedrige gerenstellig gleichendige seyn müsse.

Vereinigung der hauptaxigen Strahlensysteme in höhere Abtheilungen.

Berücksichtigt man die Anzahl gleichwerthiger Axen oder Axen von einer Art und nennt man diese im Allgemeinen x, so ist leicht einzusehen, dafs in jedem Strahlensysteme wenigstens 2 Arten von Queraxen vorkommen müssen, für welche x den kleinsten Werth hat, der in dem fraglichen Systeme für andere, als die einheitliche Hauptaxe möglich ist. Es sey dieser kleinste Werth von $x = m$, so ist in jedem hauptaxigen Systeme der Werth von x:

für die Hauptaxe $= 1$,
für die Queraxe erster Art $= m$,
für die Queraxe zweiter Art $= m$,
für die übrigen Queraxen $= 2m$ oder $= m$,
für die Strebeaxen $= m$ oder $2m$ oder $4m$.

Ist blofs für 2 Arten von Queraxen $x = m$, so sind diese Queraxen von den sämmtlichen übrigen Axen unterschieden, hierdurch sowohl, als auch durch höhere, ihnen zustehende Regelmäfsigkeit, und es ist *nothwendig*, sie als vorzüglich wichtige Axen zu betrachten und vor den andern minder wichtigen Axen auszuzeichnen. Ist für alle Arten von Queraxen $x = m$, so ist es möglich, zwei von diesen Arten als die wichtigern zu betrachten, gleich wie es möglich war, unter mehreren einheitli-

chen Axen *eine* als die Hauptaxe anzusehen. Auch leuchtet es von selbst ein, daſs, wenn zwei Strahlensysteme gegeben sind, die mit einander verglichen werden sollen, und für beide der Werth von m gleich groſs ist, im einen Systeme aber die Queraxen erster und zweiter Art *nothwendige*, im andern dagegen zu *wählende* sind, man in diesem die Lage der beiden Arten von Queraxen gegen einander so zu wählen habe, wie sie in jenem gegeben ist. Nennt man daher die Queraxen erster und zweiter Art die Messungsqueraxen (Querdimensionsaxen) und faſst man diese beiden Arten von Axen und die Hauptaxe unter dem gemeinschaftlichen Namen *Messungsaxen* zusammen, so sieht man leicht ein, daſs die hauptaxigen Strahlensysteme zu mehreren in Familien vereint werden können, so daſs diejenigen, welche einerlei Anzahl von Messungsqueraxen einer Art[1] besitzen, zu einer und derselben Familie gehören und 1- und mmaſsige Gestalten benannt werden können.

Wenn m ungerade ist, so bildet je eine Queraxe zweiter Art mit einer solchen erster Art einen rechten Winkel; ist aber m gerade, so bilden zwei gleichnamige Queraxen rechte Winkel mit einander; je eine solche erster Art mit einer der 2ten aber bildet einen halben rechten Winkel. Der Werth von p ist entweder = m oder = 2m.

Als 1- und 3maſsige Strahlensysteme sind zu betrachten:

1) das [gleichstellig 2endige 2fach]	6gliedrige	System	
2) das [gleichstellig 2endige] 1fach	6	—	—
3) das ebenbildlich 2endige [1fach]	6	—	—
4) das ungleichendige [2fach]	6	—	—
5) das ungleichendige 1fach	6	—	—
6) das gleichstellig 2endige 2fach	3	—	—
7) das gleichstellig 2endige 1fach	3	—	—
8) das [gerenstellig 2endige 2fach]	3	—	—
9) das [gerenstellig 2endige] 1fach	3	—	—
10) das ebenbildlich 2endige 1fach	3	—	—
11) das ungleichendige [2fach]	3	—	—
12) das ungleichendige 1fach	3	—	—

Setzt man hier statt 3gliedrig den allgemeinen Ausdruck (2n+1)-gliedrig und statt 6gliedrig 2 (2n+1)gliedrig, so hat man die 12 Strahlensysteme, welche 1- und mmaſsig sind, wenn m eine

1 Folglich auch der andern Art.

ungerade Zahl = (2n + 1) ist. Für n = 0 oder m = 2n + 1 = 1 hat man die 1- und 1mafsigen Systeme [1].

Als 1- und 2mafsige Strahlensysteme sind zu betrachten:

1) das [gleichstellig 2endige 2fach] 4gliedrige System
2) das [gleichstellig 2endige] 1fach 4 — —
3) das ebenbildlich 2endige [1fach] 4 — —
4) das ungleichendige [2fach] 4 — —
5) das ungleichendige 1fach 4 — —
6) das gerenstellig 2endige [2fach] 2 — —
7) das gerenstellig 2endige 1fach 2 — —

Setzt man statt des Ausdrucks 2gliedrig den allgemeineren 2ngliedrig und statt 4gliedrig den Ausdruck 4ngliedrig, so hat man die 7 Strahlensysteme, welche 1- und mmafsig sind, wenn m eine gerade Zahl = 2n ist. Dafs hier von den 2gliedrigen (2ngliedrigen) nur die gerenstellig 2endigen vorkommen und also hier nur 7 Systeme aufgezählt werden, während, wenn m ungerade ist, die Anzahl 12 beträgt, liegt darin, dafs bei den übrigen 2gliedrigen Strahlensystemen nur je eine Messungsaxe einer Art vorhanden ist, und nicht 2 einander gleichwerthige Messungsaxen erster Art, und 2 gleichwerthige solche zweiter Art, oder allgemein, dafs bei den übrigen 2ngliedrigen Strahlensystemen nur n gleichwerthige Queraxen erster Art und n solche gleichwerthige Queraxen zweiter Art vorhanden sind [2].

1 Von den 1- und 1mafsigen Systemen ist das 2te mit dem 8ten, das 4te mit dem 6ten, das 5te mit dem 10ten, das 7te mit dem 11ten so verwandt, dafs das eine an die Stelle des andern gesetzt werden könnte, wenn es erlaubt wäre, die Hauptaxe des einen mit einer andern einheitlichen Axe desselben zu vertauschen. Dafs dieses jedoch nicht überall erlaubt sey, geht daraus hervor, dafs die menschliche Gestalt, wenn man die rechte und linke Hälfte als gleichwerthig betrachtet und von den Verschiedenheiten im inneren Baue absieht, einem Strahlensysteme entspricht, welches eine ungleichendige 2fach 1gliedrige Hauptaxe hat, welche von jedem unmittelbar für die richtige wird angesprochen werden, obgleich andere einheitliche Axen vorhanden sind, welche, rein mathematisch genommen, eben so gut zur Hauptaxe gewählt werden könnten, als diese.

2 Dafs dessen ungeachtet Verhältnisse statt finden können, gemäfs welchen ein gleichstellig 2endiges 2fach 2gliedriges Strahlensystem z. B. in sehr naher Verwandtschaft stehen könne mit einem gleichstellig 2endigen 2fach 4gliedrigen, ist von selbst einleuchtend, auch wird dieses in der Folge berührt werden.

Da es von Nutzen seyn dürfte, kürzere Benennungen für die wichtigsten Strahlensysteme zu haben, so werde festgesetzt, dafs, wenn der Werth von p bekannt ist, man also weifs, ob p gerade ist oder ungerade, folglich auch bekannt ist, ob die gleichendigen Axen vorherrschen oder die ungleichendigen, diejenigen Systeme, bei denen die gleichendigen Axen vorherrschen, als die wichtigeren angesehen werden und eine abgekürztere Benennung erhalten sollen. Dieses kann dadurch geschehen, dafs man den Theil der Benennung, welcher bei der hier beispielsweise stattgefundenen Aufzählung der 1- und 3mafsigen Gestalten und der 1- und 2mafsigen in [] eingeschlossen ist, vernachlässigt. Dieselbe Art der Abkürzung, wie bei den 1- und 3mafsigen Systemen, findet natürlich statt bei allen 1- und (2n + 1) mafsigen, folglich auch bei den 1- und 1mafsigen Systemen, und eben so tritt die bei den 1- und 2mafsigen Systemen angedeutete Abkürzung für alle 1- und 2nmafsige Systeme ein.

Flächen, Kanten und Ecken an Gestalten.

Wenn einer Gestalt ein Strahlensystem entspricht, so kann man umgekehrt die Bewegungsflächen und Kanten der Gestalt nach den Strahlen jenes Systems benennen, die auf ihnen senkrecht sind, so wie die Ecken nach den den Eckpunct treffenden Strahlen. Wegen der Begrenzungsflächen ist weitere Erläuterung überflüssig, da von ihnen im Wesentlichen dasjenige gilt, was von den Schnittebenen in einem Körper gesagt wurde. Die Kanten anlangend, so ist in ihnen ein Paar von Richtungen in der Linie der Kante selbst gegeben, welche als abgesondert betrachtet werden müssen. Die Kanten können daher blofs seyn

1) *2fach 2gliedrige Kanten,* wenn auf ihnen ein 2fach 2gliedriger Strahl des Strahlensystems, das dem Körper entspricht, senkrecht ist. Man kann von einer solchen Kante sagen, sie sey ebenbildlich gegenbildlich gleichendig und ebenbildlich gegenbildlich gleichseitig.

2) *1fach 2gliedrige Kanten,* die senkrecht auf 1fach 2gliedrigen solchen Strahlen sind. Dergleichen Kanten sind ebenbildlich gleichendig, ebenbildlich gleichseitig.

3) *2fach 1gliedrige Kanten,* die senkrecht auf 2fach 1gliedrigen solchen Strahlen sind; sie zerfallen in

a) *ungleichendige* oder, was dasselbe ist, gegenbildlich *gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten* und in

b) gegenbildlich *gleichendige* oder, was damit einerlei ist, *ungleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten.*

Bei jenen geht die Ebene der doppelten Flügelflächen des 2fach 1gliedrigen Strahles im Körper, auf welchen die Kante senkrecht ist, durch die Kante selbst, so daſs diese in ihr liegt; bei diesen ist die Kante senkrecht auf jener Ebene.

4) *1fach 1gliedrige Kanten* senkrecht auf 1fach 1gliedrigen Strahlen des dem Körper entsprechenden Strahlensystems; sie sind weder gleichendig noch gleichseitig.

Eine senkrecht stehende Säule mit regelmäſsig sechsseitiger oberer und unterer Horizontalfläche hat 6 verticale Kanten, welche dem Falle 1, und 12 horizontale Kanten, welche dem Falle 3b entsprechen. Ein Parallelepipedon, welches von 6 gleichen und ähnlichen Rauten umschlossen ist, hat in Bezug auf das ihm entsprechende Strahlensystem 6 Kanten, die dem Falle 2, und 6 Kanten, die dem Falle 3,a entsprechen. Bei einem von vier ungleichen ungleichschenkligen Dreiecken umschlossenen Körper ist jede der Kanten eine 1fach 1gliedrige. Eine jede Ecke ist aus denselben Gründen im Allgemeinen entweder eine 1fach pgliedrige oder eine 2fach pgliedrige. Die 1fach pgliedrige ist wieder eine p- oder $2\times$p- oder $3\times$p- oder n$\times$pkantige, je nachdem in ihr 1 oder 2 oder 3... oder n verschiedene p-heiten von Kanten zusammentreffen, von denen die zu jeder p-heit gehörigen einander ebenbildlich sind. Die 2fach pgliedrige Ecke ist eine pkantige oder $2\times$ pkantige oder tkantige u. s. w., allgemein eine n $\times$ tkantige oder n $\times$ t und pkantige oder n $\times$ t und $2\times$ pkantige; Ausdrücke, welche, wenn man statt des Beiworts *kantige* setzt das Wort *winklige,* den Schnittebenen senkrecht auf den Strahl des Strahlensystems, dem jene Ecke angehört, entsprechen, wenn sämmtliche Kanten der Ecke von der Schnittebene getroffen werden. Der Buchstabe t bedeutet eine Zahl $=$ 2p von Kanten, wovon die p einen unter sich ebenbildlich und zu den p andern, ihnen gleichwerthigen, gegenbildlich sind. Die Zahl n bedeutet die Menge solcher verschiedenwerthiger t-heiten, der Buchstabe p in obiger Formel aber bezieht sich auf die Menge von ebenbildlich gegenbildlichen Kanten. Kommt der Ausdruck $2\times$p vor, so sind 2 verschiedenwerthige p-heiten solcher Kanten an der Ecke zu finden.

Die wichtigsten 2fach pgliedrigen Ecken sind die pkantigen und die 2 × pkantigen. Von den 2fach 2gliedrigen insbesondere sind wichtig die 2×2kantigen, die 4kantigen u. s. w.; von den 2fach 1gliedrigen die 2- und 1kantigen, die 2- und 2×1kantigen, die 2 × 2kantigen, die 2×2- und 1kantigen, die 2×2- und 2×1kantigen u. s. w.

Jede Fläche einer hauptaxigen Gestalt aber ist entweder senkrecht auf einen Hauptstrahl, und dann heiſst sie Horizontalfläche oder *Tafelfläche*, oder senkrecht auf einen Querstrahl, und dann heiſst sie Verticalfläche oder *Säulenfläche, Seitenfläche, Seitenwand*, oder endlich senkrecht auf einen Strebestrahl, und dann heiſst sie *Strebefläche* oder *schiefe Wand*.

Eine Ecke, in deren Eckpuncte die Hauptaxe sich endigt, heiſst ein *Scheitel* der Gestalt (*vertex*, Polecke, Spitze u. s. w.). Eine Gestalt hat also höchstens 2 Scheitel.

Kanten, die im Scheitel zusammenlaufen, heiſsen *Scheitelkanten* (*crura verticis*, Polkanten). Kanten, welche die Flächen des einen Scheitels von denen des andern trennen, heiſsen *Mittelkanten* (*acies mediae*). Bildet die Gesammtheit der Mittelkanten mit ihren Enden aneinanderstoſsend einen in sich selbst zusammenlaufenden Kantenring, so heiſst dieser, gleichviel ob jene Kanten in einerlei Ebene liegen oder ob sie ein Zickzack bilden, *Rand* der Gestalt (*margo*) und die Kanten, die ihn bilden, heiſsen *Randkanten* (*acies marginales*). Ecken, die dem Rande anliegen, heiſsen *Randecken* (*acumina marginalia*). Ecken, die den Mittelkanten anliegen, heiſsen *Mittelecken* (*acumina media*). Kanten parallel der Hauptaxe heiſsen *Seitenkanten* oder *Säulenkanten* (*acies laterales*). Trifft ein Ende der Hauptaxe in eine einzige Kante, so heiſst diese Kante *Gipfelkante* (*acies culminalis*).

Gestalten, die gegebenen hauptaxigen Strahlensystemen entsprechen.

Bisher wurde (zum Behuf der Auffindung sämmtlicher denkbarer Arten von hauptaxigen Strahlensystemen) die Gestalt als das Gegebene betrachtet und für sie dasjenige körperliche Strahlensystem aufgesucht, welches ihr entspricht, wenn man alles, was an ihr möglicher Weise als gleichwerthig betrachtet werden kann, wirklich als gleichwerthig betrachtet. Es wurde daher für jede hauptaxige Gestalt ein *bestimmtes Strahlensystem* auf-

gefunden, *das ihr entspricht.* Geht man aber umgekehrt von einem gegebenen Strahlensysteme aus und sucht die ihm möglicher Weise entsprechenden Gestalten zu finden, so ist einleuchtend, dafs innerhalb bestimmter Grenzen eine und dieselbe Gestalt verschiedenen Strahlensystemen entsprechen könne; denn es ist hier nun nicht mehr blofs die Rede von der Gleichwerthigkeit der Theile eines Körpers an sich, sondern von dieser Gleichwerthigkeit in Beziehung zu dem bestimmten gegebenen Strahlensysteme, welche letztere Gleichwerthigkeit die erste bei den betreffenden Theilen voraussetzt, während nicht umgekehrt Theile eines Körpers, die an sich gleichwerthig sind, auch sich als gleichwerthig verhalten müssen in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme [1].

Man erhält aber Gestalten, die einem gegebenen Strahlensysteme entsprechen, wenn man Ebenen so um den Mittelpunct desselben herumlegt, dafs, wenn eine solche Ebene einen bestimmten Strahl in einer bestimmten Entfernung vom Strahlenmittelpuncte so schneidet, dafs sie auf diesem Strahle senkrecht ist, auch jeder andere, dem erwähnten gleichwerthige, Strahl eben so durch eine Ebene geschnitten wird. Die Menge von Strahlenarten, welche auf solche Weise als Normalen von Begrenzungsebenen auftreten, bedingt daher die Menge von Flächenarten, welche eine Gestalt haben kann; die Menge von Strahlen einer Art bestimmt die Anzahl der gleichwerthigen Be-

1 Denn gleichwie man die Zahl 6 betrachten kann nicht blofs als ein Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe 6, 12, 18, 24..., deren Hauptcharakter sie bedingt, sondern auch als solches der dreiheitlichen 3, 6, 9, 12..., ferner der zweiheitlichen 2, 4, 6, 8... und endlich der einheitlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7..., wobei sie als ein bedingtes Glied blofs erscheint, während man nicht umgekehrt die Zahl 3 oder 4 u. s. w. als Glied der sechsheitlichen Zahlenreihe betrachten kann, so auch kann man eine Gestalt, die ihrer Beschaffenheit nach als eine solche mit 6gliedriger Hauptaxe zu betrachten ist, auch ansehn als eine solche mit 3gliedriger oder 2gliedriger oder 1gliedriger Hauptaxe, nicht aber umgekehrt. Gleichwie ferner die 2fach pgliedrige ebene Figur sich als eine 1fach pgliedrige betrachten liefs, eben so läfst sich auch eine Gestalt mit 2fach pgliedriger Hauptaxe ansehen als eine mit 1fach pgliedriger Axe. Die verschiedenen Arten des Gleichendigseyns der Hauptaxe sind ebenfalls nur Arten des Bestehens aus zwei gleichnamigen nicht nothwendig gleichwerthigen Strahlen.

grenzungsflächen der Gestalt, auf deren Flächen jene Strahlen senkrecht sind.

Bei keinem der hauptaxigen Strahlensysteme wird durch bloſse Tafelflächen oder durch bloſse Seitenwände eine Gestalt ringsum begrenzt. Bei einigen Systemen reichen auch die Strebeflächen einer, selbst zweier und mehrerer Arten nicht hin, einen Raum ringsum einzuschlieſsen. Wenn man daher sagt, eine *einfache*, einem bestimmten Strahlensysteme entsprechende, *Gestalt* (*forma simplex*) sey eine solche, die durch Flächen von *einerlei* Art begrenzt ist, d. h. deren Normalen Strahlen von einerlei Art in dem gegebenen Strahlensysteme sind, so daſs jeder der dieser Art angehörigen Strahlen in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte durch eine ihm angehörige Fläche, für die er Normale ist, geschnitten wird, so ergiebt sich von selbst, daſs man eine Gestalt in Beziehung auf ein in ihr gegebenes Strahlensystem *zusammengesetzte Gestalt* (*forma composita*, Combinationsgestalt) nennen wird, wenn sie von Flächen verschiedenen Werthes, in Beziehung auf jenes Strahlensystem, umschlossen ist. Um eine zusammengesetzte Gestalt in ihre einfachen Gestalten zu zerlegen, beachtet man die Gesammtheit von Flächen einer jeden Art an derselben als eine für sich bestehende einfache Gestalt ausmachend und denkt sich deren Flächen so weit verlängert, daſs sie, wo möglich, eine endlich rings umgrenzte oder eine in den möglichst wenigsten Richtungen hin unbegrenzte Gestalt bildet, die dem Strahlensysteme entspricht. Sind auf solche Weise mehrere Gestalten, die diesem Gesetze entsprechen, möglich, so muſs anderswoher bekannt seyn, welche davon man als die fragliche einfache Gestalt zu betrachten hat. In der Regel pflegt man von zwei derartigen einander umschlieſsenden Gestalten zunächst die innere aufzufassen[1]. Jede einfache hauptaxige Gestalt ist sonach entweder eine *Tafel* (*polepipedum*), oder ein *Seitenwandner* (*orthepipedum*), oder ein *Schiefwandner* (*clinepipedum*).

1 Einfache Gestalten, die nicht ringsum endlich begrenzt sind, sucht man sich am zweckmäſsigsten dadurch zu versinnlichen, daſs man sie an zusammengesetzten Gestalten aufsucht und aus diesen durch Zerlegung entwickelt; so betrachtet man auch Raumtheile, die in einer oder in mehreren Richtungen eine unendliche Ausdehnung haben, wenn sie nur nach einer oder nach mehreren Richtungen hin durch Ebenen begrenzt sind, als Gestalten oder Körper.

Da Winkel von 0° oder 90° gleichfalls Winkel sind, so ist einleuchtend, dafs das, was im Allgemeinen für einen Strebestrahl gilt, der mit der Hauptaxe einen Winkel = x bildet, mit der entsprechenden Veränderung auch gelten müsse für den Werth von x = 0° oder = 90°, d. h. für einen Querstrahl oder Hauptstrahl. Die schiefwandigen Gestalten sind sonach die allgemeineren in jedem Systeme, die Tafelflächner und Seitenflächner aber sind nur als besondere Fälle zu betrachten. Da, wo Strebestrahlen vorkommen, die 2fach 1gliedrig sind, neben solchen, die 1fach 1gliedrig sind, werden aus gleichen Gründen Gestalten, deren Flächen senkrecht zu 2fach 1gliedrigen Strebestrahlen sind, als bestimmte Varietäten solcher Gestalten betrachtet werden können, deren Flächen senkrecht auf 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen stehen.

Einfache Gestalten mit gleichstellig 2endig 2fach pgliedriger Hauptaxe; gleichstellig 2endig 2fach pgliedrige Gestalten.

Es liegen in jeder hier möglichen Hauptflügelfläche je 2 Fig.
gleichwerthige Strebestrahlen so, dafs der Querstrahl den Win- 253.
kel, den sie bilden, halbirt. Es sey a a′ die Hauptaxe, c r ein Querstrahl, die Ebene durch r c und a a′ folglich eine Hauptflügelfläche, c p und c p′ seyen zwei in ihr liegende gleichlange, gleichwerthige gegebene Strahlen, a r sey in p senkrecht auf c p, so wird durch a r eine auf c p senkrechte Ebene gelegt werden können und ebenso durch a′r eine auf c p′ senkrechte. Diese beiden Ebenen schneiden sich mit a r a′ in dem Puncte r so, dafs sie dort Ecken bilden, die 2 rechte Kanten r a und r a′ haben. Die 3te Kante steht sonach senkrecht auf der Ebene der beiden rechten Kanten, d. h. auf a r a′ ist also eine horizontalliegende Kante, wenn a r a′ eine Verticalebene ist. Diese Querkante ist auch senkrecht auf dem Querstrahle c r.

Es sey nun zuerst c r ein Querstrahl der ersten Art, so sind p dergleichen Strahlen vorhanden; es entsteht daher eine Anzahl = p von Querkanten, die im mittlern Querschnitte liegen. Ist p = 3 oder gröfser, so ist die von p solchen Kanten umschlossene ebene Figur im mittleren Querschnitte eine geschlossene und zwar ein regelmäfsiges pseit. Somit kann man sagen: die fragliche Gestalt bilde einen in der mittleren Horizontalebene liegenden Rand, einen *ebenen Rand* um die Hauptaxe, sie sey ein *Ebenrandner (dipyramis*, Doppelpyramide), und zwar, da

Fig. ihre t (= 2p) Flächen ebenbildlich sind, ein tflächiger Eben-
254 randner (*dipyramis t.edrica*); z. B. 6flächiger Ebenrandner oder
A. B. *dipyramis hexaedrica*, 8flächiger Ebenrandner oder *dipyramis octaedrica*, quadratischer Achtflächner, quadratisches Oktaeder, gleichschenkliges Oktaeder, viergliedriges Oktaeder, gleichschenklig vierseitige Pyramide, tetragonale Pyramide, octaèdre
C. à base carrée etc., 12flächiger Ebenrandner, *dipyramis dodecaedrica*, sechsseitige Doppelpyramide, Bipyramidaldodekaeder, dodecaèdre bipyramidal, sechsgliedrige Doppelpyramide, Dihexaeder, Quarzoide, gleichschenklige sechsseitige Pyramide, Dirhomboeder u. s. w.

Jeder tflächige Ebenrandner, als Gestalt an sich betrachtet, hat:

1) p obere und p untere |≌| sich verhaltende Flächen, welche 2fach 1gliedrige 2- und 1seitige Figuren oder Keilflächen sind;

2) 2 |≌| sich verhaltende Scheitel a), welche pkantige 2fach pgliedrige Ecken sind;

3) p |≌| sich verhaltende 2 ✕ 2kantige 2fach 2gliedrige Randecken e;

4) p dem oberen und p dem unteren Scheitel angehörige |≌| *Scheitelkanten* s, welche gleichseitige ungleichendige 2fach 1gliedrige Kanten sind;

5) p Randkanten r, welche |≌| und 2fach 2gliedrige Kanten sind.

Wegen der gleichschenkligen Dreieckflächen kann man einen solchen Körper auch einen gleichschenkligen Ebenrandner, *dipyramis isosceloidea*, nennen, wenn man die Zahl der Flächen nicht anzugeben beabsichtigt. Die Hauptflügelflächen der ersten Art liegen hier so, daſs sie auf den Randkanten in deren Halbirungspuncte senkrecht sind. Die Querstrahlen der 2ten Art, folglich auch die Hauptflügelflächen der 2ten Art, gehen durch die Randecken.

Flächen senkrecht auf Strebestrahlen in Hauptflügelflächen der 2ten Art liefern unter ähnlichen Bedingungen gleichfalls einen tflächigen Ebenrandner, und zwar einen solchen der 2ten Stellung, wenn man jenen als einen der ersten Stellung betrachtet und die Lage des Strahlensystems als unverändert sich denkt. Bei ihnen gehen die Querstrahlen der ersten Art durch die Randecken, folglich die der 2ten Art durch die Halbirungspuncte

der Randkanten. Ist ein tflächiger Ebenrandner einem gegebenen 2fach pgliedrigen Strahlensysteme entsprechend gebildet, so ist auch umgekehrt das ihm entsprechende Strahlensystem ein 2fach pgliedriges, das mit jenem übereinstimmt. Denkt man sich eine Reihe von tflächigen Ebenrandnern von gleicher Stellung und von gleich grofsem Rande, aber verschieden grofser Hauptaxe, so wird auch der Fall eintreten müssen, dafs die Hauptaxe $= \infty$ ist, und man hat dann eine pflächige Säule *prisma p.edrum* (pseitige Säule), z. B. 3flächige Säule (*prisma triedrum*, trigonales Prisma, dreiseitige Säule u. s. w.); 4flächige Säule (*prisma tetraedrum*, tetragonales Prisma, quadratische Säule u. s. w.); 6flächige Säule (*prisma hexaedrum*, hexagonales Prisma, sechsseitige Säule u. s. w.).

Die pflächige Säule, insofern sie eine gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige Gestalt ist, hat p Seitenflächen, welche einander ebenbildlich gegenbildlich sind und die Bedeutung 2fach 2gliedriger Figuren haben, indem sie auf 2fach 2gliedrigen Querstrahlen der einen oder der andern Art senkrecht sind, eine Bedeutung, die namentlich dann erkennbar ist, wenn mit diesen Flächen der Säule noch andere Flächen zu einer ringsum endlich[1] begrenzten gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalt verbunden sind. Sie hat ferner p Seitenkanten, welche einander |≌| sind und die Bedeutung 2fach 2gliedriger Kanten haben (indem sie auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht sind). Auch dieser Charakter der Seitenkanten spricht sich an zusammengesetzten Gestalten, an denen die Flächen einer solchen Säule vorkommen, aus.

Es sey ferner 2tens a a′ die Hauptaxe, c r ein 2fach 1gliedriger Querstrahl, so ist die durch a a′ und c r gehende Flügelfläche der Hauptaxe eine einfache. c p und c p′ seyen wieder zwei in ihr liegende gleichwerthige Strebestrahlen und a r so wie a′r seyen die darauf senkrechten Flächen, so ist ersichtlich, Fig. 253.

1 Jede Säule an sich ist nämlich in der Richtung der Enden der Hauptaxe unbegrenzt und wird blofs von Flächen anderer Art, als die Säulen oder Seitenflächen sind, in zusammengesetzten Gestalten begrenzt. Häufig jedoch wird die Säule als eine durch horizontale oder schiefe Endflächen begrenzte betrachtet und so die zusammengesetzte Gestalt nach der wichtigsten in ihr enthaltenen einfachen benannt, was in allen den Fällen, in welchen hierdurch keine Mifsverständnisse entstehen, erlaubt seyn dürfte.

daſs auch hier Mittelkanten entstehen, die im mittleren Querschnitte liegen, und (da ihre Anzahl = der jener einfachen Hauptflügelflächen = 2p = t ist) wenn p = 2 oder gröſser, mithin t = 4 oder gröſser ist, einen ebenen Rand bilden müssen, so daſs auch die auf solche Weise entstehende Gestalt ein Ebenrandner (*dipyramis*) ist, aber die Anzahl seiner Flächen ist = 2×t, daher man ihn 2×*tflächigen Ebenrandner* (*di-*
Fig. *pyramis di-t-edrica*, tseitige Doppelpyramide u. s. w.) am zweck-
255 mäſsigsten nennt, z. B. 2×4flächiger Ebenrandner, *dipyramis*
A. *ditetraedrica*, rhombisches Oktaeder, Oktaeder mit ungleichschenkligen, dreiseitigen Flächen, Doppelpyramide mit rhombischer Basis u. s. w. (octaèdre à base rhombe);

B. 2×6flächiger Ebenrandner (*dipyramis dihexaedrica*);

C. 2×8flächiger Ebenrandner (*dipyramis dioctaedrica*, achtseitige Doppelpyramide, 4- und 4kantiges Dioktaeder, ungleichschenklige achtseitige Pyramide);

2×10flächiger Ebenrandner (*dipyramis didecaedrica*);

D. 2×12flächiger Ebenrandner (*dipyramis didodecaedrica*, 12seitige Doppelpyramide, Didodekaeder, Sechs- und Sechskantner, ungleichschenklige 12seitige Pyramide, doppelt 12seitige Pyramide).

Der Rand ist hier ein 2fach pgliedriges tseit (ein Lanzen-p-ling), das nur in dem einen Falle, wenn es gleichwinklig wird, seiner Form nach mit einem regelmäſsigen tseit übereinstimmt, auſserdem aber stets abwechselnd neben einander folgende gröſsere und kleinere Winkel hat, so daſs von jeder der beiden Arten von Winkeln eine Anzahl = p vorhanden ist. Jeder 2×tflächige Ebenrandner hat sonach:

1) 2×t Flächen P, welche 1fach 1gliedrige Figuren und zwar Dreiecke sind (die nur im Falle der Gleichwinkligkeit des Randes ihrer Form nach 2- und 1seite werden, wodurch die Gestalt das Ansehn eines vflächigen Ebenrandners erhält [wenn v = 2t ist], ihrer Beziehung nach zu dem Strahlensysteme aber, von welchem ihre Bildung ausgehend gedacht worden, die Bedeutung eines 2×tflächigen Ebenrandners behaupten). Die t einen sind unter sich ≌ und verhalten sich zu den t andern, die unter sich ≌ sind, |=|.

2) 2 Scheitel a, welche |≌| sind und die Bedeutung von 2×pkantigen 2fach pgliedrigen Ecken haben.

3) p Randecken der ersten Art e und

4) p Randecken der zweiten Art E. Die einer und derselben Art angehörigen |≌|. Jede Randecke 2 × 2kantig 2fach 2gliedrig.

Die beiden Arten können in der Regel durch die Bezeichnung *spitzigere* oder *stumpfere* unterschieden werden, wobei jedoch stets die Stellung zu berücksichtigen ist, weil sowohl die der ersten als auch die der 2ten Art die stumpferen seyn können.

5) 2 p *Scheitelkanten der ersten Art* s.

6) 2 p *Scheitelkanten der zweiten Art* σ, die man in der Regel durch die Benennungen schärfere und stumpfere unterscheiden kann. Die einer und derselben Art angehörigen |≌|. Jede Scheitelkante ist ungleichendig (oder gleichseitig) 2fach 1gliedrig. Von jeder Art gehören p einem und demselben Scheitel an.

7) 2 p oder t Randkanten r, welche |≌| und ungleichendig (oder gleichseitig) 2fach 1gliedrig sind[1]. Die Querstrahlen der ersten Art gehen durch die Randecken der ersten Art, die der 2ten Art durch jene der 2ten Art. Je zwei in einer Randecke zusammenstoſsende Randkanten verhalten sich in Beziehung zu *einem* der beiden Hauptstrahlen als |=|, folglich sind in derselben Beziehung nur die p einen unter sich ≌ und zwischen je zwei in Beziehung zu einem und demselben Hauptstrahle ≌ sich verhaltenden Randkanten liegt immer eine, die auf dieselbe Weise dem andern Hauptstrahle angehört.

Verlängert man die p unter sich in Beziehung zu einem Hauptstrahle ebenbildlichen Randkanten, so bilden sie, wenn p gröſser als 2 ist, ein regelmäſsiges pseit, und denkt man sich dabei zugleich mit jeder solchen Randkante auch die zwei Flächen, deren Durchschnittslinie sie ist, verlängert, bis die so verlängerten 2 p Flächen eine ringsum geschlossene Figur bilden, so ist diese ein tflächiger Ebenrandner, der aber in seiner Stellung dem gegebenen Strahlensysteme nicht entspricht, wenn die Hauptaxe ihre Bedeutung als 2fach pgliedrige gleichstellig 2endige nicht umwandeln soll in die einer 1fach pgliedrigen

1 Da die Flächen die Bedeutung ungleichschenkliger Dreiecke haben, so nennt man einen derartigen Körper, wenn man die Zahl seiner Flächen nicht angeben will, einen *ungleichschenkligen Ebenrandner (dipyramis trigonoidea)*.

gleichstellig 2endigen. Dieses Begrenztseyn von Flächen zweier tflächiger Ebenrandner, die durch Verlängerung der entsprechenden Fläche desselben erzeugt werden können, erklärt die Benennung 2× tflächiger Ebenrandner.

Die Beschaffenheit eines 2× tflächigen Ebenrandners hängt ab von der Gröfse eines der beiden gleichen Hauptstrahlen, von der Gröfse eines Querstrahls der ersten und von der Gröfse eines Querstrahls der 2ten Art, so aufgefafst, dafs diese Strahlen vom Mittelpuncte des Strahlensystems anfangen und in den Ecken der Gestalt ihre äufsern Enden haben.

Denkt man sich die beiden Arten von Querstrahlen constant, aber den Hauptstrahl veränderlich, so ist einer der Werthe, die er erhalten kann, = ∞; der 2× tflächige Ebenrandner wird dann eine *Säule* (in welcher die Anzahl der Seitenflächen = t und der auf die Seitenkanten senkrechte Schnitt ein 2fach pgliedriges tseit ist), die man wegen der Eigenschaft, gemäfs welcher sich aus ihr durch Verlängerung der abwechselnd genommenen Flächen 2 einzelne gleichwerthige pflächige Säulen entwickeln lassen, eine 2× *pflächige Säule* (*prisma di-p-edrum*, 2× pseitige Säule) nennt, z. B. 2× 2flächige Säule (*prisma didiedrum*, rhombische Säule, Rhombenprisma u. s. w.); 2× 3-flächige Säule (*prisma ditriedrum*, ditrigonales Prisma, 2× 3-seitige Säule); 2× 4flächige Säule (*prisma ditetraedrum*, ditetragonale Säule, 2× 2seitige Säule); 2× 6flächige Säule, (*prisma dihexaedrum*, dihexagonales Prisma, 2× 6seitige Säule) und so weiter.

Jede 2× pflächige Säule, sofern sie eine gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige Gestalt ist, hat, wenn sie nach beiden Enden hin als unbegrenzt gedacht wird, t Seitenflächen, welche der Bedeutung nach einander |≙| und zwar 2fach 1gliedrig sind. Auch hat sie p Seitenkanten einer ersten und p Seitenkanten einer 2ten Art, die in Hauptflügelflächen erster oder 2ter Art fallen und in der Regel durch die Benennungen schärfere, oder stumpfere unterschieden werden können. Jede Seitenkante hat die Bedeutung einer 2fach 2gliedrigen Kante; die p Seitenkanten von einer Art sind demnach einander |≙|.

Unter den möglichen Verhältnissen für die Längen der beiden Arten von Queraxen in einem 2× tflächigen Ebenrandner ist von besonderer Wichtigkeit das der Gleichheit oder 1 : 1. Der 2× tflächige Ebenrandner hat dann die Form des oben an-

geführten vflächigen Ebenrandners, welcher seiner Bedeutung nach in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme mit gleichstellig 2endiger 2fach pgliedriger Hauptaxe als 2tflächiger Ebenrandner zu betrachten ist, während, wenn man ihn abgesondert betrachtet und das *ihm* entsprechende Strahlensystem aufsucht, dieses sich als ein solches mit gleichstellig 2endiger 2fach tgliedriger Hauptaxe zu erkennen giebt, indem bei dieser Gestalt jeder Querschnitt ein regelmäſsiges tseit ist. Er ist das Zwischenglied, welches die 2⨯tflächigen Ebenrandner in 2 Abtheilungen trennt, deren eine, bei denen das Verhältniſs eines Querstrahls der 1sten Art zu einem solchen der 2ten Art kleiner als 1 : 1 ist, man als solche der 1sten und die andern, bei welchen dieses Verhältniſs gröſser als 1 : 1 ist, als solche der 2ten Abtheilung ansehn könnte.

Tritt hier zugleich der Fall ein, daſs der Hauptstrahl $= \infty$ ist, so hat die so entstehende 2⨯pflächige Säule die Form einer tflächigen Säule. Denkt man sich z. B. in einer 2⨯2flächigen Säule, deren Querschnitt bekanntlich eine Raute ist, die gröſsere der Diagonalen in diesem Schnitte constant, während die kleinere wächst, so wird diese einmal jener gleich werden müssen, ehe sie gröſser wird, und wenn beide gleich sind, ist die Rhombe zum Quadrat, folglich die Säule mit rhombischem Querschnitte, d. h. die 2⨯2flächige Säule, zu einer solchen mit quadratischem Querschnitte, d. h. zu einer 4flächigen geworden, die aber in Beziehung zu dem gegebenen Strahlensysteme mit 2fach 2gliedriger Hauptaxe sich als eine 2⨯2flächige betrachten läſst, eben so gut wie das Quadrat als eine Species des Genus Rhombe angesehn werden kann. Es werde im Allgemeinen $\text{Cos.} \frac{360^\circ}{2p}$ bezeichnet durch q, so daſs q von dem Werthe von p abhängt. Es sey zuerst $p > 2$, so wird, wenn das Verhältniſs eines Querstrahls der 1sten Art x zu einem solchen der 2ten Art $y = q : 1$ ist, der 2⨯tflächige Ebenrandner sich umwandeln in einen tflächigen Ebenrandner der ersten Stellung, so wie umgekehrt, wenn jenes Verhältniſs $= 1 : q$ wird, er ein tflächiger Ebenrandner der 2ten Stellung werden muſs. Wenn das Verhältniſs $x : y$ in einem 2⨯tflächigen Ebenrandner kleiner als $q : 1$ oder gröſser als $1 : q$ wird, so werden bei ihm die Scheitelkanten der einen oder der andern Art einspringende Kanten. Denkt man sich die Flächen P der Figur verlängert, bis die Seitenflächen M der Fig. 257.

Säule verschwinden, so hat man einen 2×12flächigen Ebenrandner der Art.

Ist $p = 2$, so wird $\mathrm{Cos.}\ \frac{360}{2.2} = \mathrm{Cos.}\ 90° = 0$. Ist nun 1) $x:y = q:1 = 0:1 = 1:\infty$, so wird aus dem 2×4flächigen Ebenrandner der Stellvertreter des 4flächigen Ebenrandners der 1sten Stellung, ein *quersäuliger 4flächiger Schiefwandner* (*clinepipedum tetraedrum transversoprismaticum*), *eine Quersäule* (*prisma transversum*) erster Stellung. Ist 2) $x:y = \infty:1$, so entsteht auf gleiche Weise ein quersäuliger 4flächiger Schiefwandner 2ter Stellung, eine Quersäule 2ter Stellung.

Quersäule im Allgemeinen ist ein von 4 gleichwerthigen Flächen, denen eine und dieselbe Queraxe parallel liegt, begrenzter Raum, gleichsam eine auf einer ihrer Seitenkanten liegende Säule, die, wenn sie vertical stände, als 2×2flächige Säule (mit rautenförmigem Querschnitte) betrachtet werden würde. Jede Quersäule hat 2 Gipfelkanten und 2 Mittelkanten; die 4 Kanten liegen einander parallel und horizontal.

Wenn die Quersäule als 2fach 2gliedrige gleichstellig 2endige Gestalt auftritt, so sind ihre 4 Flächen |≌| 2fach 1gliedrig, ihre 2 Gipfelkanten sowohl, als auch ihre 2 Mittelkanten sind 2fach 2gliedrige Kanten und je 2 gleichnamige Kanten sind einander |≌|. Jede Gipfelkante vertritt die Stelle 2er |≌| sich verhaltender gleichseitig ungleichendiger 2fach 1gliedriger Scheitelkanten, die unter einem Winkel von 180° am Scheitel zusammenstoſsen. Stellt man sich vor, die vier Kanten dieser Quersäule, vorwärts sowohl als rückwärts verlängert, schnitten sich in unendlicher Entfernung vom Mittelpuncte, so erhält die Gestalt 2 unendlich spitzige 2×2kantige 2fach 2gliedrige Randecken und kann dann füglich mit den übrigen tflächigen Ebenrandnern zusammengestellt werden[1], obgleich jene Randecken

1 Denkt man sich bei einem 2×tflächigen Ebenrandner überhaupt die Hauptstrahlen und die Querstrahlen der ersten oder 2ten Art constant, während die Querstrahlen der 2ten oder 1sten Art wachsen, bis sie unendlich sind, so wird dadurch, wenn diese Grenze erreicht ist, eine Gestalt entstehen, in welcher die p Scheitelkanten der einen Art in einem jeden Scheitel horizontal liegen, die p Scheitelkanten der andern Art aber werden nach auſsen hin einspringend (d. h. rinnenartig vertieft) seyn. Auch hier wird die Gestalt keinen geschlossenen Rand haben und sie wird nicht mehr ein Ebenwandner

im Innern des Körpers verbunden gedacht werden können durch eine Fläche eines tflächigen Ebenrandners, der von dem pfach quersäuligen Schiefwandner umschlossen seyn würde. So ist z. B. die von den Flächen M gebildete Gestalt, wenn man von dem Daseyn der übrigen Flächen absieht und die Linie di als gleichstellig 2endige 2fach 4gliedrige Hauptaxe sich vorstellt, ein 4fach quersäuliger Schiefwandner, der als 2×8flächige Gestalt betrachtet werden mufs, obgleich je 2 seiner Flächen in eine und dieselbe Ebene fallen. Denkt man sich einen 2fach 3gliedrig gleichstellig 2endigen 3fach quersäuligen Schiefwandner, so werden bei ihm von der Mitte aus anfangend 3 Quersäulen unter Winkeln von 120° divergiren. Man sieht daher, dafs der quersäulige 4flächige Schiefwandner zugleich auch in die Reihe der pfach quersäuligen Schiefwandner gehört und, wenn er eine 2fach 2gliedrige Gestalt ist, den Namen 2fach quersäuliger Schiefwandner erhalten würde; von den beiden Quersäulen in ihm ist die eine als Verlängerung der andern über den Mittelpunct des Körpers hinaus zu betrachten. Wenn die Flächen P angesehn werden als einem 4flächigen quersäuligen Schiefwandner erster Stellung angehörig, so bilden auch die Flächen M einen solchen 2ter Stellung, wenn die ganze Gestalt ein Ebenrandner mit 2×2seitig 2fach 2gliedrigem rechtwinkligen Rande ist, der als eine zusammengesetzte Gestalt (als ein sogenanntes Rectanguläroktaeder, octaèdre à base rectangle) zu betrachten ist. Gleichwie der tflächige Ebenrandner durch Verlängerung der Hauptaxe bis ins Unendliche zu einer pflächigen Säule wurde, so wird der quersäulige 4flächige Schiefwandner zu einem 2flächigen Seitenwandner oder 2flächigen Gegenseitenwandner (*Orthepipedum diedrum* der ersten oder der 2ten Stellung). Ein 2flächiger Gegenseitenwandner hat 2 einander parallele Seitenflächen, welche, wenn die Gestalt eine gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige ist, die Bedeutung 2fach 2gliedriger

Fig. 257.

Fig. 258.

genannt werden können, sondern allgemein als ein pfach quersäuliger Schiefwandner bezeichnet werden müssen, bei dem, wenn p eine gerade Zahl ist, gleichfalls jede der 2×t Flächen mit einer andern in die Verlängerung einer und derselben Ebene fallen wird; beide Stücke dieser einen Ebene erscheinen hier aber getrennt von einander durch ein Paar dazwischen hervortretende, eine horizontale Scheitelkante bildende Flächen, weshalb sie als 2 abgesonderte Flächen betrachtet werden.

Figuren haben und diese in zusammengesetzten endlich begrenzten Gestalten erkennen lassen. Er hat keine Seitenkanten, wodurch er von den pflächigen Säulen verschieden ist, die ihm sonst entsprechen[1].

Ist p gerade, so fallen je 2 Flächen eines solchen Seitenwandners in die Verlängerung einer und derselben Verticalebene (d. h. sie sind seitliche Verlängerung der Seitenflächen einer pflächigen Säule). Es ist ersichtlich, dafs der 2flächige Gegenseitenwandner als 2fach pgliedrige Gestalt in die Reihe der 2$\times$pflächigen Gegenseitenwandner gehört. Ist $x : y > 1 : q$ oder $< q : 1$, so wird der Querschnitt der 2$\times$pflächigen Säule, gleich dem des analogen 2$\times$tflächigen Ebenrandners, sternförmig, d. h. von den p Winkeln der einen Art wird jeder gröfser als 180°.

Wenn die Hauptaxe gleichstellig 2endig 2fach 1gliedrig ist, so hat man statt des tflächigen Ebenrandners einen *2flächigen quermittelkantigen Schiefwandner*, d. h. einen von 2 Ebenen, die in einer horizontalen Mittelkante zusammentreffen, begrenzten Raum. Sofern er 2fach 1gliedrig gleichstellig 2endig ist, haben seine Flächen die Bedeutung 2fach 1gliedriger Figuren und seine Mittelkante ist dann eine 2fach 2gliedrige Kante; auch hat man 2flächige solche Schiefwandner der 1sten und 2ten Stellung zu unterscheiden. Die Mittelkanten der einen sind senkrecht auf dem 2fach 2gliedrigen Querstrahle der 1sten Art, die der andern auf dem der andern Art; die Mittelkanten beider Arten daher einander parallel. Dem 2$\times$tflächigen Ebenrandner entspricht dann ebenso ein *mitteleckiger 2$\times$2flächiger Schiefwandner*. Seine vier gleichwerthigen Flächen haben die Be-

1 Werden bei einem 2$\times$tflächigen Schiefwandner, bei dem die Querstrahlen der ersten (oder 2ten) Art $= \infty$ sind, auch die Hauptstrahlen $= \infty$, während die Querstrahlen der 2ten (oder ersten) Art unverändert bleiben, so entsteht ein 2$\times$pflächiger Gegenseitenwandner. So ist z. B. die in der Figur von den Flächen o gebildete Gestalt, wenn man von dem Daseyn der Flächen P und M abstrahirt und die Linie di als Hauptaxe ansieht, ein 2$\times$4flächiger Gegenseitenwandner, welcher von den 2$\times$4flächigen Säulen, mit denen er zunächst verwandt ist, dadurch abweicht, dafs sein Querschnitt keine geschlossene Figur ist, ihm daher 4 Seitenkanten der einen Art fehlen, so dafs nur die 4 der andern Art (als Einkerbungen oder einspringende Kanten) an ihm vorhanden sind. (Fig. 257. Fig. 259.)

deutung 1fach 1gliedriger Flächen, jede derselben verhält sich zu jeder der beiden ihr zunächstliegenden gegenbildlich, diese beiden sind also einander ebenbildlich. Sie bilden eine 2 × 2-kantige 2fach 2gliedrige Mittelecke, in welcher 2 |≌| sich verhaltende, 2fach 1gliedrige, horizontale Mittelkanten und 2 nach den Enden der Hauptaxe hinlaufende, |≌| sich verhaltende, 2fach 1gliedrige, schiefliegende Gipfelkanten sich vereinigen. Die Flächen P bilden einen quermittelkantig 2flächigen, die Flächen M einen mitteleckigen 2×2flächigen Schiefwandner, wenn die ganze Gestalt ein zusammengesetzter Ebenrandner mit 2- und 1seitigem Querschnitte (gerade Doppelpyramide mit gleichschenkliger dreiseitiger Basis) ist. Die Flächen P haben in dieser zusammengesetzten Gestalt die Form gleichschenkliger, die Flächen M aber die ungleichschenkliger Dreiecke. Da hier nur ein Querstrahl der ersten und ein solcher der 2ten Art vorhanden sind, welche zusammen die einzige 2fach 2gliedrige (ungleichendige) Queraxe ausmachen, so kann hier eine und dieselbe Fläche des regelmäſsig 2 × 2flächigen Schiefwandners nicht Querstrahlen beider 2fach 2gliedrigen Arten schneiden. Fig. 260.

Gleichwie aus dem 2×tflächigen Ebenrandner ein scheinbar vflächiger wurde, wenn die Randkanten von jenem parallel mit einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle wurden (was dort statt fand, wenn x : y = 1 : 1 war), so wird auch hier, wenn die beiden Mittelkanten des 2×2flächigen Schiefwandners parallel der 2fach 2gliedrigen Queraxe, folglich einander selbst parallel werden, aus diesem Körper ein scheinbar 4flächiger quersäuliger Schiefwandner, welcher aber ebenso die Bedeutung einer 2×2-flächigen Gestalt behält, wie jener Ebenrandner die Bedeutung eines 2×tflächigen behielt. Der 2×pflächigen Säule entsprechend hat man hier den 2 × 1flächigen Seitenwandner oder 2 × 1flächigen Nebenseitenwandner (*orthepipedum dimonoedrum*), den man sich entstanden denken kann aus einem 2×2-flächigen Schiefwandner, dessen Mittelquerschnitt constant geblieben ist, dessen Hauptstrahlen aber = ∞ geworden sind, so daſs, wenn jener eine Mittelecke hatte, dieser zwei sich in einer Seitenkante schneidende Flächen hat; hatte jener keine Mittelecke, so hat auch dieser keine Seitenkante und der Seitenwandner erhält die Form eines 2flächigen Gegenseitenwandners. Der pflächigen Säule analog ist hier der *1flächige Seitenwandner* (*orthepipedum monoedricum*), eine einzige Seitenfläche, welche

auf einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle senkrecht steht, wenn der 1flächige Seitenwandner ein 2fach 1gliedriger ist.

Fig. 236 A.B. Die gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Gestalt, welche als Beispiel durch die Abbildung versinnlicht ist, läfst sich betrachten als zusammengesetzt aus den 2 Flächen M eines 2×1-flächigen Nebenseitenwandners, den 2 Flächen T eines 2flächigen Gegenseitenwandners und aus der Fläche q eines 1flächigen Seitenwandners. Die Flächen o bilden einen 2flächigen quermittelkantigen Schiefwandner erster und jene mit o′ bezeichneten einen solchen zweiter Stellung. Die Flächen P bilden einen mitteleckigen 2×2flächigen Schiefwandner.

Auf ähnliche Weise läfst sich die abgebildete 2gliedrige
Fig. 237. Gestalt zerlegen in zwei verschiedene 2×4flächige Ebenrandner P und n und in 2 verschiedene quersäulige 4flächige Schiefwandner erster Stellung o und r, in eine 2×2flächige Säule d, in einen 2flächigen Gegenseitenwandner 1ster Stellung b und in einen solchen 2ter Stellung s. Die Zerlegung der andern 2glie-
Fig. 238. drigen Gestalt ist aus dem eben Entwickelten ohne weitere
239. Schwierigkeiten möglich. Die 4gliedrige Gestalt besteht aus den Flächen P eines 8flächigen Ebenrandners erster Stellung, wenn s die Flächen eines solchen 2ter Stellung sind. Die Flächen z bilden für sich allein einen 2×8flächigen Ebenrandner, die Flächen g gehören einer 4flächigen Säule 2ter Stellung an und die Flächen r bilden eine 2×4flächige Säule. Die Zerle-
Fig. 240. gung der abgebildeten 6gliedrigen Gestalt in 2 verschiedene 12flächige Ebenrandner t und u erster Stellung, einen solchen 2ter Stellung s, einen 2×12flächigen Ebenrandner a, in die 2flächige Tafel P und in die 6flächige Säule 1ster Stellung M ist ohne weitere Anweisung ausführbar.

Einfache Gestalten mit gleichstellig 2endiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(gleichstellig 2endig 1fach pgliedrige Gestalten).

Jeder einfache derartige Schiefwandner ist, sofern er eine ringsum endlich begrenzte Gestalt ist, ein tflächiger Ebenrandner, dem, abstrahirt von seiner Verbindung mit dem gegebenen Strahlensysteme, ein 2fach pgliedriges Strahlensystem entsprechen würde. In dieser Verbindung aber hat er blofs die Bedeutung einer pgliedrigen regelmäfsig gleichendigen Gestalt, eines 1fach pgliedrigen tflächigen Ebenrandners, den man der Kürze

wegen, da es keinen 2 × tflächigen pgliedrigen giebt, blofs schlechthin *1fach pgliedrigen Ebenrandner* nennen kann.

Berücksichtigt man die Theile eines solchen Körpers hinsichtlich auf ihr Verhalten zu dem gegebenen Strahlensysteme, so folgt, dafs ihre Bedeutung eine andere seyn müsse, als die, welche ihnen zustehen würde, wenn man den Körper in Beziehung auf das ihm entsprechende Strahlensystem betrachtet. So verhalten sich also seine Flächen als 1fach pgliedrige, seine Scheitel als pgliedrige 1fach pkantige Ecken, seine Randecken als 2fach 1gliedrige 2- und 2×1kantige Ecken, seine Randkanten als gleichseitige ungleichendige Kanten, seine Scheitelkanten als (ungleichendige ungleichseitige d. h. als) 1fach 1gliedrige Kanten. Auch sind die Flächen der oberen Körperhälfte denen der unteren nicht |≌|, sondern blofs |=|, und nur die einer und derselben Hälfte sind ≌. Diese Art des Verhaltens der Theile ist aber nur bemerklich, wenn die Gestalt mit andern 1fach pgliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalten eine zusammengesetzte Gestalt ausmacht, die so beschaffen ist, dafs das *ihr* entsprechende Strahlensystem sich unmittelbar als ein 1fach pgliedriges gleichstellig 2endiges erkennen läfst. Würden bei unveränderten Querstrahlen die Hauptstrahlen in einem 1fach pgliedrigen Ebenrandner $= \infty$, so wird er zu einer pflächigen Säule, die gleichfalls nur die Bedeutung einer gleichstellig 2endigen 1fach pgliedrigen Gestalt hat. Für $p = 1$ ist jeder Schiefwandner ein mittelquerkantiger 2flächiger und jeder Seitenwandner ein 1flächiger. Ein Ebenrandner mit 3 × 1seitigem Querschnitte b c d und 3 × 1kantigen 1gliedrigen Scheiteln $\alpha\alpha$ z. B. ist anzusehen als eine zusammengesetzte Gestalt aus drei 2flächigen Schiefwandnern. Eine gerade Säule mit 3×1seitigem Querschnitte ist zu betrachten als zusammengesetzt aus drei 1flächigen Seitenwandnern und der 2flächigen Tafel. Für $p = 2$ ist jeder Schiefwandner ein 4flächiger quersäuliger Schiefwandner, dessen Flächen, in zusammengesetzten Gestalten, die sich als solche mit gleichstellig 2endiger 1fach 2gliedriger Hauptaxe zu erkennen gaben, die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen Flächen nicht verleugnen. Ebenso ist ersichtlich, dafs seine Mittelkanten gleichseitige (ungleichendige) 2fach 1gliedrige und seine Gipfelkanten 1fach 2gliedrige sind.

Fig. 261 a.

Der Ebenrandner mit langrautenförmigem Rande (rhomboidisches Oktaeder) hat 4 Flächen P, welche einen 4flächigen der-

Fig. 261 b.

artigen Schiefwandner bilden, und 4 Flächen M, die einen 2ten begrenzen, so dafs die ganze Gestalt angesehen werden kann als aus 2 verschiedenen 4flächigen quersäuligen Schiefwandnern zusammengesetzt[1]. Jeder Seitenwandner ist ein 2flächiger Gegenseitenwandner, bei welchem jede Fläche die Bedeutung einer 2fach 1gliedrigen Figur hat.

Fig. 241. Das Bild der 1fach 2gliedrigen Gestalt läfst erkennen, dafs sie zusammengesetzt sey aus zwei 4flächigen quersäuligen Schiefwandnern f und l und aus den 2 Tafelflächen P. Die 1fach
Fig. 242. 4gliedrige Gestalt, welche als Beispiel dient, ist aus vier verschiedenen 8flächigen 1fach 4gliedrigen Ebenrandnern g, a, P, b
243. zusammengesetzt. Das als Beispiel gewählte Bild einer 1fach 6gliedrigen Gestalt ist das einer solchen, welche zusammengesetzt ist aus den fünf verschiedenen 1fach 6gliedrigen 12flächigen Ebenrandnern x, z, a, s, u, aus den Tafelflächen P und aus den Seitenflächen dreier 6flächiger 1fach 6gliedriger Säulen M, c, e.

Einfache Gestalten mit gerenstellig 2endig 2fach pgliedriger Hauptaxe

(gerenstellig 2endig 2fach pgliedrige Gestalten).

Es liegen hier nicht in jeder Hauptflügelfläche die Strebestrahlen gepaart. Man denke sich zwei gleichwerthige benachbarte doppelte Flügelflächen des einen (z. B. oberen) Hauptstrahles, und zwar zuerst so, dafs sie beide gegen einander eine Neigung kleiner als 180° bilden; dazu nehme man die zwischen diesen beiden liegende doppelte Flügelfläche des andern (untern) Hauptstrahles, welche bekanntlich jene Neigung halbirt. In jeder dieser 3 Flügelflächen nehme man einen Strebestrahl so, dafs die drei Strebestrahlen zu einerlei Art gehören. Man denke sich die Begrenzungsflächen, für welche diese Strebestrahlen als Normalen zu betrachten sind, gleich weit vom Mittelpuncte des Strahlensystems entfernt. Es ist einleuchtend, dafs die dem unteren solchen Strebestrahle entsprechende Begrenzungsfläche sich gegen die beiden andern hinsichtlich ihrer Lage auf gleiche Weise verhalten müsse. Daraus ergiebt sich, dafs die entstehenden Mittelkanten der Gestalt einen regelmäfsig *kronenartig*

Fig. 261 c. d. 1 Die Ebenrandner mit 1fach 3gliedrig 2×3seitigem Rande oder mit 1fach 4gliedrig 2×4seitigem Rande sind die ähnlichen Gestalten in dem betreffenden 3gliedrigen und 4gliedrigen Gestaltensysteme.

zickzackförmigen Kantenring d. h. einen kronenartig zackigen Rand bilden müssen. Man erhält so zunächst eine Gestalt, die man tflächigen Kronrandner (*stephanoides t-edrica*) nennen kann; also z.B. 6flächigen Kronrandner (*stephanoides hexaedrica*, Rautenflächner, Rautenflach, Rhomboeder, rhomboèdre, rhomboide, geschobener Würfel, körperlicher Rhombus u. s. w.); 8flächiger Kronrandner (*stephanoides octaedrica*); 10flächiger, 12flächiger u. s. w. Kronrandner (*stephanoides decaedrica, dodecaedrica etc.*). Jeder tflächige Kronrandner hat als Gestalt an sich betrachtet, so wie auch als gerenstellig 2endig 2fach pgliedrige Gestalt, Fig. 262 a. 264. Fig. 265 A. B. C.

1) p obere und p untere Flächen P, welche |≌| sind und die Bedeutung 2fach 1gliedriger 2 ✕ 2seite oder Lanzenvierecke haben;

2) 2 *Scheitel* a, welche pkantige 2fach pgliedrige Ecken und unter sich |≌| sind;

3) p obere und p untere *Randecken* e, deren jede eine 2- und 1kantige 2fach 1gliedrige Ecke ist; sie alle sind |≌|;

4) p dem oberen und p dem unteren Scheitel angehörige *Scheitelkanten* s, welche |≌| sind; jede ist gleichseitig ungleichendig, folglich 2fach 1gliedrig;

5) 2✕p *Randkanten* r, welche 2gliedrige Kanten sind; die p einen sind unter sich ≌, verhalten sich aber |=| zu den p andern, die unter sich ≌ sind.

Man kann einen tflächigen Kronrandner auch im Allgemeinen, wenn man nicht die Zahl seiner Flächen angeben will, einen *gleichschenkligen Kronrandner* (*stephanoides doroidea*) nennen.

Die doppelten Hauptflügelflächen liegen so, dafs jede durch beide Scheitel und eine Randecke geht; sie ist also begrenzt von der Hauptaxe, von einer Scheitelkante und von einer nach dem Scheitel hinlaufenden Diagonale (*Scheiteldiagonale*) einer der lanzenförmigen Flächen. Sie ist daher ein 3✕1seit. Der mittlere Querschnitt geht durch die Halbirungspuncte aller Randkanten und ist ein regelmäfsiges tseit. Der Querschnitt durch die p oberen oder durch die p unteren Randecken ist ein regelmäfsiges pseit, dessen Seiten Querdiagonalen der Flächen sind. Die beiden solchen Schnitte sind |≌|. Eine und dieselbe doppelte Hauptflügelfläche schneidet diese beiden Querschnitte so, dafs sie im oberen (oder unteren) durch eine Linie geht, die

von dem Mittelpuncte dieses pseits nach einem Winkel desselben hinausstrahlt, während sie in dem unteren (oder oberen) durch eine Linie geht, die von dem Mittelpuncte *dieses* pseits aus senkrecht auf eine Seite desselben gezogen werden kann. Diese beiden Linien aber verhalten sich zu einander (da die beiden regelmäſsigen pseite gleich sind) = Sin. Tot. : Cos. $\frac{360°}{2p}$. Stellt
Fig. 266. daher die Figur eine doppelte Hauptflügelfläche dar, in welcher ef und dc jenen beiden Querschnitten durch die Randecken om oberhalb dem mittleren Querschnitte angehören, so ist, wenn Cos. $\frac{360°}{2p}$ = q genannt wird,

$$ef : dc = q : 1$$

$$om = \frac{ef + dc}{2}$$

$$ef + dc : ef = 1 + q : q$$

$$2om : ef = 1 + q : q$$

$$ef = \frac{q}{1+q} \,.\, 2 \,.\, om$$

aber

$$ob : eb = om : ef$$

$$ob - eb : ob = om - ef : om$$

$$oe : ob = om - \frac{q}{1+q} \,.\, 2om : om$$

$$= 1 - \frac{2q}{1+q} : 1$$

$$= \frac{1-q}{1+q} : 1$$

das heiſst

$$oe = \frac{1-q}{1+q} \,.\, ob.$$

Für p=3 wird q = Cos. $\frac{360°}{2.3}$ = Cos. 60° = $\frac{1}{2}$, also oe = $\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$. ob = $\frac{1}{3}$ob, folglich be = ea = da, d. h. im 6flächigen Kronrandner wird die Hauptaxe von den beiden Querschnitten durch die Randecken so geschnitten, daſs sie in drei gleiche Theile getheilt ist. Wenn be = ed, so ist auch bf = fc, d. h. die Scheiteldiagonale bc einer der Flächen des 6flächigen Kronrandners wird durch die Querdiagonale (welcher als Seite des Querschnitts durch die Randecken der Punct f an-

gehört) halbirt. Da nun in jedem tflächigen Kronrandner die Querdiagonale der Fläche durch die Scheiteldiagonale in zwei gleiche Theile getheilt wird, so muſs die 2fach 1gliedrige 2mal 2seitige Fläche des 6flächigen Kronrandners so beschaffen seyn, daſs in ihr die beiden auf einander senkrechten Diagonalen sich gegenseitig halbiren, d. h. sie muſs als Fläche an sich betrachtet ein gleichseitiges Lanzenviereck, eine Raute oder eine Rhombe seyn [1].

Ist p = 2, so ist $\text{Cos.}\left(\frac{360^\circ}{2.2}\right) = \text{Cos. } 90^\circ = 0$, also $\frac{1-q}{1+q} = 1$, d. h. die Entfernung einer durch die oberen oder unteren Randecken des Körpers gelegten Ebene vom Mittelpuncte ist = der halben Hauptaxe, d. h. der obere Endpunct der Axe fällt mit den beiden oberen Randecken und der untere mit den beiden unteren in einerlei gerade Horizontallinie. Daher hat der *4flächige Kronrandner* statt des Scheitels und der zwei Scheitel- Fig. 263. kanten, die er haben müſste, an jedem Ende der Hauptaxe bloſs eine 2fach 2gliedrige horizontale Gipfelkante g und bei jeder seiner Flächen P ist die lanzenförmige Figur dadurch, daſs ihr Winkel, welcher am Ende der Hauptaxe anliegt, = 180° ist, zu einem gleichschenkligen Dreiecke geworden. Gleichwie der 2fach pgliedrige tflächige Kronrandner, wenn p eine ungerade Zahl 3, 5, 7 u. s. w. ist, sich so beschaffen zeigt, daſs je eine der p oberen Flächen einer der p unteren parallel liegt, mithin beide auf einer und derselben, durch die Hauptaxe gelegten, Ebene senkrecht stehn, welche doppelte Hauptflügelflächen bildet, so muſs auch, wenn p = 1 ist, die Gestalt aus einer oberen und einer unteren Fläche bestehen, welche einander parallel liegen, und beide müssen auf der einzigen möglichen, durch die Hauptaxe gelegten, Ebene senkrecht seyn, in welcher die doppelten Hauptflügelflächen liegen. Der Stellvertreter des 2fach pgliedrigen tflächigen Kronrandners ist daher für die 2fach 1gliedrige gerenstellig 2endige Hauptaxe ein *kantenloser 2flächiger Schiefwandner,* dessen Flächen die Bedeutung 2fach 1gliedriger Figuren haben. Ein 2× tflächiger Kronrandner (*stephanoides di-t-edrica*) z. B. ist der 2×4flächige Kronrandner (*stephanoides* Fig. 267.

1 (Daher die bereits angegebenen Benennungen Rautensechsflächner, Rautenflach, Rhomboeder, Rhomboëdre, Rhomboide, körperlicher Rhombus u. s. w.)

Fig. *ditetraedrica,* tetragonales Skalenender); der 2 × 6flächige
268. Kronrandner (hexagonales Skalenender, 3- und 3kantner, auch 3- und 3kantiges Dodekaeder, ungleichschenklige 6seitige Pyra-
269. mide, Bipyramoide, Kalkpyramide); der 2 × 8flächige Kronrandner (*stephanoides dioctaedrica*) hat 2 × t Flächen P, welche auf 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen senkrecht stehen und in der Regel 1fach 1gliedrige d. h. ungleichschenklige Dreiecke sind. Auch bei ihm bilden die Randkanten einen kronartigen zickzackförmigen Kantenring. Die p einen der Randkanten r sind einander ebenbildlich und verhalten sich zu den p andern gegenbildlich, sie sind 1fach 2gliedrige. Die Scheitelkanten sind von zweierlei Art, jede liegt in einer doppelten Hauptflügelfläche und ist eine ungleichendige gleichseitige d. h. 2fach 1gliedrige Kante. Die einen s können von den andern σ im Allgemeinen sowohl durch Länge als Gröfse unterschieden werden. Von jeder Art sind p obere und p untere vorhanden. Eine obere der ersten Art und eine untere der 2ten Art, oder umgekehrt, liegen in einer doppelten Hauptflügelfläche, so dafs diese, von ihnen beiden und der Hauptaxe begrenzt, ein Dreieck bildet. In jeder der p oberen und p unteren Randecken e, die einander |≌|, 2- und 2 × 1kantige, 2fach 1gliedrige Ecken sind, laufen 2 gegenbildliche Randkanten und 2 ungleichwerthige Scheitelkanten zusammen. Die beiden Scheitel sind |≌|, 2 × pkantige, 2fach pgliedrige Ecken.

Als eigenthümliche Arten der 2 × tflächigen Kronrandner sind anzusehen jene Gestalten, bei denen die Flächen senkrecht auf solchen 1fach 1gliedrigen Strebestrahlen stehen, die in Hauptflügelflächen liegen, welche durch die 2gliedrigen Querstrahlen gehen. Weil nämlich in einer solchen Hauptflügelfläche 2 gleichwerthige derartige Strebestrahlen sich befinden, so folgt, dafs sich die beiden gleichwerthigen, zu ihnen senkrechten Flächen in einer horizontalen Randkante schneiden müssen, so dafs also die bei andern 2 × tflächigen Kronrandnern vorhandene Neigung jeder Randkante gegen den mittleren Querschnitt hier = o wird. Die Gestalt an sich betrachtet hat dann das Ansehen eines vflächigen Ebenrandners, wenn v = 2t ist, dessen Flächen aber gleich denen der 2 × tflächigen Kronrandner in zusammengesetzten Gestalten sich als 1fach 1gliedrige Flächen verhalten; seine Randkanten sind ebenso 1fach 2gliedrig, seine Scheitelkanten, obwohl alle gleich an Länge, Gröfse u. s. w.,

sind dennoch von zweierlei Art in Beziehung auf ihr Verhalten zu dem gegebenen Axensysteme, ähnlich den Scheitelkanten des 2×tflächigen Kronrandners. Auch die Bedeutung der Ecken dieses Körpers ist von der der analogen Ecken im 2×tflächigen Kronrandner nicht verschieden.

Wenn p eine ungerade Zahl ist, so sind die 2×tflächigen Kronrandner im Allgemeinen parallelflächige. Ist p aber eine gerade Zahl, so ist Parallelismus der Flächen nicht vorhanden. Bei 2fach 1gliedriger gerenstellig gleichendiger Hauptaxe werden daher die 2×2 Flächen der Gestalt, welche mit den 2×tflächigen Kronrandnern in eine Reihe gehört, paarweise parallel seyn müssen, so dafs also 4 einander parallele Kanten entstehen. Es ist diese Gestalt ein 2×2- oder 4flächiger strebesäuliger Schiefwandner, der, wenn seine Kanten senkrecht ständen, d. h. der Hauptaxe parallel wären, eine Säule mit rautenförmigem Querschnitte seyn würde. Zwei der Kanten dieser Strebesäule sind schiefliegende 2fach 1gliedrige Gipfelkanten, die beiden andern sind 1fach 2gliedrige Mittelkanten; je 2 einer und derselben Mittelkante anliegende Flächen verhalten sich ≌; je 2 einer und derselben Gipfelkante anliegende aber, so wie je 2 einander parallele, verhalten sich |=|. Sämmtliche 4 Flächen sind 1fach 1gliedrige. Alle aufgeführte Theile lassen die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften an zusammengesetzten Gestalten erkennen.

Denkt man sich an einem tflächigen Kronrandner die Hauptaxe wachsend, während die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen unverändert bleiben, so erhält man, wenn die Hauptaxe = ∞ ist, eine *tflächige Säule,* deren Seitenwände auf den (strebestrahlenartig) 2fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Die p einen der Flächen derselben gehören auf dieselbe Weise dem oberen Hauptstrahle an, wie die p andern dem unteren. Die Seitenkanten sind 1fach 2gliedrig.

Läfst man an einem 2×tflächigen Kronrandner die Hauptstrahlen wachsen, bis sie unendlich sind, während sowohl die 1fach 2gliedrigen als auch die 2fach 1gliedrigen Querstrahlen an Länge unverändert bleiben, so erhält man eine 2×tflächige Säule, deren Flächen auf 1fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Die t Seitenkanten der einen Art sind 1fach 2gliedrig und die beiden einer solchen Kante anliegenden Flächen sind einander ebenbildlich; die t andern Seitenkanten sind 2fach

1gliedrig gleichseitig ungleichendig und die 2 einer solchen Kante anliegenden Flächen sind einander gegenbildlich.

Auf ähnliche Weise entsteht aus dem erwähnten vflächigen Ebenrandner eine tflächige Säule 2ter Art, deren Flächen auf 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Ihre Seitenkanten sind 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten, je 2 einer Seite anliegende Flächen verhalten sich |=|.

Für p = 1 erhält man als Stellvertreter der tflächigen Säule mit 2fach 1gliedrigen Flächen den 2flächigen Gegenseitenwandner mit 2fach 1gliedrigen Flächen, statt der tflächigen Säule mit 2fach 1gliedrigen Flächen einen 2flächigen Gegenseitenwandner mit 1fach 2gliedrigen Flächen. Jeder besteht aus 2 parallelen Flächen; die des einen stehen auf denen des andern senkrecht, weil auch hier die 2fach 1gliedrigen Strahlen auf den 1fach 2gliedrigen senkrecht sind. Die 2 ✕ 2flächige Säule tritt als solche auch hier auf und hat den Charakter der oben erwähnten 2 ✕ tflächigen Säule.

Fig. 244 A,B. 245. 246 A,B, C,D, E,F. Als Beispiele von zusammengesetzten gerenstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten mögen dienen: 1) eine 2fach 1gliedrige A mit ihrer Horizontalprojection B[1]; 2) eine 2fach 2gliedrige und 3) einige 2fach 3gliedrige, welche mehr oder weniger zusammengesetzt sind und leicht in die einfachen Gestalten zerlegt werden können, aus denen sie zusammengesetzt sind. Nur eine derselben möge hier beispielsweise zerlegt werden. Die

Fig. 246 C. Flächen P eines 6flächigen Kronrandners sind verbunden mit denen m eines eben solchen Körpers derselben Stellung, dessen Scheitel spitziger ist, als der des Kronrandners P. Die Flächen r und y gehören verschiedenen 2 ✕ 6flächigen Kronrandnern und die Flächen c der 6flächigen Säule an, welche 2fach 1gliedrige Flächen hat.

1 Man pflegt einzelne minder zusammengesetzte 1gliedrige Gestalten mit besonderen Namen zu belegen. So heifst z. B. die Gestalt,
Fig. 244. welche aus der Verbindung der Flächenpaare P, r und l entsteht, eine schiefe rectanguläre Säule (prisme oblique à base rectangle), jene, welche von den Flächen M und P gebildet ist, heifst schiefe rhombische Säule (*Hendyoeder*, prisme oblique à base rhombe), eine Verbindung von Flächen, wie M und o, nennt man ein rhomboidisches Ditetraeder, rhomboidisches Oktaeder u. s. w. Wie auf ähnliche Weise die Verbindungen t, l, r oder t, r, P u. s. w. und wieder o, r oder o, t u. s. w. und M, S oder o, s; o, u u. s. w. zu benennen seyen, ist eine leicht zu lösende Aufgabe.

Einfache Gestalten mit gerenstellig 2endig 1fach pgliedrigen Hauptaxen

(gerenstellig 2endig 1fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p gröfser als 1 ist, so sind die 1fach pgliedrigen, hierher gehörigen, Schiefwandner im Allgemeinen tflächige Kronrandner, die aber in zusammengesetzten Gestalten, an welchen das Axensystem sich als ein gerenstellig 2endig 1fach pgliedriges zu erkennen giebt, oder, was dasselbe sagt, die in Beziehung zu einem gegebenen solchen Axensysteme den Charakter annehmen, der ihnen verliehen wird dadurch, dafs ihre Flächen senkrecht sind auf Strebestrahlen desselben, da hier alle 1fach 1gliedrig sind. Die p oberen Flächen verhalten sich daher zu den p unteren gegenbildlich, ohne ihnen zugleich ≏ zu seyn. Die Scheitel sind blofs 1fach pgliedrig, die Scheitelkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige d. h. 1fach 1gliedrige Kanten. Das Nämliche gilt von den Randkanten und auch die Randecken verhalten sich blofs als 1fach 1gliedrige Ecken.

Die hier vorkommenden Säulen sind tflächige und zwar sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig. Alle Seitenkanten sind von gleicher Gröfse und sind 1fach 1gliedrig. Je 2 benachbarte sind |=|; je 2 einer und derselben Seitenkante anliegende Flächen verhalten sich ebenfalls |=|.

Für den Werth von p = 1 erhält man als Stellvertreter des 1fach pgliedrigen tflächigen Kronrandners einen 1fach 1gliedrigen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner, bestehend aus 2 einander parallelen Flächen, die sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Flächen sind. Als Stellvertreter der tflächigen Säule hat man ebenso einen 2flächigen Gegenseitenwandner, dessen 2 Flächen sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Figuren sind. Als Beispiele gerenstellig 2endiger 1fach pgliedriger Gestalten mögen dienen 1) eine 1fach 1gliedrige, an welcher je 3 Flächenpaare ein unregelmäfsiges Parallelepipedon bilden, das man häufig mit dem Namen schiefe rhomboidische Säule (prisme oblique à base de parallelogramme obliquangle) belegt. Nur je zwei einander parallele (ein Paar ausmachende) Flächen eines solchen Parallelepipeds sowohl, als auch der ganzen abgebildeten Gestalt, gehören zu einer und derselben einfachen Gestalt und bilden einen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner oder einen 2flächigen Gegenseiten- Fig. 247.

Fig. 248 A. B. wandner; 2) eine 1fach 3gliedrige mit ihrer Horizontalprojection B. Sie besteht aus zwei verschiedenen 1fach 3gliedrigen Kronrandnern R und b und aus den Tafelflächen *a*.

Gestalten mit ebenbildlich 2endiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(ebenbildlich gleichendige 1fach pgliedrige Gestalten).

Obwohl hier alle Nebenstrahlen 1fach 1gliedrig sind, so sind doch zu unterscheiden als besondere Hauptarten 1) diejenigen, welche in solchen Hauptflügelflächen liegen, in denen auch die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen sich befinden, indem in einer solchen Flügelfläche stets 2 gleichwerthige Strahlen vorhanden sind unter gleicher Neigung gegen den 1fach 2gliedrigen Strahl; 2) jene, welche in Hauptflügelflächen liegen, die den Winkel zwischen je 2 nachbarlichen Hauptflügelflächen der eben erwähnten Art halbiren, und 3) solche, die in keiner der 2 bisher bezeichneten Arten von Hauptflügelflächen sich befinden.

Denkt man sich nun bei ebenbildlich 2endig 1fach pgliedriger Hauptaxe, wenn p zuerst gröſser als 2 ist, Flächen senkrecht auf Strebestrahlen der 3ten Hauptart gleich weit vom Mittelpuncte des Strahlensystems entfernt, so ist einleuchtend, daſs, da hier jeder oberer solcher Strahl in einer Flügelfläche des oberen Hauptstrahles liegt, welche weder in die Verlängerung einer ihr gleichwerthigen Flügelfläche des unteren Hauptstrahles fällt, noch auch den Winkel halbirt, den 2 ihr gleichwerthige, einander nachbarliche, Flügelflächen des unteren Hauptstrahles mit einander bilden, die oberen und unteren Flächen der Gestalt sich in Mittelkanten von zweierlei Art schneiden müssen, welche zusammen einen unregelmäſsigen zickzackförmigen d. h. einen sägeartig zickzackförmigen Kantenring bilden.
Fig. 262 b. Derartige Gestalten werden daher bezeichnet durch den Ausdruck *tflächige Sägerandner* (*prionoides t-edrica*); z. B. 6flächi-
270. ger Sägerandner (*prionoides hexaedrica,* trigonales Trapezoeder);
271. 8flächiger Sägerandner (*prionoides octaedrica,* tetragonales Tra-
271 a. pezoeder); 10flächiger Sägerandner (*prionoides decaedrica*) u. s. w.

Jeder tflächige Sägerandner hat t ebenbildliche 1fach 1gliedrige Flächen P, die im Allgemeinen Vierecke sind, mit 2 gleich langen Seiten, welche einen der Winkel einschlieſsen, und 2 von einander sowohl, als auch von den beiden übrigen an Länge

verschiedenen Seiten. Jede der t ebenbildlichen Scheitelkanten s ist eine ungleichseitige ungleichendige d. h. 1fach 1gliedrige Kante. Die p einen gehören dem einen und die p andern dem andern Scheitel an und jeder Scheitel a ist somit eine pkantige 1fach pgliedrige Ecke. Beide Scheitel sind einander ≌. Die p Randkanten der einen Art R sowohl, als auch die p solchen der andern Art r sind 1fach 2gliedrige Kanten. Die einer und derselben Art angehörigen sind einander ≌. Die t Randecken e sind 3 × 1kantige 1fach 1gliedrige Ecken. In jeder sind vereinigt eine Scheitelkante s, eine Randkante der ersten R und eine solche der 2ten Art r. Alle t Randecken sind einander ≌. Bei einem tflächigen Sägerandner sind parallele Flächen vorhanden oder parallele Kanten.

Für p = 2 erhält man den 4flächigen Sägerandner, der von Fig. 272. den übrigen Sägerandnern sich dadurch unterscheidet, dafs seine dem Endpuncte eines Hauptstrahles angehörigen 2 Scheitelkanten einander gerade entgegengesetzt liegen, so dafs sie eine 1fach 2gliedrige horizontale Gipfelkante g bilden. Die beiden Gipfelkanten sind einander nicht parallel, die Halbirungspuncte derselben vertreten die Stelle der 2 Scheitel. Die Flächen P selbst haben die Form von Dreiecken, weil statt des Winkels am Scheitel hier ein Winkel von 180° vorhanden ist.

Für p = 1 hat man als Stellvertreter des Sägerandners einen *schiefmittelkantigen 2flächigen Schiefwandner*, bestehend aus 2 Flächen, die mit einander eine nicht horizontale Mittelkante bilden, welche die Bedeutung einer 1fach 2gliedrigen Kante hat, während die beiden Flächen selbst als einander ≌ 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind.

Flächen, welche senkrecht sind auf Strebestrahlen der oben erwähnten 2ten Hauptart, bilden tflächige Kronrandner, die jedoch blofs die Bedeutung von Sägerandnern haben, bei denen die beiden Arten von Randkanten gleich lang und gleich grofs geworden sind. Nur die einander ≌ Randkanten haben die Bedeutung von Randkanten gleichen Werthes. Scheitelkanten, Randecken, Flächen erscheinen als 1fach 1gliedrig, wenn die Gestalt in Verbindung mit andern eine zusammengesetzte 1fach pgliedrige ebenbildlich gleichendige ausmacht. Als Stellvertreter dieser Kronrandner hat man bei 1fach 2gliedriger ≌ gleichendiger Hauptaxe die 4flächigen Kronrandner; bei 1fach 1gliedriger solcher Axe aber kantenlose 2flächige Schiefwandner.

Flächen senkrecht anf Strebestrahlen der ersten jener 3 Hauptarten begrenzen tflächige Ebenrandner, die jedoch angesehen werden müssen als Sägerandner, bei denen jede Randkante der einen Art = o geworden ist, während die andern Randkanten dadurch in den mittleren Querschnitt gelangt sind. Die Randecken eines solchen Ebenrandners haben daher hier blofs den Charakter von 1fach 2gliedrigen Ecken, die Randkanten den von 1fach 2gliedrigen Kanten, die Scheitelkanten sind 1fach 1gliedrig, auch die Flächen verhalten sich als 1fach 1gliedrige und die Scheitel sind pkantige 1fach pgliedrige Ecken, obgleich die ganze Gestalt an sich, abgesehen von dem bestimmten in ihr gegebenen Strahlensysteme, mit einem gewöhnlichen tflächigen Ebenrandner übereinstimmt.

Als Stellvertreter dieses Ebenrandners, wenn p = 2 ist, hat man auch hier quersäulige 4flächige Schiefwandner und, wenn p = 1 ist, quermittelkantige 2flächige Schiefwandner, und die Charaktere dieser beiden Gestalten verändern sich auf eine dem in ihnen gegebenen Strahlensysteme entsprechende Weise. Senkrecht auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen eine Art Flächen gedacht geben eine pflächige Säule mit ebenbildlichen Flächen und ebenbildlichen Seitenkanten. Die Seitenkanten sind 1fach 2gliedrig. Dasselbe gilt von den Seitenflächen. Die pflächige Säule, deren Flächen senkrecht stehen auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen der andern Art, haben denselben allgemeinen Charakter.

Flächen, welche auf 1fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht sind, bilden 2×pflächige Säulen, welche als Querschnitt, wenn man ihn als ebene Figur an sich betrachtet, ein 2fach pgliedriges tseit, einen Lanzen-p-ling haben. Die sämmtlichen Flächen einer solchen Säule sind einander ≘, die Seitenkanten von 2erlei Art sind 1fach 2gliedrige Kanten. Halbiren jene Querstrahlen den Winkel, der von 2 nachbarlichen 1fach 2gliedrigen Querstrahlen gebildet wird, so werden die Seitenkanten der 2×pflächigen Säule von gleicher Gröfse und die Säule daher übereinstimmend in dieser Beziehung mit einer tflächigen, deren Querschnitt ein regelmäfsiges tseit ist, hinsichtlich auf den Charakter ihrer Theile aber stimmt sie mit den 2×pflächigen, hierher gehörigen, Säulen überein.

Für den Werth p = 2 hat man als hierher gehörige 2×pflächige Säulen die 2×2flächigen, als tflächige die 4flächigen

(mit quadratischem Querschnitte) und, als Stellvertreter der pflächigen Säulen, die 2flächigen Gegenseitenwandner, welche hier als von 2 ≌ 1fach 2gliedrigen einander parallelen Flächen begrenzt zu denken sind.

Wenn p = 1 ist, so sind die Stellvertreter der tflächigen Säulen 2flächige Gegenseitenwandner, die hier begrenzt zu denken sind von 2 ≌ parallelen 1fach 1gliedrigen Flächen. Die Stellvertreter der 2⨯pflächigen Säulen sind 2⨯1flächige oder 2flächige Nebenseitenwandner, an denen die beiden ≌ 1fach 1gliedrigen Seitenflächen sich in einer 1fach 2gliedrigen Seitenkante schneiden. Statt der pflächigen Säulen hat man in diesem Falle 1flächige Seitenwandner, deren einzige Begrenzungsebene auf eine der beiden 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht ist.

Bei den hierher gehörigen tflächigen Ebenrandnern sowohl, als auch den tflächigen Kronrandnern, so wie auch bei den pflächigen Säulen und endlich auch bei den Stellvertretern dieser 3 Formen, wenn der Werth von p = 2 oder 1 ist, hat man eine 1ste und 2te Stellung zu unterscheiden. Aus einer solchen Stellung läfst sich die andere herleiten durch Umdrehung der Gestalt um die Hauptaxe, so dafs jeder Querstrahl einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden beschreibt.

Denkt man sich an einem gleichstellig 2endig 2⨯tflächigen Ebenrandner die Gesammtheit der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen so weit verlängert, dafs sie die Gestalt allein begrenzen, so erhält man einen tflächigen Sägerandner, der zu dem, welcher auf ähnliche Weise durch Verlängerung der t andern unter sich ebenbildlichen Flächen entsteht, sich gegenbildlich verhält. Auf ähnliche Weise kann man an einem 2⨯tflächigen Kronrandner durch die Verlängerung der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen desselben einen tflächigen Sägerandner erzeugen, der zu dem, welcher von den gehörig verlängerten t andern unter sich ebenbildlichen Flächen jener Gestalt umschlossen wird, sich gegenbildlich verhält. Die ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Gestalt A und 3gliedrige Gestalt B lassen, wenn man sie in die einfachen Gestalten zerlegt, aus denen man sich dieselben bestehend denken kann, die wichtigsten der an solchen Gestaltensystemen vorkommenden Verhältnisse erkennen und dienen zu deren Versinnlichung. Fig. 249 A.B.

Einfache Gestalten mit ungleichendiger (oder 2 × 1endiger) 2fach pgliedriger Hauptaxe (ungleichendige 2fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p zuerst gröfser als 2 ist und man denkt sich Flächen senkrecht auf 2fach 1gliedrige Strebestrahlen einer Art, so erhält man einen *pflächigen Spitzling* [1] (*acroides p-edrica*) erster oder zweiter Stellung, z. B. 3flächiger Spitzling (*acroides triedrica*), 4flächiger Spitzling (*acroides tetraedrica*), 6flächiger Spitzling (*acroides hexaedrica*). Die p Flächen einer solchen Gestalt vereinigen sich sämmtlich in einem gemeinschaftlichen Eckpuncte, dem Scheitel. Die Flächen sind 2fach 1gliedrig und die p Scheitelkanten sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Der Scheitel ist eine pkantige 2fach pgliedrige Ecke. In jedem Systeme sind zu unterscheiden pflächige Spitzlinge der 1sten und 2ten oberen und wieder solche der 1sten und 2ten unteren Stellung. Bei jenen liegt der Scheitel am äufsern Ende des obern Hauptstrahls, bei diesen an dem des unteren. Für p = 2 erhält man, anstatt des pflächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind zu betrachten als 2fach 1gliedrige und die horizontale Gipfelkante, welche sie bilden, ist eine 2fach 2gliedrige Kante. Sie ist Stellvertreter von 2 Scheitelkanten, die hier unter einem Winkel von 180° am äufsern Ende des Hauptstrahls zusammenlaufen. Für p = 1 erhält man 1flächige Schiefwandner. Seine Fläche hat hier die Bedeutung einer 2fach 1gliedrigen Figur.

1 Das Wort *Spitzling* ist ähnlich den Worten Frühling, Spätling gebildet und bedeutet etwas, dessen Haupteigenschaft im Spitzigseyn besteht. Das Wort Pyramide bezeichnet einen Spitzling, der durch das Hinzutreten einer Grundfläche zu einer ringsum endlich begrenzten Gestalt geworden ist, welche aber, da sie demnach Flächen verschiedener Art besitzt (Scheitelflächen und Grund- oder Tafelflächen) nicht mehr als einfache Gestalt betrachtet werden darf. Man kann an den tflächigen Ebenrandnern und an den tflächigen Kronrandnern die pflächigen Spitzlinge und an den 2 × tflächigen Ebenrandnern, so wie an den 2 × tflächigen Kronrandnern die 2 × pflächigen Spitzlinge kennen lernen, wenn man die Scheitelkanten, die im einen Scheitel jener Gestalten zusammenlaufen, über die Randecken hinaus verlängert und die dieser Verlängerung entsprechende Verlängerung der Flächen dieses Scheitels gleichfalls statt finden läfst, während man die Flächen und Kanten des andern Scheitels nicht mit in Betrachtung zieht.

Auch bei den hier erwähnten 2flächigen sowohl als 1flächigen Schiefwandnern hat man eine 1ste und 2te obere und ebenso eine 1ste und 2te untere zu unterscheiden.

Flächen senkrecht auf 1fach 1gliedrige Strebestrahlen begrenzen im Allgemeinen $2 \times p$flächige Spitzlinge, deren Querschnitte 2fach pgliedrige tseite oder Lanzen-p-linge sind, z. B. $2 \times$ 2flächige Spitzlinge (*acroides didiedrica*), $2 \times$ 3flächige Spitzlinge (*acroides ditriedrica*), $2 \times$ 4flächige Spitzlinge (*acroides ditetraedrica*). An ihnen haben die Flächen die Bedeutung 1fach 1gliedriger Figuren. Die p einen verhalten sich ebenbildlich zu einander, aber gegenbildlich zu den p übrigen, die unter sich ebenbildlich sind. Der Scheitel ist eine $2 \times p$kantige 2fach pgliedrige Ecke. Die Scheitelkanten sind von zweierlei Art. Die p einen sowohl als die p andern sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Die Gröſse bezeichnet den Unterschied der beiden Arten. Werden die Scheitelkanten der beiden Arten an Gröſse gleich, so hat der Spitzling scheinbar die Form eines tflächigen, aber die Bedeutung seiner Theile bleibt dennoch dieselbe als beim $2 \times p$flächigen Spitzlinge.

Für den Werth $p = 1$ hat man als Stellvertreter des $2 \times p$flächigen Spitzlings einen $2 \times$ 1flächigen oder 2flächigen schiefgipfelkantigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind gegenbildlich 1fach 1gliedrige; die Gipfelkante ist eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante. Dem scheinbar tflächigen Spitzlinge entspricht hier der Fall, wobei die schiefe Gipfelkante sich umwandelt in eine horizontale, man mithin einen 2flächigen quergipfelkantigen Schiefwandner hat, dessen Flächen aber bloſs |=| und nicht ≌ sind, dessen Gipfelkante gleichfalls eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante bleibt.

Denkt man sich den Hauptstrahl, welcher einem pflächigen Spitzlinge angehört, wachsend, während der Querschnitt unverändert bleibt, so wird der Scheitel der Gestalt immer spitziger, und wird jener Hauptstrahl $= \infty$, so hat man eine pflächige Säule, die sich als eine ungleichendige verhält. Ihre Seitenflächen sind 2fach 1gliedrig, ihre Seitenkanten sind ebenfalls gleichseitig 2fach 1gliedrige. Für $p = 2$ ist auch hier ein 2flächiger Gegenseitenwandner vorhanden, dessen Flächen als 2fach 1gliedrige sich verhalten. Für $p = 1$ hat man einen 1flächigen Seitenwandner, dessen Fläche eine 2fach 1gliedrige ist. Auf ähnliche Weise kann man aus dem $2 \times p$flächigen Spitzlinge

die 2×pflächige Säule ableiten, deren Seitenflächen hier als 1fach 1gliedrige erscheinen, während ihre Seitenkanten gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten sind. Je 2 einer und derselben Kante anliegende Flächen verhalten sich gegenbildlich.

Für p = 1 hat man als Stellvertreter der 2×pflächigen Säule einen 2×1flächigen oder 2flächigen Nebenseitenwandner, d. h. 2 Flächen, die in einer gleichseitigen 2fach 1gliedrigen Seitenkante zusammentreffen und sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Die Querschnitte der 2×pflächigen Säule sind auch im Allgemeinen 2fach pgliedrige tseite oder Lanzenp-linge. Werden in diesem Querschnitte die zweierlei Winkel einander gleich, so erhält die Säule scheinbar die Form einer tflächigen mit regelmäſsigem tseitigen Querschnitte. Die Bedeutung ihrer Theile aber ist wie bei der gewöhnlichen 2×pflächigen Säule mit ungleichendiger 2fach pgliedriger Hauptaxe. Für p = 1 hat man als Stellvertreter einer solchen Säule einen pflächigen Gegenseitenwandner, dessen Flächen hier die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen, einander |=| Figuren haben.

Als Beispiele ungleichendiger 2fach pgliedriger Gestalten
Fig. 250. mögen dienen: 1) eine 2fach 2gliedrige und 2) eine 2fach
251. 3gliedrige. Durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie bestehen, kann man sich den Charakter dieser Gestalten und Gestaltensysteme versinnlichen.

Einfache Gestalten mit ungleichendiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(ungleichendige 1fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p gröſser als 2 ist, so begrenzen Flächen, welche senkrecht sind auf irgend eine Art von Strebestrahlen, gleichfalls wieder pflächige Spitzlinge, die an Form den 2fach pgliedrigen Spitzlingen möglicher Weise gleich seyn können, aber hier sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig und ihre Scheitelkanten gleichfalls 1fach 1gliedrig. Ihr Scheitel ist pkantig 1fach pgliedrig. Wenn p = 2 ist, so hat man, statt eines solchen pflächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner, dessen beide Flächen als ebenbildliche 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind, während die Gipfelkante eine 1fach 2gliedrige ist. Für p = 1 entsteht ein 1flächiger Schiefwandner, dessen Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Flächen senkrecht auf Querstrahlen irgend einer Art bilden im Allgemeinen pflächige Säulen, deren Seitenflächen sich als ≌ verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Auch die Seitenkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige d. h. als 1fach 1gliedrige Kanten. Auch in der Reihe dieser pflächigen Säulen treten für den Werth $p = 2$ 2flächige Gegenseitenwandner auf. Die beiden Flächen derselben verhalten sich hier ≌ und sind 1fach 1gliedrig. Für den Werth $p = 1$ erhält man eben so 1flächige Seitenwandner, deren Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Hauptaxenlose Strahlensysteme.

1) Bei hauptaxenlosen Gestalten ist die geringste Anzahl gleichwerthiger Axen = 3.

2) Diese 3 Axen müssen ebenbildlich gleich seyn.

3) Wenn von einer Art Strahlen die Anzahl 4 beträgt, so können nicht zwei derselben in eine gerade Linie zusammenfallen.

4) Auch können in diesem Falle nicht 2 Strahlen sich gegenbildlich verhalten, weil sonst die beiden, in deren jeder ein solches Paar liegen würde, sich in einer Hauptaxe schneiden müſsten.

5) Die Anzahl ebenbildlicher Strahlen einer Art muſs daher wenigstens gröſser als zwei seyn.

6) Eine hauptaxenlose Gestalt muſs Axen haben, die höher als 1gliedrig (1fach oder 2fach) sind.

Es seyen in ihr a und b zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende ebenbildliche Strahlen, welche 1gliedrig sind; man gebe jeder auf gleiche Weise einige Flügelflächen, bringe dann a auf irgend eine Weise an die Stelle, welche vorher b einnahm, so daſs die neue Stellung des Strahlensystems der alten ebenbildlich ist; es wird dann entweder: 1) b dieselbe Stelle oder 2) eine andere Stelle einnehmen müssen, als diejenige ist, welche zuvor a inne hatte.

Ist b an die Stelle von a getreten, wenn a in jene von b gebracht worden, so muſs, wenn man den Winkel zwischen a und b mittelst eines dritten Strahles v halbirt, dieser Strahl so beschaffen seyn, daſs, wenn er als Umdrehungsaxe angewendet wird, die beiden Strahlen a und b durch Umdrehung um 180° mit einander vertauscht werden können; der Strahl v ist daher

ein *wenigstens 2gliedriger.* Ist aber b nicht in die Stelle von a versetzt, wenn a in die von b gerückt worden, so muſs b die Stelle einnehmen, welche vorher ein dritter, mit a und b ebenbildlicher, Strahl einnahm. Legt man nun durch gleichweit vom Mittelpuncte entfernte Puncte in diesen drei Strahlen eine Ebene und zieht durch den Mittelpunct des Strahlensystems die auf sie senkrechte Axe, so ist einleuchtend, daſs in Beziehung auf eine Richtung in dieser Axe die drei Strahlen a, b und c sich ebenbildlich verhalten, daſs also diese Axe eine mindestens 3gliedrige seyn müsse.

7) Wenn ein hauptaxenloses Strahlensystem 2gliedrige Axen besitzt, so hat es auch Axen, welche drei oder mehrgliedrig sind.

Es seyen a und b zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, welche nicht in eine und dieselbe Linie zusammenfallen. Man bringe das Strahlensystem in eine der ersten gegebenen Stellung ebenbildliche Stellung, so daſs a an die Stelle kommt, welche vorher b einnahm, so muſs b entweder 1) an die Stelle von a gerückt seyn oder 2) eine andere Stelle einnehmen.

Im ersten Falle wird der Strahl, welcher den Winkel zwischen a und b halbirt, gleichfalls ein 2gliedriger Strahl c seyn müssen. Man hat also in einerlei Ebene liegend 3 Strahlen, welche 2gliedrig sind und von denen man weiſs, daſs die beiden äuſsersten ebenbildlich sind in Beziehung zum mittleren. Aber ebenso muſs in derselben Ebene jeder dieser beiden äuſseren Strahlen a und b ein mittlerer seyn für zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, von denen der eine jener erste mittlere Strahl c ist. Nennt man die mit c als ebenbildlich erkannten beiden neuen Strahlen d und e, so muſs der Winkel, welchen c mit d oder mit e macht, gleich dem Winkel seyn, welchen a mit b macht und daher kleiner als 180°. Die Ebene, in welcher diese sämmtlichen Strahlen liegen, hat daher in den 3 Strahlen c, d und e eine Anzahl ebenbildlicher 2gliedriger Strahlen, welche gröſser als 2 ist. Zwei 2gliedrige ebenbildliche in einerlei Ebene liegende Strahlen sind aber auch einander ebenbildlich in Beziehung auf die eine Richtung in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Axe, wenn sie einander ebenbildlich sind in Beziehung auf einen in der Ebene befindlichen zwischen ihnen liegenden Strahl. Es ist nämlich jede der beiden in der erwähnten Ebene liegenden Flügelflächen des einen der beiden vergli-

chenen 2gliedrigen Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden in derselben Ebene liegenden Flügelflächen des andern, weshalb auch jede der beiden auf diese Ebene senkrechten Flügelflächen des einen dieser Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden auf dieselbe Ebene senkrechten Flügelflächen des andern seyn mufs, so dafs also durch Umdrehung um die auf der erwähnten Ebene senkrechte Axe der eine 2gliedrige Strahl so an die Stelle des andern gebracht werden kann, dafs jede der 4 der Betrachtung unterworfenen, folglich jede Flügelfläche desselben, an die Stelle einer ihr ebenbildlichen getreten ist und also diese beiden 2gliedrigen ebenbildlichen Strahlen auch einander ebenbildlich sind in Beziehung auf den auf der Ebene, in welcher sie liegen, senkrechten Strahl. Insofern also die drei Strahlen c, d und e in Beziehung zu dem auf der Ebene, in der sie liegen, senkrechten Strahl einander ebenbildlich sind, so mufs dieser Strahl 3- oder mehrgliedrig seyn.

Im 2ten Falle wird b eine Stelle einnehmen müssen, welche vorher ein dritter mit a und b ebenbildlicher Strahl c einnahm. Legt man hier wieder eine Ebene durch drei Puncte, deren jeder in einem dieser 3 Strahlen a, b, c in einerlei bestimmter Entfernung α vom Mittelpuncte des Strahlensystems angenommen worden, so wird die auf diese Ebene senkrechte Axe eine 3- oder mehrgliedrige seyn müssen, weil durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um sie der Strahl a an die Stelle von b rückt, wenn b an jene gelangt, die vorher c einnahm, während zugleich 1) die Flügelfläche von a, welche durch b geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von b, die durch c geht, getreten ist, mithin a eine Stellung erhalten hat, die mit derjenigen, welche b zuerst hatte, ebenbildlich ist; und 2) die Flügelfläche von b, welche durch a geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von c, welche durch b geht, gelangt ist, so dafs b eine mit der vorigen von c ebenbildliche Stellung hat.

8) Die höchst vielgliedrigen Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten können nicht höher als 5gliedrig seyn. Man nehme an, es seyen 6gliedrige Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten möglich, so werden, wenn man zwei ebenbildliche Strahlen, die den kleinsten Winkel mit einander bilden, den zwei solche Strahlen einschliefsen können, nachbarliche ebenbildliche Strahlen nennt, einen 6gliedrigen Strahl 6 nachbarliche ihm eben-

bildliche Strahlen so umgeben müssen, dafs sie bei der durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um jenen ersten 6gliedrigen Strahl bewirkten Vergleichung sich in Beziehung zu ihm als einander ebenbildliche Strahlen verhalten. Von den 6 Flügelflächen, in denen sie liegen, müssen also je 2 benachbarte um $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ gegen einander geneigt seyn und alle jene 6 Strahlen müssen gegen jenen einzelnen gleichgeneigt seyn, so dafs jeder mit ihm einen Winkel α bildet. Es sey ca jener erste
Fig. 273. Strahl, cb und cd seyen 2 der 6 nachbarlichen ihm ebenbildlichen Strahlen, welche in benachbarten Flügelflächen acb und acd liegen; man lege durch einen Punct q in ca eine Ebene dqb senkrecht auf ca, so dafs also die Winkel dqc und bqc rechte Winkel sind, mithin der Winkel dqb als Neigungswinkel von dca auf bca betrachtet werden kann. Es wird nun, da auch dca = bca = α ist, auch dq = bq seyn; weil aber dqb hier als Neigungswinkel zweier benachbarter ebenbildlicher Flügelflächen eines 6gliedrigen Strahls = 60° ist, so ist das Dreieck dqb ein gleichseitiges, also db = bq. Aber das Dreieck dcb ist gleichschenklig und dbc ein spitzer Winkel. Zieht man dv durch d senkrecht auf cb, so ist die Kathete dv kleiner als die Hypotenuse db im Dreieck dvb, folglich auch kleiner als qb; da nun dc = bc, so ist vd : dc < qb : bc, d. h. der Winkel dcb < bca. Da nun aber bca = α, d. h. der kleinste Winkel seyn soll, den zwei solche 6gliedrige ebenbildliche Strahlen einschliefsen können, so heifst dieses: in hauptaxenlosen Gestalten müssen zwei 6gliedrige ebenbildliche Strahlen cd und cb einen Winkel einschliefsen, welcher kleiner ist, als der kleinste, den zwei derartige 6gliedrige Strahlen einschliefsen können, was ein wahrer Widerspruch ist. 6- und mehrgliedrige Strahlen sind also in hauptaxenlosen Gestalten nicht möglich.

9) Nur bei der hauptaxenlosen Gestalt mit unendlich vielen unendlich vielgliedrigen Axen, bei der Kugel, verschwindet die Ungleichheit zwischen den unendlich kleinen Winkeln, die unsern Winkeln bca und bcd entsprechen.

10) Wenn ein pgliedriger Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 3- oder mehrgliedrig ist, so ist die Anzahl der ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen nicht gröfser als p. Dafs sie nicht kleiner als p seyn darf, ergiebt sich aus dem pgliedrig-

seyn, sie könnte aber 2p oder allgemeiner np seyn; da aber der kleinste Werth von p = 3 ist, so würde 2p schon 6 geben. Es müſste dann einer der 3 einen zwischen zweien der 3 andern liegen, entweder beiden in *gleichem* Grade benachbart, oder dem einen mehr als dem andern. Jedenfalls würden dann zwei ebenbildliche derartige Strahlen einander mehr benachbart seyn, als zwei nachbarliche solche Strahlen, was mit dem oben gegebenen Begriffe der nachbarlichen Strahlen im Widerspruche steht.

11) Wenn daher ein 3- oder mehrgliedriger Strahl a′ zu den nachbarlichen Strahlen eines andern ihm ebenbildlichen Strahles a gehört und in einer Flügelfläche β desselben liegt, so muſs auch der Strahl a ein eben solcher nachbarlicher Strahl von a′ seyn und in einer Flügelfläche β′ von diesem auf gleiche Weise liegen, so daſs die Flügelfläche β′ des Strahles a′ ebenbildlich ist der Flügelfläche β des Strahles a.

12) Beide Flügelflächen β und β′ fallen aber zusammen in die Ebene zwischen a und a′; *der Strahl d, welcher den Winkel zwischen a und a′ halbirt, muſs sonach ein 2gliedriger* Strahl seyn; denn wenn durch Umdrehung um ihn die beiden Strahlen a und a′ vertauscht werden, so sind auch die ebenbildlichen Flügelflächen β und β′ vertauscht, die deshalb auch für den Strahl d ebenbildliche Flügelflächen sind, weshalb er, da die Neigung dieser Flügelflächen $= \frac{360°}{2} = 180°$ ist, ein 2gliedriger Strahl seyn muſs.

13) Wenn ein Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 4- oder 5gliedrig ist, so sind je zwei ihm nachbarliche und ebenbildliche Strahlen, welche in nachbarlichen ebenbildlichen Flügelflächen desselben liegen, auch gegen einander nachbarliche ebenbildliche Strahlen. Es sey ca jener erste, cd und cb die beiden andern derartigen Strahlen. Es ist dann acd = acb oder der Bogen ad = dem Bogen ab. Ist dann dcb nicht = acb oder der Bogen db nicht = dem Bogen ab, so müſste der Bogen db gröſser als der Bogen ab seyn; denn wäre db < ab, so würden ca und cb nicht nachbarliche Strahlen seyn. Es sey daher der Bogen db > ab, so wird auch in dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke bad der Winkel dab gröſser als der Winkel abd seyn müssen. Es sey nun ferner ach eine Flügelfläche von ca, die zu acb die rechte nachbarliche ebenbildliche ist, wenn acd die linke ist, und ch sey der Fig. 274.

in ihr liegende, zu ca nachbarliche ebenbildliche Strahl. Da nun ca und cb ebenbildliche nachbarliche 3- oder 4gliedrige Strahlen sind, so ist der Strahl cn, welcher den Winkel zwischen beiden halbirt, ein 2gliedriger Strahl. Nimmt man ihn als Umdrehungsaxe, um cb mit ca zu vertauschen, so wird der Winkel ahb, da er = abd ist, kleiner als dab seyn und daher die Seite bh zwischen ad und ab liegen müssen, z. B. so wie af, so dafs baf = abd ist. Umgekehrt wird ah nicht zwischen ba und bd, sondern über bd hinaus fallen müssen, weil bah = bad, also > abd ist. Sie liege wie bf, so dafs abf = bad ist; es ist dann der Strahl cf, als ein dem Strahle ch ebenbildlicher, auch den Strahlen ca und cb und cd ebenbildlich. Es ist nun af = bd, aber auch ag = bg (weil gab = gba ist), daher auch gd = gf. Es kann aber df nicht kleiner als ab seyn, weil sonst ca und cb nicht nachbarliche Strahlen seyn würden. Ist aber df = ab = ad, so mufs auch dbf = dba, mithin abf = bad = 2abd seyn; ist df > ab oder df > ad, so mufs dbf > dba, mithin abf (= bad) > 2abd seyn. In dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke dab aber sind bei unverändertem Winkel bad die Winkel abd und adb um so kleiner, je kleiner die Bogen ad und ab sind; sie werden daher am kleinsten seyn, wenn ad = bd = Null wird. Dann ist abd + adb = 2R — bad und

$$abd = \frac{1}{2}(2R - bad).$$

Ist dann ca ein 5gliedriger Strahl, so ist dab = $\frac{4}{5}$R = 72° = dem Mittelpunctswinkel des regelmäfsigen Fünfecks, daher = $\frac{1}{2}$(2R — 72°) = 54° = dem halben Umfangswinkel des regelmäfsigen Fünfecks. Da nun 2 × 54° = 108° > 72° ist, so kann abf oder bad nicht $\overset{=}{>}$ 2abd seyn, weil selbst der kleinste Werth von abd, welcher hier nicht erreicht werden darf (indem sonst die Strahlen ca, cb, cd u. s. w. in einen und denselben Strahl zusammenfallen würden), gröfser als $\frac{1}{2}$bad ist. Es mufs daher für die 5gliedrigen Strahlen ca, cb, cd gelten, dafs Bogen bd = ba = da.

Ist der Strahl ca 4gliedrig, so ist bad = 90° = R und $\frac{1}{2}$(2R — R) = $\frac{1}{2}$R = 45°, folglich der kleinste Werth von abd = 45°, so dafs 2abd = bad seyn könnte. Dieser kleinste Werth darf aber nicht erreicht werden, wenn nicht die Strahlen

ca, cb, cd u. s. w. zusammen in einen fallen sollen; daher muſs auch hier Bogen bd = ba = da seyn.

Sowohl bei 5gliedrigen als auch bei 4gliedrigen Strahlen ca, cb, cd u.s.w. ist dann also dba = bda = bad; folglich für den Strahl cb die Flügelfläche dcb ebenbildlich der Flügelfläche acb. In Beziehung auf cb ist also cd ebenbildlich mit ca und ebenso umgekehrt in Beziehung auf cd ist cb ≌ ca, folglich sind cb und cd nachbarliche ebenbildliche Strahlen.

14) Nimmt man daher in drei solchen 4- oder 5gliedrigen, einander gegenseitig nachbarlichen, Strahlen Puncte an, welche gleichweit entfernt vom Mittelpuncte des Strahlensystems sind, und legt durch diese drei ebenbildlichen Puncte eine Ebene, so ist der auf diese Ebene senkrecht zu fällende Strahl ein 3gliedriger.

15) Sind die Strahlen ca, cb, cd dreigliedrige Strahlen, so ist bad = 120°. Es ist dann $\frac{1}{2}$ (2 R — 120°) = 30° und 2 × 30 < 120. Es kann daher hier sowohl bd = ab oder ad seyn, als auch gröſser.

16) Wenn bd = ab = ad ist, so muſs abd = adb = bad = 120° seyn. Legt man durch die Puncte b, a und d eine Ebene, so ist dann der auf diese Ebene senkrechte Strahl ce ein *dreigliedriger,* der aber nicht mit ca, cb, cd ebenbildlich seyn kann, weil er mit ca einen Winkel eca bildet, der kleiner als acb ist, was daraus sich ergiebt, daſs aeb = 120° und eba = 60° ist, folglich kleiner als aeb, so daſs der Bogen ae < ab seyn muſs; es würde dann cb nicht ein dem ca nachbarlicher Strahl seyn. Die drei 3gliedrigen Strahlen ca, cb und cd schneiden sich im Mittelpuncte c, so daſs die drei Ebenen acb, bcd, dca eine 3kantige 3winklige Ecke bilden, bei der jede Kante = 120° miſst.

17) Ist bd > ab, so muſs der Strahl, welcher senkrecht auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt werden kann, ein 4- oder 5gliedriger seyn; denn daſs er nicht 3gliedrig seyn könne, ist aus dem eben Gesagten einleuchtend; daſs er aber höher als 2gliedrig seyn müsse, ergiebt sich daraus, daſs durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn cd an die Stelle von ca kommt, wenn ca an die Stelle von cb tritt u. s. w.

18) Ist der auf die Ebene durch a, b, und d senkrechte Strahl 4gliedrig, so muſs abd = adb = $\frac{1}{2}$ × 120° = 60° und auſser den 3 Strahlen ca, cb, cd muſs noch ein vierter 3gliedriger Strahl vorhanden seyn, der in Beziehung zu jenem 4glie-

drigen mit den 3 genannten ebenbildlich ist, und diese 4 Strahlen schneiden sich im Mittelpuncte c, so daſs die durch je zwei nachbarliche derartige Strahlen gelegten Ebenen 4kantige 4winklige Ecken bilden, an denen jede Kante 120° miſst.

19) Ist der auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt wurde, senkrechte Strahl ein 5gliedriger, so muſs er von 5 solchen in Beziehung zu ihm ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen, wie ca, cb, cd u. s. w., zunächst umgeben seyn und die Mittelpunctsecke, für welche jene 5 Strahlen als Kanten dienen, ist eine 5kantige 5winklige Ecke, in welcher jede der 5 Kanten = 120° miſst. Die Beschaffenheit der verschiedenen hauptaxenlosen Strahlensysteme hängt also vorzüglich ab von den Eigenschaften der 3kantigen oder 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunctsecken, deren Kantenlinien 3gliedrige Strahlen sind und von denen man daher weiſs, daſs jede ihrer Kanten $= \frac{1}{3} \times 360° = 120°$ ist.

Fig. 276. Es sey c, def eine 3kantige Ecke mit Kanten von 120°. Man mache cd = ce = cf, lege durch d, e, f die Ebene def, halbire ef in g und de in h, so bestimmt sich die Lage der Hülfsebenen dcg und fch und außer den Linien cg, ch, dg, hf die Linie cb so, daſs cb lothrecht auf def ist u. s. w. Auch ergiebt sich nun die Ebene bce (= bcf = bcd). Ziehe hg, dann von dem hierdurch bestimmten Puncte o aus die Linie oi lothrecht auf ce, so ist hierdurch die Ebene hig so bestimmt, daſs ce lothrecht auf hig ist und der Winkel hig = 120°, der Winkel hio = gio = 60°. Daher $io : ig : og = 1 : 2 : \sqrt{3}$, oder auch gbo = 60°, also $ob : bg : og = 1 : 2 : \sqrt{3}$, also bg = ig. Aber $eg : bg = \sqrt{3} : 1$, $eg = bg\sqrt{3}$. Daher

$$eg : ig = bg : bg\sqrt{\tfrac{1}{3}},\quad ig = eg\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$ie = \sqrt{eg^2 - ig^2} = \sqrt{3.ig^2 - ig^2} = ig\sqrt{2}$$

oder $ie : ig = eg : cg = k : 1$; und $cg = 1$ gesetzt ist

$$eg = \sqrt{2},\quad ce = \sqrt{3},\quad bg = ig = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ie = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},\quad ci = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$cb = \sqrt{cg^2 - bg^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$hg = eg = k,\quad ho = og = \tfrac{1}{2}k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$bo = io = \tfrac{1}{2}ig = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$be = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 4\sqrt{\tfrac{1}{6}},\quad dg = 3\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 6\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$co = \sqrt{bo^2 + cb^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Daraus folgt:

$$\text{Tg. } bcg = \frac{bg}{bc} = \frac{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = \sqrt{2},\ bcg = 54^\circ\, 44'\, 8''$$

$$\text{Tg. } bcf = \frac{be}{bc} = \frac{2\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}.} = 2\sqrt{2},\ bcf = 70^\circ\, 31'\, 44''$$

$$\text{Tg. } ecg = \frac{eg}{cg} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ ecg = 54^\circ\, 44'\, 8''$$

$$\text{Tg. } 2ecg = \frac{2\,\text{Tg. } ecg}{1 - \text{Tg. } ecg^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -\,2\sqrt{2}$$

$$\text{Tg. } \tfrac{1}{2}hcg = \frac{og}{oc} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 1,\ \tfrac{1}{2}hcg = 45^\circ,\ hcg = 90^\circ$$

$$2ecg = ecf = 2R - bcf = 109^\circ\, 28'\, 16''.$$

20) Die Anzahl 3kantiger 3winkliger Mittelpunctsecken mit Kanten von 120° ist aber, sofern je 2 derselben nur eine ihrer Flächen gemeinschaftlich haben sollen, d. h. neben einander nicht ganz oder zum Theil in einander liegen sollen, = 4.

Es sey c, abf eine solche Ecke. Legt man durch ca die Ebene acd so, dafs fca ‖ dca = 120°, und ebenso durch cf die Ebene fcd so, dafs afc ‖ dcf = 120°, so ist auch wegen des gemeinschaftlichen Winkels fca die Ecke c, afd ≌ c, abf, folglich acd ‖ fcd = 120°. Wird nun durch cb und cd eine Ebene gelegt, so ist die Ecke c, abd ≌ c, abf, weil die Kante ca der ersten = der Kante ca der 2ten = 120° (indem 360 — 2 × 120 = 120) und die beiden diese Kante einschliefsenden Winkel acb und acd der ersten gleich sind den einschliefsenden Winkeln acf und acb der andern. Es ist dann auch jede der beiden Kanten cb und cd der Ecke c, abd = 120°. Die drei Ebenen bcf, fcd und dcb bilden aber nun eine Ecke c, bfd, in welcher jede der 3 Kanten = 360° — 2 × 120° = 120°, so dafs diese Ecke die 4te Mittelpunctsecke ist. Fig. 277.

21) Wenn daher keine Strahlen vorhanden seyn sollen, die höher als 3gliedrig (d. h. die 4- oder 5gliedrig) sind, so mufs die Anzahl ebenbildlicher 3gliedriger Strahlen = 4 seyn. Die 3gliedrigen Strahlen müssen hier nämlich so liegen, dafs die 3kantigen Mittelpunctsecken entstehen; denn entständen die 4- oder die 5kantigen, so würden auch 4- oder 5gliedrige Strahlen vorhanden seyn müssen. Es werden daher in diesem Falle 3gliedrige Strahlen von zweierlei Art vorhanden seyn, nämlich aufser den 4 einen, die als Kanten der 4 Mittelpunctsecken betrachtet

werden, noch 4 andere, deren jeder als mittlerer Strahl innerhalb einer dieser Mittelpunctsecken anzusehen ist (gleichwie in den beiden andern Fällen die 4gliedrigen oder 5gliedrigen Strahlen solche mittlere Strahlen in den 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunctsecken sind).

Es ist einleuchtend, dafs die vier 3gliedrigen Strahlen der einen Art nicht ebenbildlich seyn können mit denen der andern Art, während die 4 einer und derselben Art angehörigen unter sich ebenbildlich sind. Zwei ebenbildliche nachbarliche 3gliedrige Strahlen, sowohl der einen als auch der andern Art, bilden mit einander einen Winkel von 109° 28′ 16″. Je einer der einen Art bildet mit jedem der 3 ihm nächsten der andern Art einen Winkel von 70° 31′ 44″, mit dem 4ten aber einen solchen von 180°, d. h. er ist dessen Verlängerung.

22) Da nun um jeden 3gliedrigen Strahl 3 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen auf gleiche Weise gelagert seyn müssen, aber jeder 2gliedrige Strahl zwischen zwei ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen in der Mitte liegt, also zu 2 solchen gehört, so müssen zu den 4 ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{4.3}{2}$ oder 6 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen gehören. Der Winkel, den ein 2gliedriger Strahl mit jedem der zwei nachbarlichen ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen der ersten Art bildet, zwischen denen er liegt, ist $= \frac{109^\circ\ 28'\ 16''}{2} = 54^\circ\ 44'\ 8''$. Auch mit jedem der beiden nachbarlichen ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen der 2ten Art, die ihm zunächst liegen, bildet er Winkel von 54° 44′ 8″ und liegt demnach auch zwischen diesen, den Winkel, den sie bilden, halbirend.

23) Jeder 2gliedrige Strahl ist auf die Ebene zweier andern eben solchen 2gliedrigen Strahlen senkrecht, die 6 ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen machen also 3 ebenbildliche gleichendige 2gliedrige Axen aus, deren jede auf die beiden andern senkrecht ist. Alle übrigen Axen, aufser den aufgezählten 3gliedrigen der ersten und 2ten Art und den 2gliedrigen, sind blofs 1gliedrige Strahlen.

Fig. 278. 24) Die wichtigsten Verhältnisse einer 4*kantigen* 4*winkligen Ecke mit Kanten* von 120° ermitteln sich, wenn man bei einer solchen Ecke d, e b g h in den Kantenlinien d e = d b = d g nimmt, durch e, b, g die Ebene e b g h und durch h, d, b die

Ebene h d b und durch e, d, g die Ebene e d g legt, wodurch die Linien d c, e g und h b entstehen, deren erste d c, wie leicht einzusehen, im Puncte c senkrecht auf den beiden andern auf einander senkrechten e g und h b ist. Fället man c a aus c senkrecht auf d b und legt durch e, a, g die Ebene e a g, so ist der Winkel e a g der Neigungswinkel, welcher die Gröfse der Kante d b mifst, also $= 120°$, und $eac = 60°$. Zieht man nun c f lothrecht auf e b und dann d f und wieder f i parallel mit e g und verbindet d und i durch d i, so hat man für $cf = 1$:

$$ef = bf = 1,\ eb = 2$$ Fig. 278.

$$cb = ec = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$ac : ec = \text{Cotg. } 60° : 1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 1 = 1 : \sqrt{3}$$

$$ac = ec\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$ Fig. 281.

$$ae : ac = 1 : \text{Cos. } 60° = 2 : 1.$$

$$ae = 2ac = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ab = \sqrt{cb^2 - ac^2} = \sqrt{2 - \tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$ Fig. 282.

$$ac : ab = dc : cb.$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = dc : \sqrt{2}.$$

$$1 : \sqrt{2} = dc : \sqrt{2},\ dc = 1.$$

$$di = df = \sqrt{2}$$

$$de = db = \sqrt{3}$$

$$da = \sqrt{3} - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{9}{3}} - \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

$$\text{Tg. } fdc = \frac{fc}{cd} = \frac{1}{1} = 1,\ fdc = 45°.$$

$$\text{Tg. } edc = \frac{ec}{cd} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ edc = 54° 44' 8''.$$

$$\text{Tg. } edf = \frac{ef}{fd} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ edf = 35° 15' 52''.$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} fdi = \frac{\tfrac{1}{2} fi}{fd} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2},\ fdi = 60°.$$

$$\left.\begin{matrix} edb \parallel hdg \\ = edh \parallel bdg \end{matrix}\right\} = 2 \times 45° = 90°.$$

$$edb = 2 \times 35° 15' 52'' = 70° 31' 44''.$$

$$edg = 2 \times 54° 44' 8'' = 109° 28' 16''.$$

25) Sind die 3gliedrigen Strahlen so vertheilt, dafs 4kantige 4winklige Mittelpunctsecken entstehen, so ist die Anzahl dieser Ecken $= 6$. Es sey c, b i h d eine solche Ecke mit Kanten von 120°. Legt man durch den 3gliedrigen Strahl c d die Ebene d c f, so dafs sie gegen d c h, folglich auch gegen d c b um 120° Fig. 279.

geneigt ist, so wird in ihr der Strahl cf so liegen müssen, dafs der Winkel dcf = dcb = dch. Legt man durch ihn die Ebene fcg und durch ch die Ebene hcg, so dafs fcg || fcd = hcg || hcd = 120°, so ist die Ecke c, dfgh ≌ c, bdhi, folglich der Winkel fcg = hcg = dch = fcd, mithin cg der zu cf, cd, ch gehörige vierte 3gliedrige ebenbildliche Strahl. Wird nun durch cf die Ebene acf und durch cb die Ebene acb so gelegt, dafs acf || dcf = acb || dcb = 120°, so ist die Ecke c, abdf ≌ c, bihd u. s. w., mithin der Winkel acb = bcd = acf = dcf, folglich ca der zu cb, cd, cf gehörige 4te ebenbildliche 3gliedrige Strahl, welcher zu cb sowohl als zu cf nachbarlich ist. Es ist dann acb || icb = 120°. Wird durch ca die Ebene kca und durch ci die Ebene kci so gelegt, dafs kca || bca = kci || bci = 120° ist, so ist die Ecke c, abik ≌ c, bdhi u. s. w., folglich der Winkel ack = acb = bci = ick und also ck der zu ca und ci nachbarliche ebenbildliche 3gliedrige Strahl, welcher zu ca, cb, ci als 4ter Strahl gehört. Wird durch ck und cg eine Ebene gelegt, so wird die Ecke c, afgk ≌ c, dbih seyn müssen, weil sie mit ihm übereinstimmt in Ansehung dreier Winkel und der 2 von diesen Winkeln eingeschlossenen Kanten. Es mufs daher fcg || kcg = ack || gck = 120° und der Winkel kcg = fcg u. s. w. seyn, so dafs ck auch ein zu cg nachbarlicher ebenbildlicher 3gliedriger Strahl ist. Die nun noch übrigbleibende Ecke c, kghi hat 4 Kanten, deren jede = 360° — 2 × 120° = 120° ist und deren einander gleiche Winkel mit denen der 5 bisher betrachteten Ecken übereinstimmen; es ist daher die 6te solche Mittelpunctsecke.

26) Es ergiebt sich daraus die Anzahl der ebenbildlichen 4gliedrigen Strahlen = 6, die der ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{3} = 8$ und die der ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Fig. 280. Es sey fdc ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck = fdc von Fig. 278. Man bilde das aus 8 solchen Dreiecken bestehende Quadrat ff′f″f‴. Ferner sey die Verbindung der
Fig. 281. beiden Dreiecke dec und deg gleich der ebenso bezeichneten von Fig. 278 und cd, ed und gd seyen über d hinaus so weit verlängert, bis die Verlängerung dem Verlängerten gleich und

hierdurch die Figur e′g′g e bestimmt ist, so wird, wenn d n ∦ e c ist, auch das Dreieck d n e = e c d seyn. Auch sey f d i gleich dem gleichseitigen Dreiecke f d i in Fig. 278 und das Sechseck sey eine Verbindung von 6 solchen Dreiecken. Zwei nachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\alpha = 70^\circ\ 31'\ 44''$ (e d b Fig. 278).

Zwei nebennachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\beta = 109^\circ\ 28'\ 16''$ (e d g Fig. 278), so daſs $\beta = 180^\circ - \alpha$. Zwei 3gliedrige Strahlen bilden eine ebenbildlich gleichendige Axe; die 8 derartigen Strahlen geben mithin 4 ebenbildlich gleichendige 3gliedrige Axen. Jeder 4gliedrige Strahl bildet mit jedem ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahle einen Winkel $= 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ (2 f d e Fig. 278, c d c″ Fig. 280). Daher bilden die 6 4gliedrigen Strahlen 3 auf einander senkrechte ebenbildlich gleichendige 4gliedrige Axen.

Die Neigung des 4gliedrigen Strahles zu den nächsten 3gliedrigen $= 54^\circ\ 44'\ 8''$ (e d c Fig. 278 und 281). Die Neigung desselben zu den entfernteren

$$= 54^\circ\ 44'\ 8'' + 70^\circ\ 31'\ 44''$$
$$= 125^\circ\ 15'\ 52''$$
$$= 180^\circ - 54^\circ\ 44'\ 8''$$ (c d e′ Fig. 281).

Jeder 2gliedrige Strahl macht mit jedem der beiden ihm nächsten 3gliedrigen Strahlen Winkel von $35^\circ\ 15'\ 52''$ (f d e und f d b Fig. 278), mit den 4 weiter entlegenen aber solche von 90° (f d g und f d h Fig. 278), mit den 2 entferntesten solche von $180^\circ - 35^\circ\ 15'\ 52'' = 144^\circ\ 44'\ 8''$ (n d g Fig. 281). Mit den beiden ihm nächsten 4gliedrigen Strahlen bildet er Winkel von 45° (f d c Fig. 278); auf die beiden weiter entfernten ist er senkrecht (c d n und c′ d n Fig. 281). Mit den beiden am weitesten entfernten 4gliedrigen Strahlen macht er Winkel von 135° (f d c‴ und f d c′ Fig. 280). Jeder 2gliedrige Strahl bildet mit jedem der 4 ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen Winkel von 60° (f d i Fig. 278 und 282). Auf die beiden entfernteren ist er senkrecht (f d f′ und f d f‴ Fig. 280). Mit jedem der 4 noch weiter entfernten macht er einen Winkel $= 120^\circ$ (i d n Fig. 282).

Der 12te fällt in die Verlängerung von ihm über den Mittelpunct hinaus, so daſs also die 12 ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen 6 ebenbildlich gleichendige 2gliedrige Axen bilden (f d f″ Fig. 280 und 282). Jeder andere Strahl ist 1gliedrig.

1gliedrig gleichseitig ungleichendig und die 2 einer solchen Kante anliegenden Flächen sind einander gegenbildlich.

Auf ähnliche Weise entsteht aus dem erwähnten vflächigen Ebenrandner eine tflächige Säule 2ter Art, deren Flächen auf 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht stehen. Ihre Seitenkanten sind 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten, je 2 einer Seite anliegende Flächen verhalten sich |=|.

Für p = 1 erhält man als Stellvertreter der tflächigen Säule mit 2fach 1gliedrigen Flächen den 2flächigen Gegenseitenwandner mit 2fach 1gliedrigen Flächen, statt der tflächigen Säule mit 2fach 1gliedrigen Flächen einen 2flächigen Gegenseitenwandner mit 1fach 2gliedrigen Flächen. Jeder besteht aus 2 parallelen Flächen; die des einen stehen auf denen des andern senkrecht, weil auch hier die 2fach 1gliedrigen Strahlen auf den 1fach 2gliedrigen senkrecht sind. Die 2 × 2flächige Säule tritt als solche auch hier auf und hat den Charakter der oben erwähnten 2 × tflächigen Säule.

Fig. 244 A,B. 245. 246 A,B, C,D, E,F. Als Beispiele von zusammengesetzten gerenstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten mögen dienen: 1) eine 2fach 1gliedrige A mit ihrer Horizontalprojection B[1]; 2) eine 2fach 2gliedrige und 3) einige 2fach 3gliedrige, welche mehr oder weniger zusammengesetzt sind und leicht in die einfachen Gestalten zerlegt werden können, aus denen sie zusammengesetzt sind. Nur eine derselben möge hier beispielsweise zerlegt werden. Fig. 246 C. Die Flächen P eines 6flächigen Kronrandners sind verbunden mit denen m eines eben solchen Körpers derselben Stellung, dessen Scheitel spitziger ist, als der des Kronrandners P. Die Flächen r und y gehören verschiedenen 2 × 6flächigen Kronrandnern und die Flächen c der 6flächigen Säule an, welche 2fach 1gliedrige Flächen hat.

1 Man pflegt einzelne minder zusammengesetzte 1gliedrige Gestalten mit besonderen Namen zu belegen. So heifst z. B. die Gestalt, Fig. 244. welche aus der Verbindung der Flächenpaare P, r und l entsteht, eine schiefe rectanguläre Säule (prisme oblique à base rectangle), jene, welche von den Flächen M und P gebildet ist, heifst schiefe rhombische Säule (*Hendyoeder*, prisme oblique à base rhombe), eine Verbindung von Flächen, wie M und o, nennt man ein rhomboidisches Ditetraeder, rhomboidisches Oktaeder u. s. w. Wie auf ähnliche Weise die Verbindungen t, l, r oder t, r, P u. s. w. und wieder o, r oder o, t u. s. w. und M, S oder o, s; o, u u. s. w. zu benennen seyen, ist eine leicht zu lösende Aufgabe.

Einfache Gestalten mit gerenstellig 2endig 1fach pgliedrigen Hauptaxen

(gerenstellig 2endig 1fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p gröſser als 1 ist, so sind die 1fach pgliedrigen, hierher gehörigen, Schiefwandner im Allgemeinen tflächige Kronrandner, die aber in zusammengesetzten Gestalten, an welchen das Axensystem sich als ein gerenstellig 2endig 1fach pgliedriges zu erkennen giebt, oder, was dasselbe sagt, die in Beziehung zu einem gegebenen solchen Axensysteme den Charakter annehmen, der ihnen verliehen wird dadurch, daſs ihre Flächen senkrecht sind auf Strebestrahlen desselben, da hier alle 1fach 1gliedrig sind. Die p oberen Flächen verhalten sich daher zu den p unteren gegenbildlich, ohne ihnen zugleich ≌ zu seyn. Die Scheitel sind bloſs 1fach pgliedrig, die Scheitelkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige d. h. 1fach 1gliedrige Kanten. Das Nämliche gilt von den Randkanten und auch die Randecken verhalten sich bloſs als 1fach 1gliedrige Ecken.

Die hier vorkommenden Säulen sind tflächige und zwar sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig. Alle Seitenkanten sind von gleicher Gröſse und sind 1fach 1gliedrig. Je 2 benachbarte sind |=|; je 2 einer und derselben Seitenkante anliegende Flächen verhalten sich ebenfalls |=|.

Für den Werth von p = 1 erhält man als Stellvertreter des 1fach pgliedrigen tflächigen Kronrandners einen 1fach 1gliedrigen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner, bestehend aus 2 einander parallelen Flächen, die sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Flächen sind. Als Stellvertreter der tflächigen Säule hat man ebenso einen 2flächigen Gegenseitenwandner, dessen 2 Flächen sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrige Figuren sind. Als Beispiele gerenstellig 2endiger 1fach pgliedriger Gestalten mögen dienen 1) eine 1fach 1gliedrige, an Fig. 247. welcher je 3 Flächenpaare ein unregelmäſsiges Parallelepipedon bilden, das man häufig mit dem Namen schiefe rhomboidische Säule (prisme oblique à base de parallelogramme obliquangle) belegt. Nur je zwei einander parallele (ein Paar ausmachende) Flächen eines solchen Parallelepipeds sowohl, als auch der ganzen abgebildeten Gestalt, gehören zu einer und derselben einfachen Gestalt und bilden einen 2flächigen kantenlosen Schiefwandner oder einen 2flächigen Gegenseiten-

Fig. 248 wandner; 2) eine 1fach 3gliedrige mit ihrer Horizontalprojection A, B. B. Sie besteht aus zwei verschiedenen 1fach 3gliedrigen Kronrandnern R und b und aus den Tafelflächen α.

Gestalten mit ebenbildlich 2endiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(ebenbildlich gleichendige 1fach pgliedrige Gestalten).

Obwohl hier alle Nebenstrahlen 1fach 1gliedrig sind, so sind doch zu unterscheiden als besondere Hauptarten 1) diejenigen, welche in solchen Hauptflügelflächen liegen, in denen auch die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen sich befinden, indem in einer solchen Flügelfläche stets 2 gleichwerthige Strahlen vorhanden sind unter gleicher Neigung gegen den 1fach 2gliedrigen Strahl; 2) jene, welche in Hauptflügelflächen liegen, die den Winkel zwischen je 2 nachbarlichen Hauptflügelflächen der eben erwähnten Art halbiren, und 3) solche, die in keiner der 2 bisher bezeichneten Arten von Hauptflügelflächen sich befinden.

Denkt man sich nun bei ebenbildlich 2endig 1fach pgliedriger Hauptaxe, wenn p zuerst gröfser als 2 ist, Flächen senkrecht auf Strebestrahlen der 3ten Hauptart gleich weit vom Mittelpuncte des Strahlensystems entfernt, so ist einleuchtend, dafs, da hier jeder oberer solcher Strahl in einer Flügelfläche des oberen Hauptstrahles liegt, welche weder in die Verlängerung einer ihr gleichwerthigen Flügelfläche des unteren Hauptstrahles fällt, noch auch den Winkel halbirt, den 2 ihr gleichwerthige, einander nachbarliche, Flügelflächen des unteren Hauptstrahles mit einander bilden, die oberen und unteren Flächen der Gestalt sich in Mittelkanten von zweierlei Art schneiden müssen, welche zusammen einen unregelmäfsigen zickzackförmigen d. h. einen sägeartig zickzackförmigen Kantenring bilden.
Fig. 262 b. Derartige Gestalten werden daher bezeichnet durch den Ausdruck *tflächige Sägerandner* (*prionoides t-edrica*); z. B. 6flächi-
270. ger Sägerandner (*prionoides hexaedrica,* trigonales Trapezoeder);
271. 8flächiger Sägerandner (*prionoides octaedrica,* tetragonales Tra-
271 a. pezoeder); 10flächiger Sägerandner (*prionoides decaedrica*) u. s. w.

Jeder tflächige Sägerandner hat t ebenbildliche 1fach 1gliedrige Flächen P, die im Allgemeinen Vierecke sind, mit 2 gleich langen Seiten, welche einen der Winkel einschliefsen, und 2 von einander sowohl, als auch von den beiden übrigen an Länge

verschiedenen Seiten. Jede der t ebenbildlichen Scheitelkanten s ist eine ungleichseitige ungleichendige d. h. 1fach 1gliedrige Kante. Die p einen gehören dem einen und die p andern dem andern Scheitel an und jeder Scheitel a ist somit eine pkantige 1fach pgliedrige Ecke. Beide Scheitel sind einander ≌. Die p Randkanten der einen Art R sowohl, als auch die p solchen der andern Art r sind 1fach 2gliedrige Kanten. Die einer und derselben Art angehörigen sind einander ≌. Die t Randecken e sind 3×1kantige 1fach 1gliedrige Ecken. In jeder sind vereinigt eine Scheitelkante s, eine Randkante der ersten R und eine solche der 2ten Art r. Alle t Randecken sind einander ≌. Bei einem tflächigen Sägerandner sind parallele Flächen vorhanden oder parallele Kanten.

Für p = 2 erhält man den 4flächigen Sägerandner, der von Fig. 272. den übrigen Sägerandnern sich dadurch unterscheidet, dafs seine dem Endpuncte eines Hauptstrahles angehörigen 2 Scheitelkanten einander gerade entgegengesetzt liegen, so dafs sie eine 1fach 2gliedrige horizontale Gipfelkante g bilden. Die beiden Gipfelkanten sind einander nicht parallel, die Halbirungspuncte derselben vertreten die Stelle der 2 Scheitel. Die Flächen P selbst haben die Form von Dreiecken, weil statt des Winkels am Scheitel hier ein Winkel von 180° vorhanden ist.

Für p = 1 hat man als Stellvertreter des Sägerandners einen *schiefmittelkantigen 2flächigen Schiefwandner*, bestehend aus 2 Flächen, die mit einander eine nicht horizontale Mittelkante bilden, welche die Bedeutung einer 1fach 2gliedrigen Kante hat, während die beiden Flächen selbst als einander ≌ 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind.

Flächen, welche senkrecht sind auf Strebestrahlen der oben erwähnten 2ten Hauptart, bilden tflächige Kronrandner, die jedoch blofs die Bedeutung von Sägerandnern haben, bei denen die beiden Arten von Randkanten gleich lang und gleich grofs geworden sind. Nur die einander ≌ Randkanten haben die Bedeutung von Randkanten gleichen Werthes. Scheitelkanten, Randecken, Flächen erscheinen als 1fach 1gliedrig, wenn die Gestalt in Verbindung mit andern eine zusammengesetzte 1fach pgliedrige ebenbildlich gleichendige ausmacht. Als Stellvertreter dieser Kronrandner hat man bei 1fach 2gliedriger ≌ gleichendiger Hauptaxe die 4flächigen Kronrandner; bei 1fach 1gliedriger solcher Axe aber kantenlose 2flächige Schiefwandner.

Flächen senkrecht auf Strebestrahlen der ersten jener 3 Hauptarten begrenzen tflächige Ebenrandner, die jedoch angesehen werden müssen als Sägerandner, bei denen jede Randkante der einen Art = o geworden ist, während die andern Randkanten dadurch in den mittleren Querschnitt gelangt sind. Die Randecken eines solchen Ebenrandners haben daher hier blofs den Charakter von 1fach 2gliedrigen Ecken, die Randkanten den von 1fach 2gliedrigen Kanten, die Scheitelkanten sind 1fach 1gliedrig, auch die Flächen verhalten sich als 1fach 1gliedrige und die Scheitel sind pkantige 1fach pgliedrige Ecken, obgleich die ganze Gestalt an sich, abgesehen von dem bestimmten in ihr gegebenen Strahlensysteme, mit einem gewöhnlichen tflächigen Ebenrandner übereinstimmt.

Als Stellvertreter dieses Ebenrandners, wenn p = 2 ist, hat man auch hier quersäulige 4flächige Schiefwandner und, wenn p = 1 ist, quermittelkantige 2flächige Schiefwandner, und die Charaktere dieser beiden Gestalten verändern sich auf eine dem in ihnen gegebenen Strahlensysteme entsprechende Weise. Senkrecht auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen eine Art Flächen gedacht geben eine pflächige Säule mit ebenbildlichen Flächen und ebenbildlichen Seitenkanten. Die Seitenkanten sind 1fach 2gliedrig. Dasselbe gilt von den Seitenflächen. Die pflächige Säule, deren Flächen senkrecht stehen auf den 1fach 2gliedrigen Querstrahlen der andern Art, haben denselben allgemeinen Charakter.

Flächen, welche auf 1fach 1gliedrigen Querstrahlen senkrecht sind, bilden 2×pflächige Säulen, welche als Querschnitt, wenn man ihn als ebene Figur an sich betrachtet, ein 2fach pgliedriges tseit, einen Lanzen-p-ling haben. Die sämmtlichen Flächen einer solchen Säule sind einander ≌, die Seitenkanten von 2erlei Art sind 1fach 2gliedrige Kanten. Halbiren jene Querstrahlen den Winkel, der von 2 nachbarlichen 1fach 2gliedrigen Querstrahlen gebildet wird, so werden die Seitenkanten der 2×pflächigen Säule von gleicher Gröfse und die Säule daher übereinstimmend in dieser Beziehung mit einer tflächigen, deren Querschnitt ein regelmäfsiges tseit ist, hinsichtlich auf den Charakter ihrer Theile aber stimmt sie mit den 2×pflächigen, hierher gehörigen, Säulen überein.

Für den Werth p = 2 hat man als hierher gehörige 2×pflächige Säulen die 2×2flächigen, als tflächige die 4flächigen

(mit quadratischem Querschnitte) und, als Stellvertreter der pflächigen Säulen, die 2flächigen Gegenseitenwandner, welche hier als von 2 ≌ 1fach 2gliedrigen einander parallelen Flächen begrenzt zu denken sind.

Wenn p = 1 ist, so sind die Stellvertreter der tflächigen Säulen 2flächige Gegenseitenwandner, die hier begrenzt zu denken sind von 2 ≌ parallelen 1fach 1gliedrigen Flächen. Die Stellvertreter der 2× pflächigen Säulen sind 2× 1flächige oder 2flächige Nebenseitenwandner, an denen die beiden ≌ 1fach 1gliedrigen Seitenflächen sich in einer 1fach 2gliedrigen Seitenkante schneiden. Statt der pflächigen Säulen hat man in diesem Falle 1flächige Seitenwandner, deren einzige Begrenzungsebene auf eine der beiden 1fach 2gliedrigen Querstrahlen senkrecht ist.

Bei den hierher gehörigen tflächigen Ebenrandnern sowohl, als auch den tflächigen Kronrandnern, so wie auch bei den pflächigen Säulen und endlich auch bei den Stellvertretern dieser 3 Formen, wenn der Werth von p = 2 oder 1 ist, hat man eine 1ste und 2te Stellung zu unterscheiden. Aus einer solchen Stellung läfst sich die andere herleiten durch Umdrehung der Gestalt um die Hauptaxe, so dafs jeder Querstrahl einen Winkel von $\frac{360}{p}$ Graden beschreibt.

Denkt man sich an einem gleichstellig 2endig 2× tflächigen Ebenrandner die Gesammtheit der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen so weit verlängert, dafs sie die Gestalt allein begrenzen, so erhält man einen tflächigen Sägerandner, der zu dem, welcher auf ähnliche Weise durch Verlängerung der t andern unter sich ebenbildlichen Flächen entsteht, sich gegenbildlich verhält. Auf ähnliche Weise kann man an einem 2× tflächigen Kronrandner durch die Verlängerung der t einen unter sich ebenbildlichen Flächen desselben einen tflächigen Sägerandner erzeugen, der zu dem, welcher von den gehörig verlängerten t andern unter sich ebenbildlichen Flächen jener Gestalt umschlossen wird, sich gegenbildlich verhält. Die ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Gestalt A und 3gliedrige Gestalt B lassen, wenn man sie in die einfachen Gestalten zerlegt, aus denen man sich dieselben bestehend denken kann, die wichtigsten der an solchen Gestaltensystemen vorkommenden Verhältnisse erkennen und dienen zu deren Versinnlichung. Fig. 249 A.B.

Einfache Gestalten mit ungleichendiger (oder 2 $\times$ 1endiger) 2fach pgliedriger Hauptaxe (ungleichendige 2fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p zuerst grösser als 2 ist und man denkt sich Flächen senkrecht auf 2fach 1gliedrige Strebestrahlen einer Art, so erhält man einen *pflächigen Spitzling* [1] (*acroides p-edrica*) erster oder zweiter Stellung, z. B. 3flächiger Spitzling (*acroides triedrica*), 4flächiger Spitzling (*acroides tetraedrica*), 6flächiger Spitzling (*acroides hexaedrica*). Die p Flächen einer solchen Gestalt vereinigen sich sämmtlich in einem gemeinschaftlichen Eckpuncte, dem Scheitel. Die Flächen sind 2fach 1gliedrig und die p Scheitelkanten sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Der Scheitel ist eine pkantige 2fach pgliedrige Ecke. In jedem Systeme sind zu unterscheiden pflächige Spitzlinge der 1sten und 2ten oberen und wieder solche der 1sten und 2ten unteren Stellung. Bei jenen liegt der Scheitel am äufsern Ende des obern Hauptstrahls, bei diesen an dem des unteren. Für p = 2 erhält man, anstatt des pflächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind zu betrachten als 2fach 1gliedrige und die horizontale Gipfelkante, welche sie bilden, ist eine 2fach 2gliedrige Kante. Sie ist Stellvertreter von 2 Scheitelkanten, die hier unter einem Winkel von 180° am äufsern Ende des Hauptstrahls zusammenlaufen. Für p = 1 erhält man 1flächige Schiefwandner. Seine Fläche hat hier die Bedeutung einer 2fach 1gliedrigen Figur.

1 Das Wort *Spitzling* ist ähnlich den Worten Frühling, Spätling gebildet und bedeutet etwas, dessen Haupteigenschaft im Spitzigseyn besteht. Das Wort Pyramide bezeichnet einen Spitzling, der durch das Hinzutreten einer Grundfläche zu einer ringsum endlich begrenzten Gestalt geworden ist, welche aber, da sie demnach Flächen verschiedener Art besitzt (Scheitelflächen und Grund- oder Tafelflächen) nicht mehr als einfache Gestalt betrachtet werden darf. Man kann an den tflächigen Ebenrandnern und an den tflächigen Kronrandnern die pflächigen Spitzlinge und an den 2$\times$tflächigen Ebenrandnern, so wie an den 2$\times$tflächigen Kronrandnern die 2$\times$pflächigen Spitzlinge kennen lernen, wenn man die Scheitelkanten, die im einen Scheitel jener Gestalten zusammenlaufen, über die Randecken hinaus verlängert und die dieser Verlängerung entsprechende Verlängerung der Flächen dieses Scheitels gleichfalls statt finden läfst, während man die Flächen und Kanten des andern Scheitels nicht mit in Betrachtung zieht.

Auch bei den hier erwähnten 2flächigen sowohl als 1flächigen Schiefwandnern hat man eine 1ste und 2te obere und ebenso eine 1ste und 2te untere zu unterscheiden.

Flächen senkrecht auf 1fach 1gliedrige Strebestrahlen begrenzen im Allgemeinen 2×pflächige Spitzlinge, deren Querschnitte 2fach pgliedrige tseite oder Lanzen-p-linge sind, z. B. 2×2flächige Spitzlinge (*acroides didiedrica*), 2×3flächige Spitzlinge (*acroides ditriedrica*), 2×4flächige Spitzlinge (*acroides ditetraedrica*). An ihnen haben die Flächen die Bedeutung 1fach 1gliedriger Figuren. Die p einen verhalten sich ebenbildlich zu einander, aber gegenbildlich zu den p übrigen, die unter sich ebenbildlich sind. Der Scheitel ist eine 2×pkantige 2fach pgliedrige Ecke. Die Scheitelkanten sind von zweierlei Art. Die p einen sowohl als die p andern sind gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten. Die Gröfse bezeichnet den Unterschied der beiden Arten. Werden die Scheitelkanten der beiden Arten an Gröfse gleich, so hat der Spitzling scheinbar die Form eines tflächigen, aber die Bedeutung seiner Theile bleibt dennoch dieselbe als beim 2×pflächigen Spitzlinge.

Für den Werth $p = 1$ hat man als Stellvertreter des 2×pflächigen Spitzlings einen 2×1flächigen oder 2flächigen schiefgipfelkantigen Schiefwandner. Die beiden Flächen einer solchen Gestalt sind gegenbildlich 1fach 1gliedrige; die Gipfelkante ist eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante. Dem scheinbar tflächigen Spitzlinge entspricht hier der Fall, wobei die schiefe Gipfelkante sich umwandelt in eine horizontale, man mithin einen 2flächigen quergipfelkantigen Schiefwandner hat, dessen Flächen aber blofs |=| und nicht ≌ sind, dessen Gipfelkante gleichfalls eine gleichseitige 2fach 1gliedrige Kante bleibt.

Denkt man sich den Hauptstrahl, welcher einem pflächigen Spitzlinge angehört, wachsend, während der Querschnitt unverändert bleibt, so wird der Scheitel der Gestalt immer spitziger, und wird jener Hauptstrahl $= \infty$, so hat man eine pflächige Säule, die sich als eine ungleichendige verhält. Ihre Seitenflächen sind 2fach 1gliedrig, ihre Seitenkanten sind ebenfalls gleichseitig 2fach 1gliedrige. Für $p = 2$ ist auch hier ein 2flächiger Gegenseitenwandner vorhanden, dessen Flächen als 2fach 1gliedrige sich verhalten. Für $p = 1$ hat man einen 1flächigen Seitenwandner, dessen Fläche eine 2fach 1gliedrige ist. Auf ähnliche Weise kann man aus dem 2×pflächigen Spitzlinge

die 2×pflächige Säule ableiten, deren Seitenflächen hier als 1fach 1gliedrige erscheinen, während ihre Seitenkanten gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten sind. Je 2 einer und derselben Kante anliegende Flächen verhalten sich gegenbildlich.

Für p = 1 hat man als Stellvertreter der 2×pflächigen Säule einen 2×1flächigen oder 2flächigen Nebenseitenwandner, d. h. 2 Flächen, die in einer gleichseitigen 2fach 1gliedrigen Seitenkante zusammentreffen und sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Die Querschnitte der 2×pflächigen Säule sind auch im Allgemeinen 2fach pgliedrige tseite oder Lanzenp-linge. Werden in diesem Querschnitte die zweierlei Winkel einander gleich, so erhält die Säule scheinbar die Form einer tflächigen mit regelmäſsigem tseitigen Querschnitte. Die Bedeutung ihrer Theile aber ist wie bei der gewöhnlichen 2×p-flächigen Säule mit ungleichendiger 2fach pgliedriger Hauptaxe. Für p = 1 hat man als Stellvertreter einer solchen Säule einen pflächigen Gegenseitenwandner, dessen Flächen hier die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen, einander |=| Figuren haben.

Als Beispiele ungleichendiger 2fach pgliedriger Gestalten
Fig. 250. mögen dienen: 1) eine 2fach 2gliedrige und 2) eine 2fach
251. 3gliedrige. Durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie bestehen, kann man sich den Charakter dieser Gestalten und Gestaltensysteme versinnlichen.

Einfache Gestalten mit ungleichendiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(ungleichendige 1fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p gröſser als 2 ist, so begrenzen Flächen, welche senkrecht sind auf irgend eine Art von Strebestrahlen, gleichfalls wieder pflächige Spitzlinge, die an Form den 2fach pgliedrigen Spitzlingen möglicher Weise gleich seyn können, aber hier sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig und ihre Scheitelkanten gleichfalls 1fach 1gliedrig. Ihr Scheitel ist pkantig 1fach pgliedrig. Wenn p = 2 ist, so hat man, statt eines solchen pflächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner, dessen beide Flächen als ebenbildliche 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind, während die Gipfelkante eine 1fach 2gliedrige ist. Für p = 1 entsteht ein 1flächiger Schiefwandner, dessen Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Flächen senkrecht auf Querstrahlen irgend einer Art bilden im Allgemeinen pflächige Säulen, deren Seitenflächen sich als ≘ verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Auch die Seitenkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige d. h. als 1fach 1gliedrige Kanten. Auch in der Reihe dieser pflächigen Säulen treten für den Werth $p = 2$ 2flächige Gegenseitenwandner auf. Die beiden Flächen derselben verhalten sich hier ≘ und sind 1fach 1gliedrig. Für den Werth $p = 1$ erhält man eben so 1flächige Seitenwandner, deren Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Hauptaxenlose Strahlensysteme.

1) Bei hauptaxenlosen Gestalten ist die geringste Anzahl gleichwerthiger Axen $= 3$.

2) Diese 3 Axen müssen ebenbildlich gleich seyn.

3) Wenn von einer Art Strahlen die Anzahl 4 beträgt, so können nicht zwei derselben in eine gerade Linie zusammenfallen.

4) Auch können in diesem Falle nicht 2 Strahlen sich gegenbildlich verhalten, weil sonst die beiden, in deren jeder ein solches Paar liegen würde, sich in einer Hauptaxe schneiden müſsten.

5) Die Anzahl ebenbildlicher Strahlen einer Art muſs daher wenigstens gröſser als zwei seyn.

6) Eine hauptaxenlose Gestalt muſs Axen haben, die höher als 1gliedrig (1fach oder 2fach) sind.

Es seyen in ihr a und b zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende ebenbildliche Strahlen, welche 1gliedrig sind; man gebe jeder auf gleiche Weise einige Flügelflächen, bringe dann a auf irgend eine Weise an die Stelle, welche vorher b einnahm, so daſs die neue Stellung des Strahlensystems der alten ebenbildlich ist; es wird dann entweder: 1) b dieselbe Stelle oder 2) eine andere Stelle einnehmen müssen, als diejenige ist, welche zuvor a inne hatte.

Ist b an die Stelle von a getreten, wenn a in jene von b gebracht worden, so muſs, wenn man den Winkel zwischen a und b mittelst eines dritten Strahles v halbirt, dieser Strahl so beschaffen seyn, daſs, wenn er als Umdrehungsaxe angewendet wird, die beiden Strahlen a und b durch Umdrehung um 180° mit einander vertauscht werden können; der Strahl v ist daher

ein *wenigstens 2gliedriger.* Ist aber b nicht in die Stelle von a versetzt, wenn a in die von b gerückt worden, so mufs b die Stelle einnehmen, welche vorher ein dritter, mit a und b ebenbildlicher, Strahl einnahm. Legt man nun durch gleichweit vom Mittelpuncte entfernte Puncte in diesen drei Strahlen eine Ebene und zieht durch den Mittelpunct des Strahlensystems die auf sie senkrechte Axe, so ist einleuchtend, dafs in Beziehung auf eine Richtung in dieser Axe die drei Strahlen a, b und c sich ebenbildlich verhalten, dafs also diese Axe eine mindestens 3gliedrige seyn müsse.

7) Wenn ein hauptaxenloses Strahlensystem 2gliedrige Axen besitzt, so hat es auch Axen, welche drei oder mehrgliedrig sind.

Es seyen a und b zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, welche nicht in eine und dieselbe Linie zusammenfallen. Man bringe das Strahlensystem in eine der ersten gegebenen Stellung ebenbildliche Stellung, so dafs a an die Stelle kommt, welche vorher b einnahm, so mufs b entweder 1) an die Stelle von a gerückt seyn oder 2) eine andere Stelle einnehmen.

Im ersten Falle wird der Strahl, welcher den Winkel zwischen a und b halbirt, gleichfalls ein 2gliedriger Strahl c seyn müssen. Man hat also in einerlei Ebene liegend 3 Strahlen, welche 2gliedrig sind und von denen man weifs, dafs die beiden äufsersten ebenbildlich sind in Beziehung zum mittleren. Aber ebenso mufs in derselben Ebene jeder dieser beiden äufseren Strahlen a und b ein mittlerer seyn für zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, von denen der eine jener erste mittlere Strahl c ist. Nennt man die mit c als ebenbildlich erkannten beiden neuen Strahlen d und e, so mufs der Winkel, welchen c mit d oder mit e macht, gleich dem Winkel seyn, welchen a mit b macht und daher kleiner als 180°. Die Ebene, in welcher diese sämmtlichen Strahlen liegen, hat daher in den 3 Strahlen c, d und e eine Anzahl ebenbildlicher 2gliedriger Strahlen, welche gröfser als 2 ist. Zwei 2gliedrige ebenbildliche in einerlei Ebene liegende Strahlen sind aber auch einander ebenbildlich in Beziehung auf die eine Richtung in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Axe, wenn sie einander ebenbildlich sind in Beziehung auf einen in der Ebene befindlichen zwischen ihnen liegenden Strahl. Es ist nämlich jede der beiden in der erwähnten Ebene liegenden Flügelflächen des einen der beiden vergli-

chenen 2gliedrigen Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden in derselben Ebene liegenden Flügelflächen des andern, weshalb auch jede der beiden auf diese Ebene senkrechten Flügelflächen des einen dieser Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden auf dieselbe Ebene senkrechten Flügelflächen des andern seyn mufs, so dafs also durch Umdrehung um die auf der erwähnten Ebene senkrechte Axe der eine 2gliedrige Strahl so an die Stelle des andern gebracht werden kann, dafs jede der 4 der Betrachtung unterworfenen, folglich jede Flügelfläche desselben, an die Stelle einer ihr ebenbildlichen getreten ist und also diese beiden 2gliedrigen ebenbildlichen Strahlen auch einander ebenbildlich sind in Beziehung auf den auf der Ebene, in welcher sie liegen, senkrechten Strahl. Insofern also die drei Strahlen c, d und e in Beziehung zu dem auf der Ebene, in der sie liegen, senkrechten Strahl einander ebenbildlich sind, so mufs dieser Strahl 3- oder mehrgliedrig seyn.

Im 2ten Falle wird b eine Stelle einnehmen müssen, welche vorher ein dritter mit a und b ebenbildlicher Strahl c einnahm. Legt man hier wieder eine Ebene durch drei Puncte, deren jeder in einem dieser 3 Strahlen a, b, c in einerlei bestimmter Entfernung α vom Mittelpuncte des Strahlensystems angenommen worden, so wird die auf diese Ebene senkrechte Axe eine 3- oder mehrgliedrige seyn müssen, weil durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um sie der Strahl a an die Stelle von b rückt, wenn b an jene gelangt, die vorher c einnahm, während zugleich 1) die Flügelfläche von a, welche durch b geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von b, die durch c geht, getreten ist, mithin a eine Stellung erhalten hat, die mit derjenigen, welche b zuerst hatte, ebenbildlich ist; und 2) die Flügelfläche von b, welche durch a geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von c, welche durch b geht, gelangt ist, so dafs b eine mit der vorigen von c ebenbildliche Stellung hat.

8) Die höchst vielgliedrigen Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten können nicht höher als 5gliedrig seyn. Man nehme an, es seyen 6gliedrige Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten möglich, so werden, wenn man zwei ebenbildliche Strahlen, die den kleinsten Winkel mit einander bilden, den zwei solche Strahlen einschliefsen können, nachbarliche ebenbildliche Strahlen nennt, einen 6gliedrigen Strahl 6 nachbarliche ihm eben-

die 2⨯pflächige Säule ableiten, deren Seitenflächen hier als 1fach 1gliedrige erscheinen, während ihre Seitenkanten gleichseitige 2fach 1gliedrige Kanten sind. Je 2 einer und derselben Kante anliegende Flächen verhalten sich gegenbildlich.

Für p = 1 hat man als Stellvertreter der 2⨯pflächigen Säule einen 2⨯1flächigen oder 2flächigen Nebenseitenwandner, d. h. 2 Flächen, die in einer gleichseitigen 2fach 1gliedrigen Seitenkante zusammentreffen und sich |=| zu einander verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Die Querschnitte der 2⨯pflächigen Säule sind auch im Allgemeinen 2fach pgliedrige tseite oder Lanzenp-linge. Werden in diesem Querschnitte die zweierlei Winkel einander gleich, so erhält die Säule scheinbar die Form einer tflächigen mit regelmäfsigem tseitigen Querschnitte. Die Bedeutung ihrer Theile aber ist wie bei der gewöhnlichen 2⨯pflächigen Säule mit ungleichendiger 2fach pgliedriger Hauptaxe. Für p = 1 hat man als Stellvertreter einer solchen Säule einen pflächigen Gegenseitenwandner, dessen Flächen hier die Bedeutung von 1fach 1gliedrigen, einander |=| Figuren haben.

Als Beispiele ungleichendiger 2fach pgliedriger Gestalten
Fig. 250. mögen dienen: 1) eine 2fach 2gliedrige und 2) eine 2fach
251. 3gliedrige. Durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie bestehen, kann man sich den Charakter dieser Gestalten und Gestaltensysteme versinnlichen.

Einfache Gestalten mit ungleichendiger 1fach pgliedriger Hauptaxe

(ungleichendige 1fach pgliedrige Gestalten).

Wenn p gröfser als 2 ist, so begrenzen Flächen, welche senkrecht sind auf irgend eine Art von Strebestrahlen, gleichfalls wieder pflächige Spitzlinge, die an Form den 2fach pgliedrigen Spitzlingen möglicher Weise gleich seyn können, aber hier sind ihre Flächen 1fach 1gliedrig und ihre Scheitelkanten gleichfalls 1fach 1gliedrig. Ihr Scheitel ist pkantig 1fach pgliedrig. Wenn p = 2 ist, so hat man, statt eines solchen pflächigen Spitzlings, einen quergipfelkantigen 2flächigen Schiefwandner, dessen beide Flächen als ebenbildliche 1fach 1gliedrige Figuren zu betrachten sind, während die Gipfelkante eine 1fach 2gliedrige ist. Für p = 1 entsteht ein 1flächiger Schiefwandner, dessen Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Flächen senkrecht auf Querstrahlen irgend einer Art bilden im Allgemeinen pflächige Säulen, deren Seitenflächen sich als ≌ verhalten und 1fach 1gliedrig sind. Auch die Seitenkanten verhalten sich als ungleichseitige ungleichendige d. h. als 1fach 1gliedrige Kanten. Auch in der Reihe dieser pflächigen Säulen treten für den Werth p = 2 2flächige Gegenseitenwandner auf. Die beiden Flächen derselben verhalten sich hier ≌ und sind 1fach 1gliedrig. Für den Werth p = 1 erhält man eben so 1flächige Seitenwandner, deren Fläche 1fach 1gliedrig ist.

Hauptaxenlose Strahlensysteme.

1) Bei hauptaxenlosen Gestalten ist die geringste Anzahl gleichwerthiger Axen = 3.

2) Diese 3 Axen müssen ebenbildlich gleich seyn.

3) Wenn von einer Art Strahlen die Anzahl 4 beträgt, so können nicht zwei derselben in eine gerade Linie zusammenfallen.

4) Auch können in diesem Falle nicht 2 Strahlen sich gegenbildlich verhalten, weil sonst die beiden, in deren jeder ein solches Paar liegen würde, sich in einer Hauptaxe schneiden müſsten.

5) Die Anzahl ebenbildlicher Strahlen einer Art muſs daher wenigstens gröſser als zwei seyn.

6) Eine hauptaxenlose Gestalt muſs Axen haben, die höher als 1gliedrig (1fach oder 2fach) sind.

Es seyen in ihr a und b zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende ebenbildliche Strahlen, welche 1gliedrig sind; man gebe jeder auf gleiche Weise einige Flügelflächen, bringe dann a auf irgend eine Weise an die Stelle, welche vorher b einnahm, so daſs die neue Stellung des Strahlensystems der alten ebenbildlich ist; es wird dann entweder: 1) b dieselbe Stelle oder 2) eine andere Stelle einnehmen müssen, als diejenige ist, welche zuvor a inne hatte.

Ist b an die Stelle von a getreten, wenn a in jene von b gebracht worden, so muſs, wenn man den Winkel zwischen a und b mittelst eines dritten Strahles v halbirt, dieser Strahl so beschaffen seyn, daſs, wenn er als Umdrehungsaxe angewendet wird, die beiden Strahlen a und b durch Umdrehung um 180° mit einander vertauscht werden können; der Strahl v ist daher

ein *wenigstens 2gliedriger.* Ist aber b nicht in die Stelle von a versetzt, wenn a in die von b gerückt worden, so muſs b die Stelle einnehmen, welche vorher ein dritter, mit a und b ebenbildlicher, Strahl einnahm. Legt man nun durch gleichweit vom Mittelpuncte entfernte Puncte in diesen drei Strahlen eine Ebene und zieht durch den Mittelpunct des Strahlensystems die auf sie senkrechte Axe, so ist einleuchtend, daſs in Beziehung auf eine Richtung in dieser Axe die drei Strahlen a, b und c sich ebenbildlich verhalten, daſs also diese Axe eine mindestens 3gliedrige seyn müsse.

7) Wenn ein hauptaxenloses Strahlensystem 2gliedrige Axen besitzt, so hat es auch Axen, welche drei oder mehrgliedrig sind.

Es seyen a und b zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, welche nicht in eine und dieselbe Linie zusammenfallen. Man bringe das Strahlensystem in eine der ersten gegebenen Stellung ebenbildliche Stellung, so daſs a an die Stelle kommt, welche vorher b einnahm, so muſs b entweder 1) an die Stelle von a gerückt seyn oder 2) eine andere Stelle einnehmen.

Im ersten Falle wird der Strahl, welcher den Winkel zwischen a und b halbirt, gleichfalls ein 2gliedriger Strahl c seyn müssen. Man hat also in einerlei Ebene liegend 3 Strahlen, welche 2gliedrig sind und von denen man weiſs, daſs die beiden äuſsersten ebenbildlich sind in Beziehung zum mittleren. Aber ebenso muſs in derselben Ebene jeder dieser beiden äuſseren Strahlen a und b ein mittlerer seyn für zwei ebenbildliche 2gliedrige Strahlen, von denen der eine jener erste mittlere Strahl c ist. Nennt man die mit c als ebenbildlich erkannten beiden neuen Strahlen d und e, so muſs der Winkel, welchen c mit d oder mit e macht, gleich dem Winkel seyn, welchen a mit b macht und daher kleiner als 180°. Die Ebene, in welcher diese sämmtlichen Strahlen liegen, hat daher in den 3 Strahlen c, d und e eine Anzahl ebenbildlicher 2gliedriger Strahlen, welche gröſser als 2 ist. Zwei 2gliedrige ebenbildliche in einerlei Ebene liegende Strahlen sind aber auch einander ebenbildlich in Beziehung auf die eine Richtung in der auf dieser Ebene senkrecht stehenden Axe, wenn sie einander ebenbildlich sind in Beziehung auf einen in der Ebene befindlichen zwischen ihnen liegenden Strahl. Es ist nämlich jede der beiden in der erwähnten Ebene liegenden Flügelflächen des einen der beiden vergli-

chenen 2gliedrigen Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden in derselben Ebene liegenden Flügelflächen des andern, weshalb auch jede der beiden auf diese Ebene senkrechten Flügelflächen des einen dieser Strahlen ebenbildlich einer jeden der beiden auf dieselbe Ebene senkrechten Flügelflächen des andern seyn mufs, so dafs also durch Umdrehung um die auf der erwähnten Ebene senkrechte Axe der eine 2gliedrige Strahl so an die Stelle des andern gebracht werden kann, dafs jede der 4 der Betrachtung unterworfenen, folglich jede Flügelfläche desselben, an die Stelle einer ihr ebenbildlichen getreten ist und also diese beiden 2gliedrigen ebenbildlichen Strahlen auch einander ebenbildlich sind in Beziehung auf den auf der Ebene, in welcher sie liegen, senkrechten Strahl. Insofern also die drei Strahlen c, d und e in Beziehung zu dem auf der Ebene, in der sie liegen, senkrechten Strahl einander ebenbildlich sind, so mufs dieser Strahl 3- oder mehrgliedrig seyn.

Im 2ten Falle wird b eine Stelle einnehmen müssen, welche vorher ein dritter mit a und b ebenbildlicher Strahl c einnahm. Legt man hier wieder eine Ebene durch drei Puncte, deren jeder in einem dieser 3 Strahlen a, b, c in einerlei bestimmter Entfernung *α* vom Mittelpuncte des Strahlensystems angenommen worden, so wird die auf diese Ebene senkrechte Axe eine 3- oder mehrgliedrige seyn müssen, weil durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um sie der Strahl a an die Stelle von b rückt, wenn b an jene gelangt, die vorher c einnahm, während zugleich 1) die Flügelfläche von a, welche durch b geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von b, die durch c geht, getreten ist, mithin a eine Stellung erhalten hat, die mit derjenigen, welche b zuerst hatte, ebenbildlich ist; und 2) die Flügelfläche von b, welche durch a geht, an die Stelle der ihr ebenbildlichen Flügelfläche von c, welche durch b geht, gelangt ist, so dafs b eine mit der vorigen von c ebenbildliche Stellung hat.

8) Die höchst vielgliedrigen Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten können nicht höher als 5gliedrig seyn. Man nehme an, es seyen 6gliedrige Strahlen in hauptaxenlosen Gestalten möglich, so werden, wenn man zwei ebenbildliche Strahlen, die den kleinsten Winkel mit einander bilden, den zwei solche Strahlen einschliefsen können, nachbarliche ebenbildliche Strahlen nennt, einen 6gliedrigen Strahl 6 nachbarliche ihm eben-

bildliche Strahlen so umgeben müssen, daſs sie bei der durch Umdrehung des ganzen Strahlensystems um jenen ersten 6gliedrigen Strahl bewirkten Vergleichung sich in Beziehung zu ihm als einander ebenbildliche Strahlen verhalten. Von den 6 Flügelflächen, in denen sie liegen, müssen also je 2 benachbarte um $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ gegen einander geneigt seyn und alle jene 6 Strahlen müssen gegen jenen einzelnen gleichgeneigt seyn, so daſs jeder mit ihm einen Winkel α bildet. Es sey ca jener erste
Fig. 273. Strahl, cb und cd seyen 2 der 6 nachbarlichen ihm ebenbildlichen Strahlen, welche in benachbarten Flügelflächen acb und acd liegen; man lege durch einen Punct q in ca eine Ebene dqb senkrecht auf ca, so daſs also die Winkel dqc und bqc rechte Winkel sind, mithin der Winkel dqb als Neigungswinkel von dca auf bca betrachtet werden kann. Es wird nun, da auch dca = bca = α ist, auch dq = bq seyn; weil aber dqb hier als Neigungswinkel zweier benachbarter ebenbildlicher Flügelflächen eines 6gliedrigen Strahls = 60° ist, so ist das Dreieck dqb ein gleichseitiges, also db = bq. Aber das Dreieck dcb ist gleichschenklig und dbc ein spitzer Winkel. Zieht man dv durch d senkrecht auf cb, so ist die Kathete dv kleiner als die Hypotenuse db im Dreieck dvb, folglich auch kleiner als qb; da nun dc = bc, so ist vd : dc < qb : bc, d. h. der Winkel dcb < bca. Da nun aber bca = α, d. h. der kleinste Winkel seyn soll, den zwei solche 6gliedrige ebenbildliche Strahlen einschlieſsen können, so heiſst dieses: in hauptaxenlosen Gestalten müssen zwei 6gliedrige ebenbildliche Strahlen cd und cb einen Winkel einschlieſsen, welcher kleiner ist, als der kleinste, den zwei derartige 6gliedrige Strahlen einschlieſsen können, was ein wahrer Widerspruch ist. 6- und mehrgliedrige Strahlen sind also in hauptaxenlosen Gestalten nicht möglich.

9) Nur bei der hauptaxenlosen Gestalt mit unendlich vielen unendlich vielgliedrigen Axen, bei der Kugel, verschwindet die Ungleichheit zwischen den unendlich kleinen Winkeln, die unsern Winkeln bca und bcd entsprechen.

10) Wenn ein pgliedriger Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 3- oder mehrgliedrig ist, so ist die Anzahl der ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen nicht gröſser als p. Daſs sie nicht kleiner als p seyn darf, ergiebt sich aus dem pgliedrig-

seyn, sie könnte aber 2 p oder allgemeiner n p seyn; da aber der kleinste Werth von p = 3 ist, so würde 2 p schon 6 geben. Es müfste dann einer der 3 einen zwischen zweien der 3 andern liegen, entweder beiden in *gleichem* Grade benachbart, oder dem einen mehr als dem andern. Jedenfalls würden dann zwei ebenbildliche derartige Strahlen einander mehr benachbart seyn, als zwei nachbarliche solche Strahlen, was mit dem oben gegebenen Begriffe der nachbarlichen Strahlen im Widerspruche steht.

11) Wenn daher ein 3- oder mehrgliedriger Strahl a′ zu den nachbarlichen Strahlen eines andern ihm ebenbildlichen Strahles a gehört und in einer Flügelfläche β desselben liegt, so mufs auch der Strahl a ein eben solcher nachbarlicher Strahl von a′ seyn und in einer Flügelfläche β' von diesem auf gleiche Weise liegen, so dafs die Flügelfläche β' des Strahles a′ ebenbildlich ist der Flügelfläche β des Strahles a.

12) Beide Flügelflächen β und β' fallen aber zusammen in die Ebene zwischen a und a′; *der Strahl d, welcher den Winkel zwischen a und a′ halbirt, mufs sonach ein 2gliedriger* Strahl seyn; denn wenn durch Umdrehung um ihn die beiden Strahlen a und a′ vertauscht werden, so sind auch die ebenbildlichen Flügelflächen β und β' vertauscht, die deshalb auch für den Strahl d ebenbildliche Flügelflächen sind, weshalb er, da die Neigung dieser Flügelflächen $= \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ ist, ein 2gliedriger Strahl seyn mufs.

13) Wenn ein Strahl in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 4- oder 5gliedrig ist, so sind je zwei ihm nachbarliche und ebenbildliche Strahlen, welche in nachbarlichen ebenbildlichen Flügelflächen desselben liegen, auch gegen einander nachbarliche ebenbildliche Strahlen. Es sey c a jener erste, c d und c b die beiden andern derartigen Strahlen. Es ist dann a c d = a c b oder der Bogen a d = dem Bogen a b. Ist dann d c b nicht = a c b oder der Bogen d b nicht = dem Bogen a b, so müfste der Bogen d b gröfser als der Bogen a b seyn; denn wäre d b < a b, so würden c a und c b nicht nachbarliche Strahlen seyn. Es sey daher der Bogen d b > a b, so wird auch in dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke b a d der Winkel d a b gröfser als der Winkel a b d seyn müssen. Es sey nun ferner a c h eine Flügelfläche von c a, die zu a c b die rechte nachbarliche ebenbildliche ist, wenn a c d die linke ist, und c h sey der Fig. 274.

in ihr liegende, zu ca nachbarliche ebenbildliche Strahl. Da nun ca und cb ebenbildliche nachbarliche 3- oder 4gliedrige Strahlen sind, so ist der Strahl cn, welcher den Winkel zwischen beiden halbirt, ein 2gliedriger Strahl. Nimmt man ihn als Umdrehungsaxe, um cb mit ca zu vertauschen, so wird der Winkel ahb, da er = abd ist, kleiner als dab seyn und daher die Seite bh zwischen ad und ab liegen müssen, z. B. so wie af, so dafs baf = abd ist. Umgekehrt wird ah nicht zwischen ba und bd, sondern über bd hinaus fallen müssen, weil bah = bad, also > abd ist. Sie liege wie bf, so dafs abf = bad ist; es ist dann der Strahl cf, als ein dem Strahle ch ebenbildlicher, auch den Strahlen ca und cb und cd ebenbildlich. Es ist nun af = bd, aber auch ag = bg (weil gab = gba ist), daher auch gd = gf. Es kann aber df nicht kleiner als ab seyn, weil sonst ca und cb nicht nachbarliche Strahlen seyn würden. Ist aber df = ab = ad, so mufs auch dbf = dba, mithin abf = bad = 2abd seyn; ist df > ab oder df > ad, so mufs dbf > dba, mithin abf (= bad) > 2abd seyn. In dem gleichschenkligen sphärischen Dreiecke dab aber sind bei unverändertem Winkel bad die Winkel abd und adb um so kleiner, je kleiner die Bogen ad und ab sind; sie werden daher am kleinsten seyn, wenn ad = bd = Null wird. Dann ist abd + adb = 2R — bad und

$$abd = \tfrac{1}{2}\,(2R - bad).$$

Ist dann ca ein 5gliedriger Strahl, so ist dab = $\tfrac{4}{5}$R = 72° = dem Mittelpunctswinkel des regelmäfsigen Fünfecks, daher = $\tfrac{1}{2}$(2R — 72°) = 54° = dem halben Umfangswinkel des regelmäfsigen Fünfecks. Da nun 2 × 54° = 108° > 72° ist, so kann abf oder bad nicht $\geqq$ 2abd seyn, weil selbst der kleinste Werth von abd, welcher hier nicht erreicht werden darf (indem sonst die Strahlen ca, cb, cd u. s. w. in einen und denselben Strahl zusammenfallen würden), gröfser als $\tfrac{1}{2}$bad ist. Es mufs daher für die 5gliedrigen Strahlen ca, cb, cd gelten, dafs Bogen bd = ba = da.

Ist der Strahl ca 4gliedrig, so ist bad = 90° = R und $\tfrac{1}{2}$(2R — R) = $\tfrac{1}{2}$R = 45°, folglich der kleinste Werth von abd = 45°, so dafs 2abd = bad seyn könnte. Dieser kleinste Werth darf aber nicht erreicht werden, wenn nicht die Strahlen

ca, cb, cd u. s. w. zusammen in einen fallen sollen; daher mufs auch hier Bogen bd = ba = da seyn.

Sowohl bei 5gliedrigen als auch bei 4gliedrigen Strahlen ca, cb, cd u.s.w. ist dann also dba = bda = bad; folglich für den Strahl cb die Flügelfläche dcb ebenbildlich der Flügelfläche acb. In Beziehung auf cb ist also cd ebenbildlich mit ca und ebenso umgekehrt in Beziehung auf cd ist cb $\underline{\frown}$ ca, folglich sind cb und cd nachbarliche ebenbildliche Strahlen.

14) Nimmt man daher in drei solchen 4- oder 5gliedrigen, einander gegenseitig nachbarlichen, Strahlen Puncte an, welche gleichweit entfernt vom Mittelpuncte des Strahlensystems sind, und legt durch diese drei ebenbildlichen Puncte eine Ebene, so ist der auf diese Ebene senkrecht zu fällende Strahl ein 3gliedriger.

15) Sind die Strahlen ca, cb, cd dreigliedrige Strahlen, so ist bad = 120°. Es ist dann $\frac{1}{2}$ (2R — 120°) = 30° und $2 \times 30 < 120$. Es kann daher hier sowohl bd = ab oder ad seyn, als auch gröfser.

16) Wenn bd = ab = ad ist, so mufs abd = adb = bad = 120° seyn. Legt man durch die Puncte b, a und d eine Ebene, so ist dann der auf diese Ebene senkrechte Strahl ce ein *dreigliedriger,* der aber nicht mit ca, cb, cd ebenbildlich seyn kann, weil er mit ca einen Winkel eca bildet, der kleiner als acb ist, was daraus sich ergiebt, dafs aeb = 120° und eba = 60° ist, folglich kleiner als aeb, so dafs der Bogen ae < ab seyn mufs; es würde dann cb nicht ein dem ca nachbarlicher Strahl seyn. Die drei 3gliedrigen Strahlen ca, cb und cd schneiden sich im Mittelpuncte c, so dafs die drei Ebenen acb, bcd, dca eine 3kantige 3winklige Ecke bilden, bei der jede Kante = 120° mifst.

17) Ist bd > ab, so mufs der Strahl, welcher senkrecht auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt werden kann, ein 4- oder 5gliedriger seyn; denn dafs er nicht 3gliedrig seyn könne, ist aus dem eben Gesagten einleuchtend; dafs er aber höher als 2gliedrig seyn müsse, ergiebt sich daraus, dafs durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn cd an die Stelle von ca kommt, wenn ca an die Stelle von cb tritt u. s. w.

18) Ist der auf die Ebene durch a, b, und d senkrechte Strahl 4gliedrig, so mufs abd = adb = $\frac{1}{2} \times 120° = 60°$ und aufser den 3 Strahlen ca, cb, cd mufs noch ein vierter 3gliedriger Strahl vorhanden seyn, der in Beziehung zu jenem 4glie-

drigen mit den 3 genannten ebenbildlich ist, und diese 4 Strahlen schneiden sich im Mittelpuncte c, so daſs die durch je zwei nachbarliche derartige Strahlen gelegten Ebenen 4kantige 4winklige Ecken bilden, an denen jede Kante 120° miſst.

19) Ist der auf die Ebene, die durch a, b, d gelegt wurde, senkrechte Strahl ein 5gliedriger, so muſs er von 5 solchen in Beziehung zu ihm ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen, wie ca, cb, cd u. s. w., zunächst umgeben seyn und die Mittelpunctsecke, für welche jene 5 Strahlen als Kanten dienen, ist eine 5kantige 5winklige Ecke, in welcher jede der 5 Kanten = 120° miſst. Die Beschaffenheit der verschiedenen hauptaxenlosen Strahlensysteme hängt also vorzüglich ab von den Eigenschaften der 3kantigen oder 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunctsecken, deren Kantenlinien 3gliedrige Strahlen sind und von denen man daher weiſs, daſs jede ihrer Kanten $= \frac{1}{3} \times 360°$ $= 120°$ ist.

Fig. 276. Es sey c, def eine 3kantige Ecke mit Kanten von 120°. Man mache cd = ce = cf, lege durch d, e, f die Ebene def, halbire ef in g und de in h, so bestimmt sich die Lage der Hülfsebenen dcg und fch und außer den Linien cg, ch, dg, hf die Linie cb so, daſs cb lothrecht auf def ist u. s. w. Auch ergiebt sich nun die Ebene bce (= bcf = bcd). Ziehe hg, dann von dem hierdurch bestimmten Puncte o aus die Linie oi lothrecht auf ce, so ist hierdurch die Ebene hig so bestimmt, daſs ce lothrecht auf hig ist und der Winkel hig = 120°, der Winkel hio = gio = 60°. Daher $io : ig : og = 1 : 2 : \sqrt{3}$, oder auch gbo = 60°, also $ob : bg : og = 1 : 2 : \sqrt{3}$, also bg = ig. Aber $eg : bg = \sqrt{3} : 1$, $eg = bg\sqrt{3}$. Daher

$$eg : ig = bg : bg\sqrt{\tfrac{1}{3}},\ ig = eg\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$ie = \sqrt{eg^2 - ig^2} = \sqrt{3.ig^2 - ig^2} = ig\sqrt{2}$$

oder $ie : ig = eg : cg = k : 1$; und $cg = 1$ gesetzt ist

$$eg = \sqrt{2},\ ce = \sqrt{3},\ bg = ig = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$io = \frac{2}{\sqrt{3}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{3},\ ci = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

$$cb = \sqrt{cg^2 - bg^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$hg = eg = k,\ ho = og = \tfrac{1}{2}k = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$bo = io = \tfrac{1}{2}ig = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$be = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 4\sqrt{\tfrac{1}{6}},\ dg = 3\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 6\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$co = \sqrt{bo^2 + cb^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Daraus folgt:

$$\text{Tg. } bcg = \frac{bg}{bc} = \frac{\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = \sqrt{2},\ bcg = 54^\circ\, 44'\, 8''$$

$$\text{Tg. } bcf = \frac{be}{bc} = \frac{2\sqrt{\tfrac{2}{3}}}{\sqrt{\tfrac{1}{3}}} = 2\sqrt{2},\ bcf = 70^\circ\, 31'\, 44''$$

$$\text{Tg. } ecg = \frac{eg}{cg} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ ecg = 54^\circ\, 44'\, 8''$$

$$\text{Tg. } 2ecg = \frac{2\,\text{Tg. } ecg}{1 - \text{Tg. } ecg^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-2} = -\,2\sqrt{2}$$

$$\text{Tg. } \tfrac{1}{2}hcg = \frac{og}{oc} = \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}} = 1,\ \tfrac{1}{2}hcg = 45^\circ,\ hcg = 90^\circ$$

$$2ecg = ecf = 2R - bcf = 109^\circ\, 28'\, 16''.$$

20) Die Anzahl 3kantiger 3winkliger Mittelpunctsecken mit Kanten von 120° ist aber, sofern je 2 derselben nur eine ihrer Flächen gemeinschaftlich haben sollen, d. h. neben einander nicht ganz oder zum Theil in einander liegen sollen, = 4.

Es sey c, abf eine solche Ecke. Legt man durch ca die Ebene acd so, dafs fca || dca = 120°, und ebenso durch cf die Ebene fcd so, dafs afc || dcf = 120°, so ist auch wegen des gemeinschaftlichen Winkels fca die Ecke c, afd ≌ c, abf, folglich acd || fcd = 120°. Wird nun durch cb und cd eine Ebene gelegt, so ist die Ecke c, abd ≌ c, abf, weil die Kante ca der ersten = der Kante ca der 2ten = 120° (indem 360 — 2 × 120 = 120) und die beiden diese Kante einschliefsenden Winkel acb und acd der ersten gleich sind den einschliefsenden Winkeln acf und acb der andern. Es ist dann auch jede der beiden Kanten cb und cd der Ecke c, abd = 120°. Die drei Ebenen bcf, fcd und dcb bilden aber nun eine Ecke c, bfd, in welcher jede der 3 Kanten = 360° — 2 × 120° = 120°, so dafs diese Ecke die 4te Mittelpunctsecke ist. Fig. 277.

21) Wenn daher keine Strahlen vorhanden seyn sollen, die höher als 3gliedrig (d. h. die 4- oder 5gliedrig) sind, so mufs die Anzahl ebenbildlicher 3gliedriger Strahlen = 4 seyn. Die 3gliedrigen Strahlen müssen hier nämlich so liegen, dafs die 3kantigen Mittelpunctsecken entstehen; denn entständen die 4- oder die 5kantigen, so würden auch 4- oder 5gliedrige Strahlen vorhanden seyn müssen. Es werden daher in diesem Falle 3gliedrige Strahlen von zweierlei Art vorhanden seyn, nämlich aufser den 4 einen, die als Kanten der 4 Mittelpunctsecken betrachtet

werden, noch 4 andere, deren jeder als mittlerer Strahl innerhalb einer dieser Mittelpunctsecken anzusehen ist (gleichwie in den beiden andern Fällen die 4gliedrigen oder 5gliedrigen Strahlen solche mittlere Strahlen in den 4kantigen oder 5kantigen Mittelpunctsecken sind).

Es ist einleuchtend, daſs die vier 3gliedrigen Strahlen der einen Art nicht ebenbildlich seyn können mit denen der andern Art, während die 4 einer und derselben Art angehörigen unter sich ebenbildlich sind. Zwei ebenbildliche nachbarliche 3gliedrige Strahlen, sowohl der einen als auch der andern Art, bilden mit einander einen Winkel von 109° 28′ 16″. Je einer der einen Art bildet mit jedem der 3 ihm nächsten der andern Art einen Winkel von 70° 31′ 44″, mit dem 4ten aber einen solchen von 180°, d. h. er ist dessen Verlängerung.

22) Da nun um jeden 3gliedrigen Strahl 3 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen auf gleiche Weise gelagert seyn müssen, aber jeder 2gliedrige Strahl zwischen zwei ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen in der Mitte liegt, also zu 2 solchen gehört, so müssen zu den 4 ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{4.3}{2}$ oder 6 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen gehören. Der Winkel, den ein 2gliedriger Strahl mit jedem der zwei nachbarlichen ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen der ersten Art bildet, zwischen denen er liegt, ist $= \frac{109° 28' 16''}{2} = 54° 44' 8''$. Auch mit jedem der beiden nachbarlichen ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen der 2ten Art, die ihm zunächst liegen, bildet er Winkel von 54° 44′ 8″ und liegt demnach auch zwischen diesen, den Winkel, den sie bilden, halbirend.

23) Jeder 2gliedrige Strahl ist auf die Ebene zweier andern eben solchen 2gliedrigen Strahlen senkrecht, die 6 ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen machen also 3 ebenbildliche gleichendige 2gliedrige Axen aus, deren jede auf die beiden andern senkrecht ist. Alle übrigen Axen, auſser den aufgezählten 3gliedrigen der ersten und 2ten Art und den 2gliedrigen, sind bloſs 1gliedrige Strahlen.

Fig. 278. 24) Die wichtigsten Verhältnisse einer *4kantigen 4winkligen Ecke mit Kanten* von 120° ermitteln sich, wenn man bei einer solchen Ecke d, e b g h in den Kantenlinien d e = d b = d g nimmt, durch e, b, g die Ebene e b g h und durch h, d, b die

Ebene h d b und durch e, d, g die Ebene e d g legt, wodurch die Linien d c, e g und h b entstehen, deren erste d c, wie leicht einzusehen, im Puncte c senkrecht auf den beiden andern auf einander senkrechten e g und h b ist. Fället man c a aus c senkrecht auf d b und legt durch e, a, g die Ebene e a g, so ist der Winkel e a g der Neigungswinkel, welcher die Gröſse der Kante d b miſst, also = 120°, und e a c = 60°. Zieht man nun c f lothrecht auf e b und dann d f und wieder f i parallel mit e g und verbindet d und i durch d i, so hat man für c f = 1:

$$ef = bf = 1,\ eb = 2$$ Fig. 278.

$$cb = ec = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$ac : ec = \text{Cotg. } 60^\circ : 1 = \sqrt{\tfrac{1}{3}} : 1 = 1 : \sqrt{3}$$

$$ac = ec\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$ Fig. 281.

$$ae : ac = 1 : \text{Cos. } 60^\circ = 2 : 1.$$

$$ae = 2ac = 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$ab = \sqrt{cb^2 - ac^2} = \sqrt{2 - \tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$ Fig. 282.

$$ac : ab = dc : cb.$$

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} : 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = dc : \sqrt{2}.$$

$$1 : \sqrt{2} = dc : \sqrt{2},\ dc = 1.$$

$$di = df = \sqrt{2}$$

$$de = db = \sqrt{3}$$

$$da = \sqrt{3} - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{9}{3}} - \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

$$\text{Tg. } fdc = \frac{fc}{cd} = \frac{1}{1} = 1,\ fdc = 45^\circ.$$

$$\text{Tg. } edc = \frac{ec}{cd} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},\ edc = 54^\circ\,44'\,8''.$$

$$\text{Tg. } edf = \frac{ef}{fd} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ edf = 35^\circ\,15'\,52''.$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2} fdi = \frac{\tfrac{1}{2} fi}{fd} = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2},\ fdi = 60^\circ.$$

$$= \left.\begin{matrix} edb \parallel hdg \\ edh \parallel bdg \end{matrix}\right\} = 2 \times 45^\circ = 90^\circ.$$

$$edb = 2 \times 35^\circ\,15'\,52'' = 70^\circ\,31'\,44''.$$

$$edg = 2 \times 54^\circ\,44'\,8'' = 109^\circ\,28'\,16''.$$

25) Sind die 3gliedrigen Strahlen so vertheilt, daſs 4kantige 4winklige Mittelpunctsecken entstehen, so ist die Anzahl dieser Ecken = 6. Es sey c, b i h d eine solche Ecke mit Kanten von 120°. Legt man durch den 3gliedrigen Strahl c d die Ebene d c f, so daſs sie gegen d c h, folglich auch gegen d c b um 120° Fig. 279.

geneigt ist, so wird in ihr der Strahl cf so liegen müssen, dafs der Winkel dcf = dcb = dch. Legt man durch ihn die Ebene fcg und durch ch die Ebene hcg, so dafs fcg || fcd = hcg || hcd = 120°, so ist die Ecke c,dfgh ≌ c,bdhi, folglich der Winkel fcg = hcg = dch = fcd, mithin cg der zu cf, cd, ch gehörige vierte 3gliedrige ebenbildliche Strahl. Wird nun durch cf die Ebene acf und durch cb die Ebene acb so gelegt, dafs acf || dcf = acb || dcb = 120°, so ist die Ecke c,abdf ≌ c,bihd u. s. w., mithin der Winkel acb = bcd = acf = dcf, folglich ca der zu cb, cd, cf gehörige 4te ebenbildliche 3gliedrige Strahl, welcher zu cb sowohl als zu cf nachbarlich ist. Es ist dann acb || icb = 120°. Wird durch ca die Ebene kca und durch ci die Ebene kci so gelegt, dafs kca || bca = kci || bci = 120° ist, so ist die Ecke c,abik ≌ c,bdhi u. s. w., folglich der Winkel ack = acb = bci = ick und also ck der zu ca und ci nachbarliche ebenbildliche 3gliedrige Strahl, welcher zu ca, cb, ci als 4ter Strahl gehört. Wird durch ck und cg eine Ebene gelegt, so wird die Ecke c,afgk ≌ c,dbih seyn müssen, weil sie mit ihm übereinstimmt in Ansehung dreier Winkel und der 2 von diesen Winkeln eingeschlossenen Kanten. Es mufs daher fcg || kcg = ack || gck = 120° und der Winkel kcg = fcg u. s. w. seyn, so dafs ck auch ein zu cg nachbarlicher ebenbildlicher 3gliedriger Strahl ist. Die nun noch übrigbleibende Ecke c,kghi hat 4 Kanten, deren jede = 360° — 2 × 120° = 120° ist und deren einander gleiche Winkel mit denen der 5 bisher betrachteten Ecken übereinstimmen; es ist daher die 6te solche Mittelpunctsecke.

26) Es ergiebt sich daraus die Anzahl der ebenbildlichen 4gliedrigen Strahlen = 6, die der ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{3} = 8$ und die der ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen $\frac{6 \times 4}{2} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$.

Fig. 280. Es sey fdc ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck = fdc von Fig. 278. Man bilde das aus 8 solchen Dreiecken bestehende Quadrat ff′f″f‴. Ferner sey die Verbindung der
Fig. 281. beiden Dreiecke dec und deg gleich der ebenso bezeichneten von Fig. 278 und cd, ed und gd seyen über d hinaus so weit verlängert, bis die Verlängerung dem Verlängerten gleich und

hierdurch die Figur e′g′g e bestimmt ist, so wird, wenn d n ♯ e c ist, auch das Dreieck d n e = e c d seyn. Auch sey f d i gleich dem gleichseitigen Dreiecke f d i in Fig. 278 und das Sechseck sey eine Verbindung von 6 solchen Dreiecken. Zwei nachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\alpha = 70^\circ\ 31'\ 44''$ (e d b Fig. 278).

Zwei nebennachbarliche 3gliedrige Strahlen bilden einen Winkel $\beta = 109^\circ\ 28'\ 16''$ (e d g Fig. 278), so daſs $\beta = 180^\circ - \alpha$. Zwei 3gliedrige Strahlen bilden eine ebenbildlich gleichendige Axe; die 8 derartigen Strahlen geben mithin 4 ebenbildlich gleichendige 3gliedrige Axen. Jeder 4gliedrige Strahl bildet mit jedem ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahle einen Winkel $= 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ (2 f d e Fig. 278, c d c″ Fig. 280). Daher bilden die 6 4gliedrigen Strahlen 3 auf einander senkrechte ebenbildlich gleichendige 4gliedrige Axen.

Die Neigung des 4gliedrigen Strahles zu den nächsten 3gliedrigen $= 54^\circ\ 44'\ 8''$ (e d c Fig. 278 und 281). Die Neigung desselben zu den entfernteren

$$= 54^\circ\ 44'\ 8'' + 70^\circ\ 31'\ 44''$$
$$= 125^\circ\ 15'\ 52''$$
$$= 180^\circ - 54^\circ\ 44'\ 8''$$ (c d e′ Fig. 281).

Jeder 2gliedrige Strahl macht mit jedem der beiden ihm nächsten 3gliedrigen Strahlen Winkel von $35^\circ\ 15'\ 52''$ (f d e und f d b Fig. 278), mit den 4 weiter entlegenen aber solche von 90° (f d g und f d h Fig. 278), mit den 2 entferntesten solche von $180^\circ - 35^\circ\ 15'\ 52'' = 144^\circ\ 44'\ 8''$ (n d g Fig. 281). Mit den beiden ihm nächsten 4gliedrigen Strahlen bildet er Winkel von 45° (f d c Fig. 278); auf die beiden weiter entfernten ist er senkrecht (c d n und c′ d n Fig. 281). Mit den beiden am weitesten entfernten 4gliedrigen Strahlen macht er Winkel von 135° (f d c‴ und f d c′ Fig. 280). Jeder 2gliedrige Strahl bildet mit jedem der 4 ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen Winkel von 60° (f d i Fig. 278 und 282). Auf die beiden entfernteren ist er senkrecht (f d f′ und f d f‴ Fig. 280). Mit jedem der 4 noch weiter entfernten macht er einen Winkel $= 120^\circ$ (i d n Fig. 282).

Der 12te fällt in die Verlängerung von ihm über den Mittelpunct hinaus, so daſs also die 12 ebenbildlichen 2gliedrigen Strahlen 6 ebenbildlich gleichendige 2gliedrige Axen bilden (f d f″ Fig. 280 und 282). Jeder andere Strahl ist 1gliedrig.

Fig. 283. Die wichtigsten Verhältnisse einer 5kantigen 5winkligen Ecke o, dbehm mit Kanten von 120° ergeben sich, wenn man drei einander zunächst liegende Kantenlinien od, ob, oe derselben gleich lang macht und durch die so entstehenden 3 Endpuncte dieser Linien eine Ebene dbehm legt. Sie ist eine regelmäfsig fünfseitig begrenzte Ebene und durch sie werden alle 5 Kantenlinien der fraglichen Ecke in gleicher Länge abgeschnitten, so dafs om = oh = od = ob = oe ist. Eine von o aus auf diese Ebene senkrecht gefällte Linie trifft den Mittelpunct c derselben. Die Linien ce, cb, ed u. s. w. sind daher senkrecht auf oc.

Fig. 284. Es sey behmd dieses regelmäfsige Fünfeck, in welchem die Diagonalen de, em, mb, bh, hd und die Perpendikel di,
285. bk, el, hg und mf gezogen sind; o, cdbe sey der Theil, in welchem die Linien cd, cg, cb, cf, ce, de jenen gleichnamigen entsprechen. Man ziehe en senkrecht auf ob und verbinde d und n durch dn, so ist der Winkel end der Neigungswinkel, eob || dob = 120°; der Punct a, in welchem de und cb sich schneiden, werde durch an mit n verbunden, so ist and = ane = ½dne = 60°. Zieht man og und of und gf, so wird gf mit gf von Fig. 284 übereinstimmen. Man hat dann, wenn ca = 1 ist,

Fig. 284.

$$ca = 1$$

$$ab = \sqrt{5}$$

$$cb = cd = \sqrt{5}+1$$

Fig. 285.

$$gf = ae = ad = \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$ed = 2\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$be = \sqrt{2\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}$$

$$bf = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}$$

$$fc = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2$$

Fig. 283.

$$an = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$en = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$bn = \sqrt{\tfrac{2}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}$$

$$oc = \sqrt{5}+2.$$

$$ob = \sqrt{3\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$of = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}-1}}.$$

Setzt man oc = 1, so hat man

$$oc = 1$$

$$ob = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}} = \sqrt{3\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$of = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}.$$

$$bc = 3 - \sqrt{5}$$

$$fc = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$bf = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)(3-\sqrt{5})} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$be = (\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$ae = gf = \sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}} = \sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$an = ae\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$ne = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}$$

$$\sqrt{5} = 2{,}23606753\ldots.$$

$$\text{Tg. } boc = \frac{bc}{oc} = 3 - \sqrt{5}, \qquad boc = 37^\circ 22' 38'', 12$$

$$\text{Tg. } cof = \frac{fc}{oc} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1), \qquad cof = 31^\circ 43' 2'', 91$$

$$\text{Tg. } 2\,cof = 2, \qquad 2\,cof = 63^\circ 26' 5'', 82$$

$$\text{Tg. } bof = \frac{bf}{of} = \tfrac{1}{2}(3\sqrt{5}), \qquad bof = 20^\circ 54' 18'', 56$$

$$\text{Sin. } 2\,bof = \tfrac{2}{3}, \qquad boe = 41^\circ 48' 37'', 13$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}doe = \frac{ae}{bo} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \qquad \tfrac{1}{2}doe = 35^\circ 15' 51'', 77 \quad doe = 70^\circ 31' 43'', 55$$

$$\text{Sin. } \tfrac{1}{2}gof = \frac{\tfrac{1}{2}gf}{of} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{1}{\sqrt{5}+1}, \qquad \tfrac{1}{2}gof = 18^\circ \quad gof = 36^\circ$$

$$gof = bme = bcf = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$mbe = 2 \times 36^\circ = 72^\circ$$

$$dbe = 3 \times 36^\circ = 108^\circ$$

$$gfe = 4 \times 36^\circ = 144^\circ$$

$$cbe = 3 \times 18^\circ = 54^\circ$$

27) Ebenso erhält man in dem Falle, in welchem die 3gliedrigen Strahlen so vertheilt sind, dafs 5kantige 5winklige Mittelpunctsecken mit Kanten von 120° entstehen, folgende Sätze. Es sind vorhanden:

1) 12 solche Mittelpunctsecken; daher

2) 12 ebenbildliche 5gliedrige Strahlen;

3) 20 ebenbildliche 3gliedrige Strahlen;

4) 30 ebenbildliche 2gliedrige Strahlen.

5) Aufser den erwähnten Strahlen sind alle andern 1gliedrige.

6) Die 2-, 3- und 5gliedrigen Axen sind ebenbildlich gleichendig.

Es ist nämlich die Neigung eines 5gliedrigen Strahles zu jedem der 5 nachbarlichen, ihm ebenbildlichen Strahlen = 2.cof = 63° 26′ 5″, 82, zu jedem der 5 folgenden = 116° 33′ 54″, 18, zu dem 12ten = 180°. Die Neigung eines 3gliedrigen Strahles zu den drei ihm nachbarlichen ebenbildlichen

	= 2.bof = boe =	41° 48′ 37″, 13,
zu den 6 nächstfolgenden	= doe =	70° 31′ 43″, 55,
zu den 6 folgenden	=	109° 28′ 16″, 45,
zu den 3 entfernteren	=	138° 11′ 22″, 87,
zu dem 20sten	=	180°,

zu jedem der 3 nächsten 5gliedrigen Strahlen

= boc = 37° 22′ 38″, 12,

zu jedem der 3 folgenden 5gliedrigen Strahlen

= boe + boc = 79° 11′ 15″, 25.

Die Neigung eines 2gliedrigen Strahles zu den vier nachbarlichen, ihm ebenbildlichen

chen, ihm ebenbildlichen	= gof =	36°,
zu jedem der nächsten	=	60°,
zu den 4 folgenden	= 2.gof =	72°,
zu den 4 folgenden	=	90°,
zu den 2 nächsten 3gliedrigen	= bof =	21° 54′ 18″, 56,
zu den 2 nächsten 5gliedrigen	= cof =	31° 43′ 2″, 91.

28) Aus der Eigenschaft der 2gliedrigen Strahlen, das doppelte Vorhandenseyn eines jeden andern Strahles so zu bedingen, dafs in einer und derselben Ebene mit ihm je 2 ebenbildliche Strahlen liegen müssen, die mit ihm gleiche Winkel bilden, und aus der Eigenschaft des 1gliedrigen Strahles als eines solchen, nicht zu zwei Strahlen sich ebenbildlich zu verhalten, geht hervor, dafs die Anzahl der ebenbildlichen 1gliedrigen Strahlen jeder Art in jedem Falle zweimal so grofs seyn müsse, als die

der 2gliedrigen Strahlen; sie ist daher, wenn die höchstvielgliedrigen Strahlen

1) 3gliedrig sind, $= 2 \times 6 = 12$,
2) 4gliedrig, $= 2 \times 12 = 24$,
3) 5gliedrig, $= 2 \times 30 = 60$.

29) In hauptaxenlosen Strahlensystemen sind die 5gliedrigen, 4gliedrigen und die 2gliedrigen Axen stets ebenbildlich gleichendig, die 3gliedrigen aber nur dann, wenn sie nicht die höchstvielgliedrigen Axen sind.

30) Sind aber die 3gliedrigen Axen die höchstvielgliedrigen, so sind sie nicht ebenbildlich gleichendig, und es sind hier 2 Fälle möglich, entweder a) sind sie *gegenbildlich*, nicht ebenbildlich *gleichendig*, oder b) *ungleichendig*.

31) Ein 3gliedriger Strahl kann aber entweder 2fach oder 1fach 3gliedrig seyn, d. h. ein solcher Strahl kann dem ihm im Gegenbilde des gegebenen Strahlensystems entsprechenden Strahle ebenbildlich seyn oder nicht. Ebenbildlich gleichendige 3gliedrige Axen müssen daher entweder ebenbildlich gegenbildlich gleichendig seyn oder bloſs ebenbildlich gleichendig.

32) Wenn die 3gliedrigen Axen in hauptaxenlosen Gestalten gleichendig sind, so können sie *nicht gleichstellig 2endig seyn*. Bei den bloſs ebenbildlich gleichendigen 1fach 3gliedrigen Axen ist dieses an sich klar. Bei den bloſs gegenbildlich gleichendigen 1fach 3gliedrigen und den gleichendigen 2fach 3gliedrigen folgt es daraus, daſs jeder 3gliedrige Strahl 3 ihm nachbarliche 3gliedrige Strahlen hat, deren Verlängerungen über den Mittelpunct hinaus sich zu seinem solchen Verlängerungsstrahle als die zu diesem gehörigen nachbarlichen einander ebenbildlichen Strahlen verhalten, so daſs also Flügelflächen jener mittleren 3gliedrigen Axe vorhanden sind, in welchen jede dieser Axe parallele Linie eine ungleichendige ist. Die (ebenbildlich oder nicht ebenbildlich) gegenbildlich gleichendigen 3gliedrigen Axen in hauptaxenlosen Gestalten- oder Strahlensystemen können daher bloſs gerenstellig gleichendig seyn.

33) Die sämmtlichen möglichen Fälle sind daher folgende. Es sind vorhanden entweder

1) 4 ungleichendige 1fach 3gliedrige Axen, oder
2) 4 ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen,
3) 4 gerenstellig gleichendige 1fach 3gliedrige,
4) 4 ebenbildlich gleichendige 1fach 3gliedrige,

5) 4 gerenstellig gleichendige 2fach 3gliedrige,

6) 10 ebenbildlich gleichendige 1fach 3gliedrige,

7) 10 gerenstellig gleichendige 2fach 3gliedrige Axen.

Man kann daher die sämmtlichen hauptaxenlosen Strahlensysteme auf folgende Weise abtheilen und benennen:

A. Hauptaxenlose Strahlensysteme mit 4 3gliedrigen Axen,
4*axige Strahlensysteme.*

Diese zerfallen in

1) solche, bei welchen die 8 vorhandenen 3gliedrigen Strahlen ebenbildlich sind;
8*strahlige Systeme* (im weitern Sinne).

a) Diese Strahlen sind 2fach 3gliedrig;
2*fach* 3*gliedrig* 8*strahliges System*, *regelmäſsiges* 8*strahliges System;* abgekürzt: 8*strahliges System* (im engern Sinne).

b) 1fach 3gliedrig;
1*fach* 3*gliedrig* 8*strahliges System, unregelmäſsiges* 8*strahliges System.*

2) Die 8 3gliedrigen Strahlen zerfallen in 2 Abtheilungen, deren jeder 4 ebenbildliche 3gliedrige Strahlen angehören, die den 4 andern nicht ebenbildlich sind;
4*strahliges System* (im weitern Sinne).

a) Die 4 einen sind den 4 andern gleichwerthig, aber nicht ebenbildlich, sondern gegenbildlich;
1*fach* 3*gliedrig* 2×4*strahliges System;* abgekürzt: 2×4*strahliges System.*

b) Die 4 einen sind den 4 andern nicht gleichwerthig;
1×4*strahliges System.*

aa) Diese Strahlen sind 2fach 3gliedrig;
2*fach* 3*gliedriges* 4*strahliges System,* auch schlechthin 4*strahliges System* (im engern Sinne).

bb) Diese Strahlen sind 1fach 3gliedrig;
1*fach* 3*gliedrig* 4*strahliges System,*
unregelmäſsiges 4*strahliges System.*

B. Hauptaxenlose Strahlensysteme mit 10 3gliedrigen Axen,
10*axiges Strahlensystem,*
20*strahlige Systeme* (im weitern Sinne).

1) Die 20 3gliedrigen Strahlen sind 2fach 3gliedrig;
2*fach* 3*gliedrig* 20*strahliges System,*

regelmäfsiges 20strahliges System oder schlechthin *20strahliges System* (im engern Sinne).

2) Die 20 Strahlen sind 1fach 3gliedrig;
1fach 3gliedrig 20strahliges System,
unregelmäfsiges 20strahliges System.

C. Hauptaxenloses Strahlensystem mit unendlich vielen unendlich vielgliedrigen Axen, *∞strahliges System*, Kugel.

34) Die Flügelflächen eines 2fach 3gliedrigen Strahles, welche durch die ihm ebenbildlichen nachbarlichen Strahlen gehen, sind doppelte Flügelflächen desselben. Daher sind auch jene Flügelflächen von ihm, die diesen über den fraglichen Strahl hinaus gerade entgegengesetzt sind, d. h. welche die 120° betragende Neigung zweier solcher gleichwerthigen doppelten Flügelflächen halbiren, ebenfalls doppelte Flügelflächen.

35) Sind die 3gliedrigen Strahlen 2fach 3gliedrig, so sind auch die vorhandenen 2- und 4- oder 5gliedrigen Strahlen 2fach pgliedrige Strahlen. Denn die doppelten Flügelflächen der 3gliedrigen Strahlen sind auch doppelte Flügelflächen für die in diesen Flügelflächen liegenden 2gliedrigen Strahlen sowohl, als auch für die 4- oder 5gliedrigen.

36) Sind 2fach 3gliedrige ungleichendige Axen vorhanden, so müssen die dazu gehörigen 2fach 2gliedrigen Axen gerenstellig gleichendig seyn. Als 2fach pgliedrige Axen können sie blofs gleichstellig oder gerenstellig 2endig seyn. Wären sie gleichstellig 2endig, so müfste jede einer solchen Axe parallele Linie eine gleichendige seyn. Da nun aber der 2gliedrige Strahl in der Ebene 2er ebenbildlichen 3gliedrigen Strahlen liegt, den Winkel, den sie bilden, halbirend, und da die Verlängerungen der 3gliedrigen Strahlen nicht den verlängerten gleichwerthig sind, so ist einleuchtend, dafs demnach die 2fach 2gliedrige Axe in diesem Falle Flügelflächen habe, in denen jede dieser Axe parallel liegende Linie eine ungleichendige ist. Da nun die 2fach 2gliedrige Axe sonach nicht gleichstellig 2endig seyn kann, so mufs sie gerenstellig 2endig seyn.

37) Wenn in einem hauptaxenlosen Strahlensysteme 1fach 3gliedrige gerenstellig gleichendige Axen vorhanden sind, so sind die vorhandenen 2gliedrigen Axen gleichstellig 2endig 2fach 2gliedrig. Dafs sie 2fach 2gliedrig sind, ergiebt sich daraus, dafs, wenn bei Vergleichung des fraglichen Strahlensystems mit dem Gegenbilde desselben die einen 4 ebenbildlichen 3gliedrigen

Strahlen zusammenfallen mit den Gegenbildern der 4 andern 3gliedrigen Strahlen (die zu den 4 ersten sich, wie bekannt ist, gegenbildlich verhalten), die Gegenbilder der 2gliedrigen Strahlen mit den 2gliedrigen Strahlen selbst zusammenfallen müssen, weil in dem gegebenen Strahlensysteme keine andern 2gliedrigen Strahlen mehr vorhanden sind, aufser den 6, welche einander ebenbildlich sind. Dafs dann jene Flügelflächen eines solchen 2fach 2gliedrigen Strahles, welche durch die nachbarlichen 2gliedrigen Strahlen gehen, aus demselben Grunde auch mit Gegenbildern derartiger Flügelflächen zusammenfallen, also doppelte Flügelflächen seyn müssen, ist aus demselben Grunde ebenfalls einleuchtend. Weil nun die drei 2gliedrigen Axen auf einander senkrecht seyn müssen, indem ihre Anzahl nicht gröfser als 3 ist, so folgt, dafs in jeder doppelten Flügelfläche einer solchen Axe ein 2fach 2gliedriger Strahl so liegt, dafs er senkrecht auf die fragliche Axe ist, und daher mufs diese eine gleichstellig 2endige seyn.

38) Auf dieselbe Weise wird dargethan, dafs, wenn 3 auf einander senkrechte 2fach 4gliedrige Axen vorhanden sind, diese gleichstellig 2endig seyn müssen. Man kann nämlich sowohl die auf eine 2fach 4gliedrige Axe senkrechten 2fach 4gliedrigen Strahlen, als auch die den Winkel zwischen zwei nachbarlichen ebenbildlichen 4gliedrigen Strahlen halbirenden, in der auf die fragliche 2fach 4gliedrige Axe senkrechten Ebene liegenden 2fach 2gliedrigen Strahlen als in doppelten Flügelflächen jener Axe liegende 2fach 2gliedrige, auf sie senkrechte, Strahlen betrachten.

39) Ebenso, wie es von den 2fach 3gliedrigen gleichendigen Axen bewiesen wurde, dafs sie gerenstellig gleichendig seyn mufsten, wird auch von den 2fach 5gliedrigen Axen (die stets gleichendige sind) dargethan, dafs sie nur gerenstellig gleichendig seyn können. Die in den doppelten Flügelflächen der 2fach pgliedrigen Strahlen liegenden 1gliedrigen Strahlen sind 2fach 1gliedrige, mithin sind die einer und derselben Art angehörigen einander ebenbildlich gegenbildlich.

Die Anzahl 2fach 1gliedriger Strahlen einer Art ist:

im 2fach 3gliedrig 8strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 8}{2 \times 1} = 24$;

im 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 4}{2 \times 1} = 12$;

im 1fach 3gliedrig 2×4strahligen Systeme $= \frac{1 \times 3 \times 2 \times 4}{2 \times 1}$
$= 12$;

im 2fach 3gliedrig 20strahligen Systeme $= \frac{2 \times 3 \times 20}{2 \times 1}$
$= 60$.

In den Systemen mit 2fach 3gliedrigen Strahlen lassen sich die 2fach 1gliedrigen Strahlen in 3 Abtheilungen bringen:

a) solche zwischen einem höchstvielgliedrigen (2fach 5-, 4- oder 3gliedrigen) und einem 2fach 3gliedrigen;

b) solche zwischen einem höchstvielgliedrigen Strahle und einem 2fach 2gliedrigen;

c) solche zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem 2fach 2gliedrigen[1].

In dem 2×4strahligen Systeme sind solche Abtheilungen der 2fach 1gliedrigen Strahlen nicht vorhanden; die 2fach 1gliedrigen Strahlen liegen hier zwischen zwei 2fach 2gliedrigen.

Bei dem 2fach 3gliedrig 20strahligen sowohl, als auch 8strahligen, so wie auch bei dem 1fach 3gliedrig 2×4strahligen Systeme sind die vorhandenen 2fach 1gliedrigen Axen gerenstellig gleichendig 2fach 1gliedrig, wie dieses die Beschaffenheit derjenigen höheren 2fach pgliedrigen Axen mit sich bringt, in Beziehung zu welchen sie als 2fach 1gliedrige Strebeaxen auftreten, wenn jene verticalstehend gedacht werden. Bei dem 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme aber sind die 2fach 1gliedrigen Axen, welche nicht auf eine der drei 2fach 2gliedrigen Axen senkrecht sind, stets ungleichendig; die sechs gleichwerthigen, auf 2fach 2gliedrige Axen senkrechten, 2fach 1gliedrigen Axen aber sind gleichstellig 2endig 2fach 1gliedrige. Eine solche 2fach 1gliedrige gleichstellig 2endige Axe aber liegt so, dafs der Winkel, welchen zwei einander zunächst liegende ungleichwerthige 2fach 3gliedrige Strahlen bilden, durch sie halbirt wird.

Da in dem 2fach 3gliedrigen 20strahligen, so wie in dem 2fach 3gliedrig 8strahligen und in dem 1fach 3gliedrig 2×4-

1 Dafs hier in dem Falle, bei welchem ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen vorkommen, die 2fach 3gliedrigen Strahlen der einen Art als höchstvielgliedrige betrachtet werden, während die der andern Art so angesehen werden, als seyen sie die gewöhnlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen hauptaxenloser Strahlensysteme, wird ohne weitere Auseinandersetzung einleuchten.

strahligen Systeme die 3gliedrigen Axen gerenstellig 2endige sind, so folgt, dafs, wenn man eine derselben senkrecht stellt, jede 1gliedrige Axe gleichwie bei hauptaxigen gerenstellig 2endigen 3gliedrigen Gestalten eine gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige seyn müsse. Da bei dem 2fach 3gliedrig 4strahligen Systeme die 2gliedrigen Axen gerenstellig 2endige sind, so mufs, weil bei hauptaxigen gerenstellig 2endigen 2fach 2gliedrigen Gestalten jede auf die Hauptaxe senkrechte 1fach 1gliedrige Queraxe eine ebenbildlich 2endige ist, auch hier jede auf eine 2gliedrige Axe senkrechte 1fach 1gliedrige Axe eine ebenbildlich 2endige 1fach 1gliedrige seyn. Jede andere 1fach 1gliedrige Axe ist aber hier eine ungleichendige, weil der Fall, gemäfs welchen dort Axen, welche in einerlei Ebene mit der Hauptaxe und einer 2gliedrigen Queraxe fielen, gleichendige waren, hier dieselben ebenbildlich 2endigen 1fach 1gliedrigen Axen, welche eben erwähnt wurden, betreffen würde. —

Für die 1fach 3gliedrig 20-, 8- und 4strahligen Systeme gilt, weil in ihnen ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Axen vorkommen, der Satz: jede 1fach 1gliedrige Axe, die auf einer solchen 1fach 2gliedrigen senkrecht ist, müsse eine ebenbildlich 2endige seyn. Dasselbe gilt von den auf ebenbildlich 2endige 1fach 4gliedrige Axen senkrechten 1fach 1gliedrigen im 1fach 3gliedrig 8strahligen Systeme. Alle übrigen 1fach 1gliedrigen Axen sind aber ungleichendig.

Das *2fach 3gliedrig 8strahlige System*, oder das *8strahlige System* im engern Sinne, hat

1) 3 auf einander senkrechte gleichstellig 2endige *2fach 4gliedrige Axen* a;

2) 4 gerenstellig 2endige *2fach 3gliedrige Axen* b; jeder 2fach 3gliedrige Strahl liegt in der Mitte zwischen 3 nachbarlichen 2fach 4gliedrigen;

3) 6 gleichstellig 2endige *2fach 2gliedrige Axen* c; jeder 2fach 2gliedrige Strahl liegt in der Mitte sowohl zwischen 2 nachbarlichen 2fach 4gliedrigen, als auch zwischen 2 nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen;

4) *2fach 1gliedrige* gerenstellig 2endige *Axen,* die Anzahl 2fach 1gliedriger Axen einer Art stets = 12. Die 2fach 1gliedrigen Axen unterscheiden sich in

α) 4- *und 2ständige* oder kürzer 4ständige; jeder Strahl einer solchen 2fach 1gliedrigen Axe liegt in der Ebene zwischen

einem 2fach 4gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Es sind so viele Arten 4ständiger 2fach 1gliedriger Axen möglich, als der Winkel von 45 Grad, den der 2fach 4gliedrige mit dem ihm nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle bildet, Strahlen zu fassen vermag.

β) 3- *und 2ständige* oder kürzer *3ständige;* jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Die Menge von Arten solcher Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von 35° 15′ 52″ (Neigung von b gegen c) faſst.

γ) 4- *und 3ständige 2fach 1gliedrige Axen;* jeder 4- und 3ständige 2fach 1gliedrige Strahl liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 4gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahle. Die Menge der Arten solcher Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von 54° 44′ 8″ (Neigung von a gegen b) zu fassen vermag.

5) gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 24. Die Menge der Arten 1fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, in welcher die Kanten folgende Werthe haben: $\frac{360°}{2 \times 2} = 90°$ die eine; $\frac{360°}{2 \times 3} = 60°$ die andere; $\frac{360°}{2 \times 4} = 45°$ die dritte; oder bei welcher die ebenen Winkel der erste 54° 44′ 8″, der zweite 45°, der dritte 35° 15′ 52″ halten. Da diese 1fach 1gliedrigen Axen gerenstellig 2endig sind, so verhalten sich die beiden, in einer solchen liegenden, Strahlen gegenbildlich, nicht ebenbildlich.

Jeder der 8 ebenbildlich gegenbildlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 2×3 oder 6 1fach 1gliedrigen Strahlen jeder Art, so daſs diese 6 Strahlen auf gleiche Weise nachbarlich zu ihm sich verhalten; die 3 einen ebenbildlichen [1] ver-

1 Durch Umdrehung des Strahlensystems um jenen 3gliedrigen Strahl, als die Umdrehungsaxe, mit einander vertauschbaren

$$\begin{aligned} & 2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 24 \\ = & 2 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 12 \\ = & 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 6 \\ = & 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \\ = & 2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 3 = 48. \end{aligned}$$

halten sich zu den 3 andern unter sich ebenbildlichen als gegenbildlich gleichwerthig.

Das *1fach 3gliedrig 8strahlige System* hat

1) 3 ebenbildlich 2endige 1fach 4gliedrige
2) 4 — 2 — 1 — 3 —
7) 6 — 2 — 1 — 2 —

Axen, welche hinsichtlich auf Lage sich ebenso verhalten, wie die 2fach 4-, 3- und 2gliedrigen Axen des 8strahligen Systems.

4) 1fach 1gliedrige Axen;

α) ebenbildlich 2endige, von jeder Art 12

αα) 4ständige,

ββ) 3ständige,

γγ) 4- und 3ständige,

hinsichtlich auf Lage, Zahl und Menge der Arten mit den ähnlich benannten 2fach 1gliedrigen Axen der 8strahligen Systeme übereinstimmend;

β) ungleichendige; von jeder Art 24, hinsichtlich auf Lage und Menge der Arten mit den 1fach 1gliedrigen Axen des 6strahligen Systems übereinstimmend.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \\ = 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \\ = 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ = 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ = \underbrace{24}_{\text{a}} \cdot \underbrace{1}_{\text{b}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{c}} \end{array}\right\} = 24.$$

a: Anzahl der Axen einer Art.

b: Anzahl der gleichwerthigen Strahlen in einer Axe.

c: Beschaffenheit der Strahlen einer Axe.

Jeder der 8 ebenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 3 ebenbildlichen 1fach 1gliedrigen Strahlen jeder Art, die sich zu ihm auf gleiche Weise nachbarlich verhalten und durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn mit einander vertauscht werden können,

Das *2fach 3gliedrig 4strahlige System* oder das *4strahlige System* (im engern Sinne) hat:

1) 3 auf einander senkrechte gerenstellig 2endige *2fach 2gliedrige Axen.*

2) 4 ungleichendige 2fach 3gliedrige Axen; jeder 2fach 3gliedrige Strahl der einen Art liegt in der Mitte zwischen 3 solchen der andern Art, während jeder 2fach 3gliedrige Strahl in der Mitte zwischen 3 zu einander nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen liegt.

3) 2fach 1gliedrige Axen,

α) 3- *und 3ständige* d. h. solche, bei denen jeder Strahl in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt;

αα) gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen. Ihre Anzahl ist 6. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 3gliedrigen Strahlen und zugleich in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen 2fach 2gliedrigen;

ββ) ungleichendige 3- und 3ständige Axen. Die Anzahl solcher Axen einer Art = 12. Die Menge der Arten ist gleich der Menge von Strahlen, die der Winkel von 35° 15′ 52″ faſst, welcher die kleinste Neigung einer 2fach 3gliedrigen gegen eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe miſst;

β) 3- *und 2ständige* oder kürzer *3ständige ungleichendige Axen.* Jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 3gliedrigen und einem dazu nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahle. Je 12 dergleichen Axen sind von einerlei Art; die Menge der Arten ist gleich der Menge von Strahlen, die ein Winkel von 54° 44′ 8″, welcher die Neigung eines 2fach 3gliedrigen zu einem 2fach 2gliedrigen Strahle miſst, zu fassen vermag.

4) 1fach 1gliedrige Axen,

α) ebenbildlich 2endige. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt in der Ebene zwischen einem 2fach 2gliedrigen und einem dazu nachbarlichen Strahle einer gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Axe und die Menge der in dem von 2 solchen Strahlen eingeschlossenen Winkel möglichen Strahlen bestimmt die Menge der Arten ebenbildlich gleichendiger 1fach 1gliedriger Axen.

Je 2×6 solcher Axen gehören zu einerlei Art; die 6 einen verhalten sich zu den 6 andern gegenbildlich.

β) ungleichendige. Von jeder Art 2×12 oder 24. Die 12 einen zu den 12 andern gegenbildlich. Jeder der 4 ebenbildlich gegenbildlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen ist umgeben von 2×3 oder 6 gleichwerthigen 1fach 1gliedrigen Strahlen, die auf gleiche Weise nachbarlich zu ihm sich verhalten. Die 3 einen unter sich ebenbildlichen verhalten sich gegenbildlich zu den 3 andern.

Die Menge der Arten 1fach 1gliedriger ungleichendiger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, an welcher die Kanten 90°, 60° und 45° sind.

$$\left.\begin{array}{r} 3\cdot2\cdot2\cdot2 \\ 4\cdot1\cdot2\cdot3 \\ 6\cdot2\cdot2\cdot1 \\ 12\cdot1\cdot2\cdot1 \\ 24\cdot1\cdot1\cdot1 \end{array}\right\} = 24.$$

Das 1*fach* 3*gliedrig* 4*strahlige System* hat:

1) 3 ebenbildlich 2endige 1fach 2gliedrige Axen;

2) 4 ungleichendige 1fach 3gliedrige Axen;

3) 1fach 1gliedrige Axen.

Jeder der 4 ebenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen einer Art ist umgeben von 3 gleichwerthigen ebenbildlichen 1fach 1gliedrigen Strahlen jeder Art, so daſs also 12 ebenbildliche 1fach 1gliedrige Strahlen jeder Art vorhanden sind.

Die 1fach 1gliedrigen Axen zerfallen in

a) ebenbildlich 2endige, je 6 von einerlei Art. Die Strahlen, aus denen eine solche Axe besteht, liegen in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen 2gliedrigen Strahlen. Man unterscheidet

α) die 3- *und* 3*ständigen*, von denen es nur eine Art giebt, bestehend aus Strahlen, deren jeder zwischen 2 ungleichwerthigen 3gliedrigen Strahlen in der Mitte liegt;

β) die gewöhnlichen ebenbildlich 2endigen 1fach 1gliedrigen Axen.

b) ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen, je 12 von einerlei Art. Man hat

α) 3- und 3ständige }
β) 3- und 2ständige } ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen,
γ) gewöhnliche }

von denen die ersten aus 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehen,

welche in der Ebene zwischen 2 ungleichwerthigen 3gliedrigen nachbarlichen Strahlen liegen, während die Strahlen, durch welche eine der 3- und 2ständigen gebildet ist, in der Ebene zwischen einem 3gliedrigen und einem nachbarlichen 2gliedrigen Strahle sich befinden und die gewöhnlichen in keiner solchen Ebene liegen. Die Menge der Arten gewöhnlicher ungleichendiger 1fach 1gliedriger Axen ist 2mal so groſs, als die Menge von Strahlen, die eine Ecke faſst, deren Kanten 90°, 60° und 45° sind.

$$\left.\begin{matrix} 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \\ 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ 12 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{matrix}\right\} = 12.$$

Das 1*fach* 3*gliedrig* 2×4*strahlige System* oder das 2×4-*strahlige System* hat:

1) 3 auf einander senkrechte gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Axen;

2) 4 gerenstellig 2endige 1fach 3gliedrige Axen;

3) gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 6. Sie liegen so, daſs jeder ihrer Strahlen in der Ebene zwischen zwei nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen sich befindet. Man hat:

a) 3- und 3ständige, von denen es nur eine Art giebt. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zugleich in der Ebene zwischen zwei nachbarlichen gegenbildlichen 3gliedrigen Strahlen;

b) gewöhnliche. Die Menge der Arten ist gleich der doppelten Menge von Strahlen, die ein Winkel von 45° faſst;

4) gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 12. Man unterscheidet:

a) 3- und 3ständige }
b) 3- und 2ständige } 1fach 1gliedrige Axen.
c) gewöhnliche }

Von den erstern liegt jeder Strahl in der Ebene zwischen 2 nachbarlichen gegenbildlichen 1fach 3gliedrigen Strahlen; von den zweiten aber in einer solchen zwischen einem 3gliedrigen und einem 2gliedrigen; von den gewöhnlichen aber in keiner solchen Ebene.

Die Lage der verschiedenen Axen einer Art hängt ab von den bekannten Eigenschaften der 3gliedrigen und der 2gliedrigen Axen, gemäſs welchen

1) jeder 3gliedrige Strahl umgeben ist von 3 einander ebenbildlichen 1fach 1gliedrigen Strahlen, die durch Umdrehung des Strahlensystems um ihn sich mit einander vertauschen lassen;

2) unter gleicher Neigung gegen einen und denselben 2gliedrigen Strahl, in einerlei Ebene mit ihm, ebenbildliche Strahlen liegen.

Die Menge der Arten gewöhnlicher 1fach 1gliedriger Axen ist doppelt so grofs, als die Menge von Strahlen, welche eine Ecke fafst, in welcher die Kanten 90°, 60° und 45° sind.

	3 .	2 .	2 .	2	= 24, Anzahl der gleichwerthigen 1fach 1gliedrigen Strahlen einer Art.
=	4 .	2 .	1 .	3	
=	6 .	2 .	2 .	1	
=	12 .	2 .	1 .	1	
	Menge der Axen einer Art.	Anzahl der gleichwerthigen Strahlen in einer Axe.	Beschaffenheit der Strahlen.		

Zur Uebersicht der sämmtlichen 3gliedrig 4axigen Systeme diene folgende Tabelle, in welcher die einen der entsprechenden Axen der verschiedenen Systeme neben einander gestellt sind.

In dieser Tabelle bedeutet die Abkürzung:

glst.	das	Wort	gleichstellig
grst.	—	—	gerenstellig
ebbdl.	—	—	ebenbildlich
gl.	—	—	gliedrig
end.	—	—	endig
ungl.	—	—	ungleich
f.	—	—	fach
u.	—	—	und.

3 glst. 2end. 2f. 4gl.	3 ebbdl. 2end. 1f. 4gl.	3 grst. 2end. 2f. 2gl.	3 glst. 2end. 2f. 2gl.	3 ebbdl. 2end. 1f. 2gl.
4 grst. 2end. 2f. 3gl.	4 ebbdl. 2end. 1f. 3gl.	4 ungl. end. 2f. 3gl.	4 grst. 2end. 1f. 3gl.	4 ungl. end. 1f. 3gl.
6 glst. 2end. 2f. 2gl.	6 ebbdl. 2end. 1f. 2gl.	6 glst. 2end. 2f. 1gl.	6 grst. 2end. 2f. 1gl. 3- u. 3ständige	6 ebbdl. 2end. 1f. 1gl. 3- u. 3ständige
12 grst. 2end. 2f. 1gl. 4ständige	12 ebbdl. 2end. 1f. 1gl. 4ständige	12 ebbdl. 2end. 1f. 1gl.	6 grst. 2end. 2f. 1gl.	6 ebbdl. 2end. 1f. 1gl.
12 grst. 2end. 2f. 1gl. 3ständige	12 ebbdl. 2end. 1f. 1gl. 3ständige	12 ungl. end. 2f. 1gl. 3- u. 3ständige	12 grst. 2end. 1f. 1gl. 3- u. 3ständige	12 ungl. end. 1f. 1gl. 3- u. 3ständige
12 grst. 2end. 2f. 1gl. 4- u. 3ständige	12 ebbdl. 2end. 1f. 1gl. 4- u. 3ständige	12 ungl. end. 2f. 1gl. 3ständige	12 grst. 2end. 1f. 1gl. 3- u. 2ständige	12 ungl. end. 1f. 1gl. 3- u. 2ständige
24 grst. 2end. 1f. 1gl.	24 ungl. end. 1f. 1gl.	24 ungl. end. 1f. 1gl.	12 grst. 2end. 1f. 1gl.	12 ungl. end. 1f. 1gl.

Das *2fach 3gliedrig 20strahlige System*, oder das *20strahlige System* im engern Sinne, hat:

1) 6 gerenstellig 2endige 2fach 5gliedrige Axen. Jeder 2fach 5gliedrige Strahl steht in der Mitte zwischen 5 ihm nachbarlichen ebenbildlichen Strahlen und bildet mit je zwei derselben die Kantenlinien einer 3kantigen Mittelpunctsecke, deren Kanten durch den Mittelpunctswinkel der regelmäfsigen 5seitigen Figur gemessen werden, also $= \frac{360°}{5} = 72°$ sind.

2) 10 gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Axen. Jeder der 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt in der Mitte von 3 gegenseitig nachbarlichen 2fach 5gliedrigen, während umgekehrt jeder 2fach 5gliedrige Strahl in der Mitte von 5 ihm nachbarlichen 2fach 3gliedrigen Strahlen liegt, welche als Kantenlinien einer 5kantigen 5winkligen Mittelpunctsecke angesehen werden können, an der jede Kante $= \frac{360°}{3} = 120°$ beträgt.

3) 15 gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Axen. Jeder 2fach 2gliedrige Strahl halbirt sowohl a) den Winkel von 63° 26′ 5″,82, den 2 nachbarliche 2fach 5gliedrige Strahlen bilden, als auch b) den, welchen 2 nachbarliche 2fach 3gliedrige einschliefsen, dessen Gröfse = 41° 48′ 37″, 12 ist.

4) gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 30. Man hat:

a) 5- und 2ständige oder kürzer 5ständige. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zwischen einem 5gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen, das heifst unter einem Winkel von 31° 43′ 2″, 91 dagegen geneigten, 2gliedrigen Strahle. Die Menge der Arten 5ständiger 2fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die der eben erwähnte Winkel zu fassen vermag.

b) 3- und 2ständige oder kürzer 3ständige. Jeder Strahl einer solchen Axe liegt zwischen einem 3gliedrigen und einem zu diesem nachbarlichen d. h. unter einem Winkel von 20° 54′ 18″, 56 dagegen geneigten 2gliedrigen Strahle. Die Menge der Strahlen, die der angegebene Winkel fafst, ist gleich der möglichen Menge von Arten 3ständiger 2fach 1gliedriger Axen.

c) 5- und 3ständige. Jeder Strahl einer 5- und 3ständigen 2fach 1gliedrigen Axe liegt zwischen den Schenkeln des Winkels von 37° 22′ 38″,12, den ein 5gliedriger mit einem ihm nachbarlichen 3gliedrigen Strahle bildet, und die Menge der

Arten 5- und 3ständiger 2fach 1gliedriger Axen ist gleich der Menge von Strahlen, die dieser Winkel zu fassen vermag.

5) gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige Axen, von jeder Art 60. Die Menge von Arten ist gleich der Menge von Strahlen, welche eine Ecke zu fassen vermag, in welcher die Gröſse der Kanten $\frac{360°}{2 \times 2} = 90°$, $\frac{360°}{2 \times 3} = 60°$, $\frac{360°}{2 \times 5} = 36°$, der ebenen Winkel aber

37° 22′ 38″, 12
31° 43′ 2″, 91
20° 54′ 18″, 56 beträgt [1].

Bei dem 1*fach* 3*gliedrig* 20*strahligen Systeme* hat man

6	ebenbildlich	2endige	1fach	5gliedrige	Axen
10	—	2 —	1 —	3 —	—
15	—	2 —	1 —	2 —	—
30	—	2 —	1 —	1 —	—

von jeder Art, und zwar

a) 5- und 2ständige,
b) 3- und 2ständige,
c) 5- und 3ständige,

60 ungleichendige 1fach 1gliedrige Axen von jeder Art [2].

1

Anzahl der Axen.	Beschaffenheit.	gleichwerthige Strahlen einer Axe.	
6	2	5	2
10	2	3	2
15	2	2	2
30	2	1	2
60	1	1	2

= 120 (Menge der 1fach 1gliedrigen Strahlen einer Art).

2

Anzahl der Axen.	gleichwerthige Strahlen einer Axe.		Beschaffenheit.
6	2	1	5
10	2	1	3
15	2	1	2
30	2	1	1
60	1	1	1

= 60.

Hauptaxenlose Gestalten.

Dem unendlich vielstrahligen Systeme entspricht blofs die einzige Gestalt, die wir *Kugel* nennen.

In jedem der übrigen hauptaxenlosen Strahlensysteme sind aber 7 Hauptarten von Strahlen vorhanden; daher auch in jedem hauptaxenlosen Gestaltensysteme 7 Hauptarten von Gestalten möglich seyn müssen. Die der Auffassung zunächst liegenden einfachen Gestalten der Art sind jene, welche entstehen, wenn man in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte des Strahlensystems senkrecht auf alle Strahlen einer bestimmten Art Ebenen legt und diese Ebenen nur so weit verlängert, bis sie sich schneiden und den Raum rings umschliefsen[1].

I. Die 3gliedrig 4axigen Gestalten.

A. Die *8strahligen Gestalten* (*Octarcta*), homosphäroedrische Gestalten, homotessulare Gestalten.

Fig. 286 1) Der *Würfel* oder *6flächner* (*Hexaedrum, Hexaeder, Cubus*) hat 6 |≌| Flächen W, die auf den 2fach 4gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 4gliedrige Flächen, nämlich Quadrate sind. Er hat $\frac{6 \times 4}{2}$ oder 12 |≌| Kanten r, welche auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 2gliedrige Kanten sind, in denen die Flächenneigung $= 90°$ ist. Die

1 Die Benennung der einzelnen Arten von einfachen hauptaxenlosen Gestalten wird am zweckmäfsigsten gegründet

1) auf die Anzahl ihrer (wie sich von selbst versteht, gleichwerthigen) Flächen (6flächner, 8flächner, 4flächner, 12flächner, 20flächner), wenn die Flächen derselben regelmäfsige Vielecke sind;

2) auf die Form der Flächen in Verbindung mit ihrer Anzahl (12-Rautenflächner, 30-Rautenflächner, 12wandiger, 24wandiger und 60-wandiger Lanzenflächner, 12wandiger Sterzenflächner, 24wandiger, 48-wandiger und 120wandiger Dreieckflächner, 24wandiger Viereckflächner, 12wandiger, 24wandiger und 60wandiger Fünfeckflächner);

3) auf das Verbundenseyn von mehreren zu einer Gruppe von Flächen, so dafs dann die Benennung angiebt, wie viele Flächen zu einer Gruppe gehören und wie viele solcher Gruppen vorhanden sind. Dieses betrifft die hauptaxenlosen Gestalten, welche von gleichschenkligen Dreiecken oder Keilflächen begrenzt sind (4×3wandiger, 6×4-wandiger, 8×3wandiger, 12×5wandiger und 20×3wandiger Keilflächner).

$\frac{4 \times 6}{3}$ oder 8 |≌| Ecken o desselben sind 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken und ihre Scheitel sind die Endpuncte der 2fach 3gliedrigen Strahlen. Sie sind 3fach rechtwinklige, mithin auch 3fach rechtkantige Ecken. Die wichtigsten Schnittebenen des Würfels (Hauptschnitte), d. h. jene, in denen wichtigere Axen dieses Körpers liegen, sind

a) die 2fach 4gliedrigen oder quadratischen Hauptschnitte des Würfels. Jeder von den 3 solchen Schnitten ist senkrecht auf einer der 3 zu einander senkrechten 2fach 4gliedrigen Axen, liegt daher zwei parallelen Würfelflächen parallel. Die beiden andern 2fach 4gliedrigen Axen liegen in ihm den Seiten des Quadrates parallel, die beiden Diagonalen desselben sind 2fach 2gliedrige Axen des Würfels.

b) die 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte. Sie sind rechtwinklige Parallelogramme, deren eines Seitenpaar mit Würfelkanten, das andere mit Würfelflächendiagonalen zusammenfällt. Das Verhältniſs der Seiten derselben ist also $= 1 : \sqrt{2}$. Parallel den kürzeren Seiten liegt in jedem dieser Schnitte eine 2fach 4gliedrige, parallel den längeren Seiten eine 2fach 2gliedrige Axe und die beiden Diagonalen sind 2fach 3gliedrige Axen. Die Würfelkante $= 1$ gesetzt ist also:

die 2fach 4gliedrige Axe $= 1 = 1$
— 2 — 2 — — $= \sqrt{2} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}}$
— 2 — 3 — — $= \sqrt{3} = 3\sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

Senkrecht auf jedem 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte steht eine der sechs 2fach 2gliedrigen Axen, daher die Anzahl der Hauptschnitte dieser Art $= 6$ ist.

c) die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte. Sie sind regelmäſsige Sechsecke; auf jedem solchen Schnitte steht eine der 4 Eckenaxen oder 2fach 3gliedrigen Axen des Würfels senkrecht, daher die Anzahl dieser Hauptschnitte $= 4$ ist. In jedem liegen 3 der 2fach 2gliedrigen Axen als Diagonalen.

2) Der *8flächner* (*octaedrum, Oktaeder,* regelmäſsiges oder Fig. 287.
gleichseitiges Oktaeder, 8flach). 8 |≌| Flächen o, die auf den 2fach 3gliedrigen Strahlen senkrecht stehen, 2fach 3gliedrige Flächen, und zwar 3seitige, sind. Seine $\frac{8 \times 3}{2}$ oder 12 Kanten r sind |≌| 2fach 2gliedrige, auf den 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehende Kanten, von denen je 4 in einer der 6 |≌|

4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w sich vereinigen, deren Scheitel die Endpuncte der 2fach 4gliedrigen Strahlen sind. Die Neigung 2er Flächen an einer Kante ergiebt sich aus der Neigung zweier nachbarlichen 3gliedrigen Strahlen als 109° 28′ 16″. Die ebenen Winkel betragen 60°.

Die Hauptschnitte des 8flächners sind:

a) die 2fach 4gliedrigen, welche Quadrate sind, deren Diagonalen 2fach 4gliedrigen Axen entsprechen, während die auf den Seiten senkrechten Durchmesser derselben 2fach 2gliedrige Axen sind. Ihre Seiten sind Kanten des 8flächners.

b) Die 2fach 2gliedrigen, welche Rauten sind, deren längere Diagonalen 2fach 4gliedrige und deren kürzere Diagonalen 2fach 2gliedrige Axen sind. Jene sind einerlei mit Diagonalen, diese sind gleiche Seiten quadratischer Hauptschnitte, so dafs das Verhältnifs beider Diagonalen $= \sqrt{2} : 1 = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist. Die auf den Seiten der Raute senkrechten Durchmesser derselben sind 2fach 3gliedrige Axen des 8flächners. Die 3gliedrige Axe verhält sich zu der 4gliedrigen, wie die halbe 2gliedrige zur Seite der Raute. Es ist daher, wenn

die 2fach 4gliedrige Axe = 1 ist, auch
die 2 — 2 — — $= \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und
die 2 — 3 — — $= \sqrt{\tfrac{1}{3}}$.

c) die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte, welche auch hier regelmäfsige Sechsecke sind, in denen 3 der 2fach 2gliedrigen Axen als Diagonalen liegen.

3) Der 12*wandige Rautenflächner* oder der 12-*Rautenflächner* (*dodecaedrum rhombeum*, Rautendodekaeder, dodecaèdre à plans rhombes, Rauten12flach, Granatdodekaeder, Granatoeder, 1kantiges Tetragonal-Dodekaeder u. s. w.)
Fig. 288. hat 12 |≌| *Flächen* r, die auf den 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen und 2fach 2gliedrige Flächen und zwar 4seitige d. h. Rauten sind. Die $\frac{4 \times 12}{2}$ oder 24 Kanten sind |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten l, die auf jenen 2fach 1gliedrigen 4- und 3ständigen Strahlen, von welchen jeder in der Mitte zwischen 2 nachbarlichen 2fach 2gliedrigen Strahlen liegt, senkrecht stehen, so dafs sie deshalb 4- und 3ständige Kanten genannt werden könnten. Die 2 × 12 spitzen ebenen Winkel sind zu je vieren in einer der $\frac{2 \times 12}{4}$ oder 6 |≌| *4kan-*

tigen 2fach 4gliedrigen *Ecken* w vereinigt, während die 2×12 stumpfen Winkel zu je dreien in einer der $\frac{2 \times 12}{3}$ oder 8 |≌| 3*kantigen* 2fach 3gliedrigen *Ecken* o verbunden sind.

Die Hauptschnitte der 12-Rautenflächner sind:

a) die 2fach 4gliedrigen. Sie sind Quadrate, deren Diagonalen 2fach 4gliedrigen Axen entsprechen. Die den Seiten parallelen Durchmesser sind 2fach 2gliedrige Axen. Die Seiten dieser Hauptschnitte sind gröfsere Diagonalen der Flächen des Körpers. Das Verhältnifs der 2fach 2gliedrigen zu den 2fach 4gliedrigen Axen ist sonach, wie beim 8flächner, $= 1 : \sqrt{2}$.

b) Die 2fach 2gliedrigen Hauptschnitte sind 2fach 2gliedrige 4- und 2seitige Figuren. Die 4 gleichen Seiten entsprechen Kanten des Körpers, die 2 andern, unter sich gleichen, stimmen überein mit kürzeren Diagonalen der Flächen desselben. In ihnen liegen zwei 1fach 3gliedrige Axen, eine 2fach 4gliedrige und eine 2fach 2gliedrige. Diese kürzeren Diagonalen stehen senkrecht auf einer 2fach 2gliedrigen Axe und werden dadurch begrenzt, dafs 2 nachbarliche 2fach 2gliedrige Strahlen sie abschneiden, so dafs also das Verhältnifs der 2fach 3gliedrigen zur 2fach 2gliedrigen Axe hier eben so ist, wie beim Würfel, d. h. $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Daraus geht hervor, dafs, wenn die 2fach 4gliedrige Axe $= 1$ ist, auch die 2fach 2gliedrige $= \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und die 2fach 3gliedrige $= \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$ seyn mufs.

c) Die 2fach 3gliedrigen Hauptschnitte sind regelmäfsige Sechsecke, in denen die 2fach 2gliedrigen Axen als Durchmesser liegen, welche senkrecht auf die Seiten sind.

4) Der 6×4*wandige Keilflächner*, 6×4flächner (*Hexacistetraedrum isosceloideum*, Pyramidenwürfel, Hexakistetraeder, Tetrakishexaeder, Hexatetraeder, Würfel, der auf jeder seiner Flächen eine niedrige 4seitige Pyramide trägt, Würfel mit 4seitig trichterförmigen Vertiefungen auf seinen Flächen, hexaedrisches Trigonal, Ikositetraeder, hexaedrisch pyramidales Ikositessaraeder u. s. w.) hat 24 |≌| Flächen v, die, falls die 1fache Gestalt eine endlich begrenzte ist, worauf es hier zunächst ankommt, auf 2fach 1gliedrigen 4- und 2ständigen Strahlen senkrecht stehen, mithin 2fach 1gliedrige Flächen und zwar 2- und 1seitige d. h. gleichschenklige Dreiecke oder Keilflächen sind. Je 4 solche Flächen liegen also dem Ende eines 2fach 4gliedrigen Strahles zunächst. 12 Kanten dieses Körpers sind 3- und 3ständige |≌| 2fach 2glie- Fig. 289.

drige Kanten r, die auf 2fach 2gliedrigen Strahlen senkrecht stehen. Die 24 übrigen Kanten l sind 4- und 3ständige |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitige ungleichendige Kanten. Ihr eines Ende trifft in eine der 6 |≌| 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w der Gestalt, während ihr anderes in einer der 8 |≌| 2×3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken o liegt. Das Verhältnifs der 3gliedrigen zur 2gliedrigen Axe ist wie im Würfel; die 4gliedrige Axe aber ist veränderlich und von dieser Veränderlichkeit hängt die verschiedene Beschaffenheit der 6×4wandigen Keilflächner ab.

5) Der 8×3*wandige Keilflächner* oder 8.3flächner (*Octacistriedrum isosceloideum*, Triakisoktaeder, Pyramidenoktaeder, oktaedrisches Trigonal, Ikositetraeder, oktaedrisch pyramidales Ikositessaraeder, Pyramiden8flach, Oktaeder, das auf jeder Flä-
Fig. 290. che eine 3seitige Pyramide trägt[1], u. s. w.) hat 24 |≌| Flächen d, die auf 2fach 1gliedrigen 3- und 2ständigen Strahlen senkrecht stehen und Keilflächen oder gleichschenklige Dreiecke sind. Je 3 dieser Flächen liegen dem Ende eines 2fach 3gliedrigen Strahles zunächst. 12 Kanten des Körpers sind 4- und 4ständige |≌| 2fach 2gliedrige Kanten r, die 24 übrigen Kanten l sind 4- und 3ständige |≌| 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendige; das eine Ende jeder solchen Kante trifft in eine der 6 |≌| 2×4-kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w, das andere in eine der 8 |≌| 3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken o. Das Verhältnifs der 4gliedrigen Axe zur 2gliedrigen ist wie im 8flächner, aber die 3gliedrigen Axen sind veränderlich, und hierdurch werden die möglichen Arten der 8×3flächner bedingt.

6) Der 24*wandige Lanzenflächner* (*Icositetraedrum doroideum*, Leucitoeder, L e u c i t o i d e, Leucite, Trapezoeder, 2kantige Tetragonal-Ikositetraeder, trapezoidale Ikositessarae-
Fig. 291. der) hat 24 |≌| Flächen l, die auf 2fach 1gliedrige 4- und 3ständige Strahlen senkrecht und lanzenförmige Vierecke sind. Die 24 |≌| 4- und 2ständigen 2fach 1gliedrigen Kanten v sowohl als die 24 |≌| 3- und 2ständigen d sind 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendige Kanten. In jeder der 6 |≌| 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w treffen vier der 4- und 2ständigen

1 Auch solche Gestalten, welche statt der Pyramide eine 3flächige trichterartige Vertiefung tragen (wie sie z. B. manche unvollkommen ausgebildete Krystalle von Eisenkies zeigen), können die Form von 8×3wandigen Keilflächnern haben.

Kanten zusammen. In jeder der 8 |≌| 3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken o sind vereinigt drei der 3- und 2ständigen Kanten. In jeder der 12 |≌| 2×2kantigen 2fach 2gliedrigen Ecken r sind verbunden 2 Kanten der einen und 2 Kanten der andern Art. In den verschiedenen 24wandigen Lanzenflächnern ist das Verhältnifs der 4gliedrigen Axe zu der 3gliedrigen veränderlich und bedingt die verschiedenen Arten.

7) Die 48*wandigen Dreieckflächner*, 48*flächner* (*Tetracontaoctaedrum trigonoideum*, Hexakisoktaeder oder 6 × 8-flächner, Pyramiden-Granatoeder, Tetrakontaoktaeder, Trigonalpolyeder, Pyramidenrauten12flach, 2 × 24flächner) haben Fig.
2×24 Flächen e, die 24 einen ≌ zu einander, aber |=| zu 292.
den 24 andern, die unter sich ≌ sind. Sie sind 1fach 1gliedrige Flächen und zwar unregelmäfsige Dreiecke. Es befinden sich an ihnen dreierlei Arten von Kanten, von jeder Art 24. Jede Kante ist 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig, die einen l 4- und 3ständig, die andern v 4- und 2ständig, die dritten d 3- und 2ständig. In jeder der 6 |≌| 2mal 4kantigen 2fach 4gliedrigen Ecken w sind vereinigt 4 der 4- und 3ständigen und 4 der 4- und 2ständigen Kanten. In jeder der 8 |≌| 2mal 3kantigen 2fach 3gliedrigen Ecken o treffen 3 der 4- und 3ständigen und 3 der 3- und 2ständigen Kanten zusammen. In jeder der 12 |≌| 2mal 2kantigen 2fach 2gliedrigen Ecken r aber sind 2 der 4- und 2ständigen mit 2 der 3- und 2ständigen Kanten verbunden.

B. *Die 1fach 3gliedrig 8strahligen Gestalten.*

Die Gestalten dieses Systems sind, den 48wandigen Dreieckflächner ausgenommen, welcher hier nicht als 1fache Gestalt auftritt und statt dessen der 24wandige Fünfeckflächner betrachtet werden mufs, dieselben, wie in dem 8strahligen Gestaltensysteme, nämlich der Würfel, der 8flächner, der 12-Rautenflächner, der 6×4flächner, der 8 × 3flächner und der 24wandige Lanzenflächner. Aber diejenigen Theile dieser Gestalten, welche 2fach 4-, 3-, 2- oder 1gliedrig waren, haben hier blofs die Bedeutung von 1*fach* 4-, 3-, 2- oder 1gliedrigen solchen Theilen erhalten, welche Bedeutung sich ausspricht, wenn die Flächen von einer oder mehreren derselben in Verbindung treten mit einem 24wandigen Fünfeckflächner, der hier diejenige Gestalt ist, welche nicht nur dem gegebenen Strahlensysteme entspricht,

sondern welche auch den Charakter des fraglichen Strahlensystems selbst ausdrückt.

Fig. 293 a. b. Der *24wandige Fünfeckflächner* (*Icositetraedrum pentagonoideum,* Pentagon-Ikositetraeder) hat 24 ≌ 1fach 1gliedrige Flächen e, im Allgemeinen Fünfecke, in denen die Seiten von dreierlei Länge sind, 2 sich schneidende der einen, 2 andere sich gleichfalls schneidende der andern und die 5te Seite der 3ten Art entsprechend. Die 24 ≌ 4ständigen Kanten v sowohl als die 24 ≌ 3ständigen d sind 1fach 1gliedrige Kanten; die 12 übrigen Kanten r sind 1fach 2gliedrige. In jeder der 6 ≌ 4kantigen 1fach 4gliedrigen Ecken w sind 4 Kanten der ersten Art, in jeder der 8 ≌ 3kantigen 1fach 3gliedrigen Ecken o sind 3 Kanten der 2ten Art und in jeder der 24 ≌ 3 × 1kantigen 1fach 1gliedrigen Ecken i sind Kanten aller 3 Arten vereinigt. Der 24wandige Fünfeckflächner ist seinem Gegenbilde nicht ebenbildlich. Werden von den Wänden des 48wandigen Dreieckflächners im 2fach 3gliedrigen 8strahligen Systeme die 24 einen unter sich ≌ so weit verlängert, bis sie sich schneiden und einen Körper für sich allein ringsum begrenzen, so entsteht ein 24wandiger Fünfeckflächner, der zu dem, welcher durch Verlängerung der 24 andern unter sich ebenbildlichen Wände entsteht, sich gegenbildlich verhält. Wenn a ein rechter 24wandiger Fünfeckflächner genannt wird, so ist b ein linker.

C. *Die 2 × 4strahligen Gestalten* (*Ditetrarcta*).

Von den Gestalten des 8strahligen Systems kommen hier als 1fache Gestalten vor der Würfel, der 8flächner, der 12-Rautenflächner, der 8×3wandige Keilflächner, der 24-Lanzenflächner. Diejenigen ihrer Theile aber, welche 2fach 4gliedrig waren, haben hier die Bedeutung 2fach 2gliedriger; diejenigen, welche 2fach 3gliedrig waren, sind 1fach 3gliedrig geworden, und diejenigen, welche 2fach 2gliedrig waren, sind hier 2fach 1gliedrig. Diejenigen 2fach 1gliedrigen Theile, welche 4- und 3ständig oder 2- und 3ständig waren, sind 1fach 1gliedrig geworden, und nur jene, welche 4- und 2ständig waren, sind 2fach 1gliedrig geblieben. Als eigenthümliche Gestalten aber treten auf statt der 6×4wandigen Keilflächner die 12-Sterzenflächner und statt der 48wandigen Dreieckflächner die 24wandigen Viereckflächner.

Der 12-*Sterzenflächner* (*Dodecaedrum uroideum,* Pentagon-Dodekaeder, hexaedrisches Pentagon-Dodekaeder, dach-

förmiges Dodekaeder, Kieszwölfflach, Pyritoeder) hat 12 |≌| Flä- Fig. 294 a. b.
chen v, welche 2fach 1gliedrige Figuren und zwar Sterzenflächen sind, bei denen das eine Paar gleichwerthiger Seiten dem andern Paare gleichwerthiger Seiten an Länge gleich ist. Die Kanten sind von zweierlei Art. Die 6 einen w sind |≌| 2fach 2gliedrig, die 24 andern d sind 1fach 1gliedrige Kanten. Die 12 einen, die unter sich ≌ sind, verhalten sich zu den 12 andern gegenbildlich. Er hat ferner 12 |≌| 2fach 1gliedrige 2- und 1kantige Ecken g und 8 dergleichen o, welche 1fach 3gliedrige 3kantige sind. Die 4 einen von diesen 8 Ecken, welche ≌ sind, verhalten sich zu den 4 andern |=|. Denkt man sich einen 6×4wandigen Keilflächner als eine 2×4strahlige Gestalt und verlängert 12 dieser Voraussetzung gemäfs als gleichwerthig zu betrachtende Flächen desselben so weit, bis sie einen Körper für sich allein begrenzen, so entsteht ein 12-Sterzenflächner, der von dem, welcher durch die Verlängerung der 12 andern Flächen hervorgeht, sich blofs durch die Stellung unterscheidet. Man hat daher 12-Sterzenflächner der ersten a und solche der 2ten Stellung b.

Der 24*wandige Viereckflächner* (*Icositetraedrum tetragonoideum*, Dyakisdodekaeder, gebrochenes Pentagon-Dodekaeder, 3kantiges Tetragonal-Ikositetraeder, heterogonales Ikositessaraeder, Kies24flach) hat 24 Flächen e, welche 1fach 1glie- Fig. 295
drige 4ecke mit Seiten von 3erlei Länge sind, in denen 2 a. b.
gleiche Seiten als Schenkel für einen Winkel dienen. 12 dieser Flächen sind unter sich ≌ und verhalten sich zu den 12 andern |=|. 12 Kanten einer Art v und eben so viel einer 2ten Art f sind |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten. Beide Arten von Kanten unterscheiden sich an Gröfse und Länge. Die 24 übrigen Kanten d sind 1fach 1gliedrig. Die 12 einen sind unter sich ≌ und verhalten sich zu den 12 andern |=|. Die Ecken sind dreierlei; 6 derselben sind |≌| 2fach 2gliedrige 2×2kantige w, 8 andere sind 1fach 3gliedrig 3kantige o. Von diesen verhalten sich die 4 einen, die unter sich ≌ sind, zu den 4 andern als |=|. Die 12 Ecken φ der 3ten Art sind |≌| 2fach 1gliedrige 2- und 2einkantige. Denkt man sich einen 48flächner als eine 2×4strahlige Gestalt und verlängert 24 von seinen Flächen, die dieser Annahme gemäfs als gleichwerthig betrachtet werden müssen, so weit, bis sie einen Körper allein begrenzen, so ist dieser ein 24wandiger 4eckflächner, welcher

von dem, der durch die Verlängerung der 24 andern Flächen entsteht, nur durch die Stellung verschieden ist, so dafs beide als 24wandige 4eckflächner 1ster und 2ter Stellung betrachtet werden können. a stellt einen solchen der 1sten, b einen der 2ten Stellung dar.

D. *Die 4strahligen Gestalten, Tetrarcta.*

1) Auch hier kommt der Würfel als 1fache Gestalt vor, aber seine Flächen, so wie auch die auf ihnen senkrechten Strahlen haben die Bedeutung der 2fach 2gliedrigen erhalten. Seine Flächen sind hier nur rechtwinklige Rauten. Von seinen Ecken sind nur je 4 solche gleichwerthig, die durch Flächendiagonalen verbunden werden können. Je 2, den Enden einer Eckenaxe entsprechende, Ecken sind ungleichwerthig. Seine 12 Kanten sind |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten geworden.

2) Der *Vierflächner* (*Tetraedrum*, 1fache 3seitige Pyramide,
Fig. 296 reguläres Tetraeder, Tetraeder) hat 4 |≌| 2fach 3gliedrige Flä-
a. b. chen o, welche regelmäfsige 3seitige Figuren sind; 6 |≌| 2fach 2gliedrige Kanten w, 4 |≌| 2fach 3gliedrige 3kantige Ecken Ⓒ. Neigung der Flächen = 70° 21′ 44″.

Die Flächen dieses Körpers sind entweder senkrecht auf den 2fach 3gliedrigen Strahlen der ersten oder auf denen der 2ten Art; daher unterscheidet man einen 4flächner der ersten und einen solchen der 2ten Stellung; beide verhalten sich zu einander |≌|, wenn sie von gleicher Gröfse sind, sind aber darum in Beziehung zu dem 4strahligen Axensysteme nicht als gleichwerthig zu betrachten. Denkt man sich, es hätten die 2fach 3gliedrigen Axen des 8flächners die Bedeutung der 4 ungleichendigen 2fach 3gliedrigen Axen im 4strahligen Systeme und zerlegt man sonach jede solche Axe in 2 ungleichwerthige entgegengesetzte 2fach 3gliedrige Strahlen und verlängert diejenigen 4 Flächen des Körpers, welche den 4 gleichwerthigen Strahlen der einen Art entsprechen, so weit, bis durch sie allein ein Raum ringsum begrenzt ist, so entsteht ein 4flächner der ersten Stellung a, während durch eben solche Verlängerung der 4 andern Flächen ein 4flächner der 2ten Stellung b hervorgeht.

3) Der 12-*Rautenflächner*. Er verhält sich im 4strahligen Systeme blofs als eine besondere Art der folgenden Gestalten.

4) Der 12*wandige Lanzenflächner* oder der 12-*Lanzenflächner* (*Dodecaedrum doroideum*, Trapezdodekaeder, Trape-

zoid-Dodekaeder, trapezoidales Dodekaeder, 2kantiges Tetragonal-Dodekaeder) hat 12 |≘| 2fach 1gliedrige und zwar lanzenförmige Flächen l, welche auf 3- und 3ständige Strahlen senkrecht sind; 2 Arten von Kanten v und k, von jeder Art 12. Jede Kante ist 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig. Die von einerlei Art |≘|. Sie sind unterschieden von einander an Länge und Neigung der sie bildenden Flächen. Er hat ferner 4 |≘| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken der ersten Art o und eben so viel der 2ten Art Φ. In der einen sind blofs Kanten der ersten, in der andern Kanten der 2ten Art vereinigt; 6 |≘| 2×2kantige 2fach 2gliedrige Ecken w, in jeder 2 Kanten der einen und 2 Kanten der andern Art verbunden. Man unterscheidet die Lanzenflächner der ersten und die der 2ten Stellung a und b. Die Kanten der ersten Art des einen haben gleiche Beschaffenheit mit denen der 2ten Art der andern; dasselbe gilt von den 3kantigen Ecken. Als Gestalten an sich betrachtet sind beide, wenn sie gleich sind, auch |≘| und nur die Stellung in Beziehung zum Strahlensysteme bedingt den Unterschied. Fig. 297 a. b.

Zwischen dem 12-Lanzenflächner der ersten und denen der 2ten Stellung in der Mitte stehend ist derjenige 12-Lanzenflächner, bei welchem die Kanten beider Arten an Länge und Gröfse einander gleich sind und nur an Werth in Beziehung zum Strahlensysteme sich unterscheiden, nämlich der 12-Rautenflächner.

Wenn ein 8×3wandiger Keilflächner als eine 4strahlige Gestalt betrachtet wird, die 12 einen seiner Flächen, welche dieser Annahme gemäfs gleichwerthig sind, so weit verlängert werden, bis sie einen Körper für sich allein begrenzen, so ist dieser Körper ein 12wandiger Lanzenflächner der einen Stellung, während der durch die Verlängerung der 12 andern entstehende Körper ein 12-Lanzenflächner der andern Stellung ist.

5) Die 4×3*wandigen Keilflächner* oder 4×3-*Keilflächner* (*Tetracistriedrum isosceloideum,* Pyramiden-Tetraeder, Viermaldreiflächner, Trigondodekaeder, Trigonal-Dodekaeder, pyramidales Dodekaeder) hat 12 |≘| 2fach 1gliedrige 2- und 1seitige Flächen d. h. Keilflächen d, 6 |≘| 2fach 2gliedrige Kanten w und 12 |≘| 2fach 1gliedrige 3- und 3ständige Kanten l, 4 |≘| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken o und 4 |≘| 2mal 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken Φ. Werden am 24-Lanzenflächner 12 sich in Beziehung auf ein in ihm gedachtes 4strahliges Axen- Fig. 298 a. b.

system als gleichwerthig verhaltende Flächen desselben verlängert, bis zum Verschwinden der 12 übrigen, so entsteht ein 4×3wandiger Keilflächner der einen Stellung a, während ebenso die 12 andern Flächen jenes Körpers einen 4×3wandigen Keilflächner der 2ten Stellung b bilden.

6) Die 6×4*wandigen Keilflächner* haben hier blofs die Bedeutung der folgenden Art.

7) Die 24*wandigen Dreieckflächner* oder 24-*Dreieckflächner* (*Icositetraedrum trigonoideum*, Hexakistetraeder, gebrochenes Pyramiden-Tetraeder, tetraedrisches Trigonal-Ikositetraeder, skalenisches Ikositessaraeder) haben 24 Flächen e, von
Fig. 299 a. b. denen die 12 einen, die unter sich ≌ sind, zu den 12 andern sich |=| verhalten. Sie sind 1fach 1gliedrige Dreiecke. An ihnen sind ferner dreierlei Arten von Kanten, von jeder Art 12; die von einerlei Art |≌| 2fach 1gliedrig gleichseitig ungleichendig. Die einen sind 3- und 3ständige l, die beiden andern v und k aber sind 3- und 2ständig und unterscheiden sich im Allgemeinen durch Lage, Länge und Gröfse. Sie haben 4 |≌| 2×3kantige 2fach 3gliedrige Ecken der ersten Art o, in deren jeder 3 der 3- und 3ständigen Kanten mit 3 der 3- und 2ständigen der ersten Art verbunden sind; 4 eben solche Ecken einer 2ten Art ⌽, in jeder sind 3 der 3- und 3ständigen Kanten mit 3 der 3- und 2ständigen Kanten der andern Art verbunden; 6 |≌| 2×2kantige 2fach 2gliedrige Ecken w, deren jede 2 der 3- und 2ständigen Kanten erster und 2 dergleichen der 2ten Art enthält.

Wird der 48wandige Dreieckflächner als eine 4strahlige Gestalt betrachtet und werden die 24 einen Flächen desselben, welche dieser Voraussetzung nach gleichwerthig sind, verlängert, so dafs sie den Raum allein umschliefsen, so bilden sie einen 24wandigen Dreieckflächner der ersten Stellung a, während auf ähnliche Weise die 24 andern Flächen jenes Körpers einen 24wandigen Dreieckflächner der 2ten Stellung b begrenzen. Denkt man sich einen 24wandigen Dreieckflächner in der Art sich verändernd, dafs nach und nach die beiden Arten von 2×3kantigen Ecken desselben einander gleich werden, so wird er zu einem 6×4*wandigen Keilflächner*. Schreitet diese Veränderung noch weiter fort, so erreicht er die Eigenschaft eines 24wandigen Dreieckflächners der 2ten Stellung, wenn er vorher ein solcher der ersten war.

E. *Die 1fach 3gliedrigen 4strahligen Gestalten.*

Sämmtliche Gestalten des 2fach 3gliedrig 4strahligen Systems, mit Ausnahme des 24wandigen Dreieckflächners und des 6×4wandigen Keilflächners, lassen sich auch als einfache Gestalten in Beziehung auf ein 1fach 3gliedriges 4strahliges Axensystem denken. Diejenigen Theile aber, welche 2fach 3-, 2- oder 1gliedrig waren, haben hier bloſs die Bedeutung von 1fach 3-, 2- oder 1gliedrigen erhalten. So also treten auch hier auf: der Würfel, der 4flächner, der 12-Rautenflächner, die 12-Lanzenflächner, die 4×3wandigen Keilflächner.

Der 24wandige Dreieckflächner aber, wenn er als eine 1fach 3gliedrige 4strahlige Gestalt betrachtet werden soll, ist eine zusammengesetzte Gestalt; denn werden dem 1fach 3gliedrig 4strahligen Axensysteme gemäſs 12 ebenbildliche Flächen desselben so weit verlängert, daſs sie den Raum allein umschlieſsen, so entsteht ein 12*wandiger Fünfeckflächner*, 12-*Fünfeckflächner* (*Dodecaedrum pentagonoideum*, tetraedrisches Pentagonal-Dodekaeder), das zu dem, welches durch Verlängerung der 12 andern Flächen des Körpers entsteht, sich |=| verhält. Die Fig.
12 Flächen e eines solchen Körpers sind ≌ 1fach 1gliedrige 300 a, b,
Fünfecke. Jede hat 2 Seiten von einer, 2 von einer andern und c, d.
eine von einer 3ten Länge; 6 Kanten w des Körpers sind ≌ 1fach 2gliedrig, die 24 übrigen Kanten sind 1fach 1gliedrig und von zweierlei Art. Beide Arten d und δ sind verschieden an Länge, Gröſse und Lage. Der Körper hat 4 ≌ 3kantige 1fach 3gliedrige Ecken der einen Art o, ebensoviel einer 2ten Art Φ und auſserdem 12 ≌ 3×1kantige 1fach 1gliedrige Ecken i. Aus dem 48wandigen Dreieckflächner lassen sich durch Verlängerung von je 12 zusammengehörigen Flächen desselben 4 solche 12wandige Fünfeckflächner erzeugen. Zwei davon sind ≌, aber zu den übrigen |=|. Die 2 einen a und c oder b und d, welche einander ≌ sind, sind nur an Stellung verschieden. Gleichwie aus dem 24wandigen Dreieckflächner 2 ≌ 12wandige Fünfeckflächner gebildet wurden, so entstehen auf ähnliche Weise aus einem 6×4wandigen Keilflächner zwei 12*wandige Sterzenflächner*, bei denen, wenn sie als 1fach 3gliedrige 4strahlige Gestalten auftreten, die 2fach 2gliedrigen Kanten als 1fach 2gliedrige, die 2fach 1gliedrigen Flächen als 1fach 1gliedrige, die sich |=| verhaltenden 3kantigen Ecken als verschiedenwer-

thige und die 2fach 1gliedrigen Ecken als bloſse 1fach 1gliedrige zu betrachten sind.

II. Die 3gliedrig 10axigen Gestalten.

A. *Die 20strahligen Gestalten*, *Icosiarcta*.

Fig. 301. 1) Der *Zwölfflächner* (*Dodecaedrum*, regelmäſsiges Pentogondodekaeder). Bei ihm bilden 12 |≌| 2fach 5gliedrige 5seitige Flächen regelmäſsige Fünfecke; er hat 30 |≌| 2fach 2gliedrige Kanten; 20 |≌| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken. Gröſse der Kanten 116° 33′ 54″.

Fig. 302. 2) Der *Zwanzigflächner* (*Icosaedrum*) hat 20 |≌| 2fach 3gliedrige 3seitige Flächen; 30 |≌| 2fach 2gliedrige Kanten; 12 |≌| 5kantige 2fach 5gliedrige Ecken. Gröſse der Kanten 138° 11′ 22″, 8.

Fig. 303. 3) Der 30-*Rautenflächner* (*Triacontaedrum*, regelmäſsiges Triakontaeder) hat 30 |≌| 2fach 2gliedrige und zwar rautenförmige Flächen mit ebenen Winkeln von 116° 33′ 54″; 60 |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitige ungleichendige Kanten; 12 |≌| 5kantige 2fach 5gliedrige und 20 |≌| 3kantige 2fach 3gliedrige Ecken. Gröſse der Kanten 144°.

Fig. 304. 4) Der 12 × 5*wandige Keilflächner* (*Dodecacispentaedrum*, Pyramidendodekaeder (zum Theil)) hat 60 |≌| 2fach 1gliedrige Keilflächen; 30 |≌| 2fach 2gliedrige Kanten von der Lage der Kanten des 12flächners; 60 |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten, welche 5- und 3ständige Kanten sind; 12 |≌| 5kantige 2fach 5gliedrige Ecken und 20 |≌| 2fach 3gliedrige 2 × 3kantige Ecken.

Fig. 305. 5) Der 20 × 3*wandige Keilflächner* (*Icosacistriedrum isosceloideum*, Pyramiden-Ikosaeder) hat 60 |≌| 2fach 1gliedrige Keilflächen; 30 |≌| 2fach 2gliedrige Kanten, an Lage mit denen des 20flächners übereinstimmend; 60 |≌| 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige 3- und 5ständige Kanten; 12 |≌| 2fach 5gliedrige 2 × 5kantige und 20 |≌| 2fach 3gliedrige 3kantige Ecken.

Fig. 306. 6) 60-*Lanzenflächner* (*Hexecontaedrum doroideum*) hat 60 |≌| 2fach 1gliedrige lanzenförmige Flächen; 60 |≌| 2fach 1gliedrige 5- und 2ständige und ebensoviel solche 3- und 2ständige Kanten; 12 |≌| 2fach 5gliedrige 5kantige, 20 |≌| 2fach

3gliedrige 3kantige und 30 |≌| 2fach 2gliedrige 2 ⨯ 2kantige Ecken.

7) Der *120wandige Dreieckflächner (Hecatonicosaedrum trigonoideum)* hat 120 Flächen, welche 1fach 1gliedrige Drei- Fig. 307.
ecke sind. Die 60 einen unter sich ≌ verhalten sich zu den 60 andern unter sich ≌ als deren Gegenbilder. Die Kanten sind von 3erlei Art, alle aber sind 2fach 1gliedrige gleichseitig ungleichendige Kanten, die 60 einer jeden Art angehörigen einander |≌|. Die einen sind 5- und 3ständig, die andern 5- und 2ständig und die dritten sind 3- und 2ständig. 12 Ecken desselben sind |≌| 2fach 5gliedrig 2⨯5kantig, 20 andere Ecken sind |≌| 2fach 3gliedrig 2⨯3kantig; die 30 übrigen Ecken aber sind |≌| 2fach 2gliedrig 2⨯2kantig.

B. *1fach 3gliedrige 20strahlige Gestalten.*

Der 12flächner, der 20flächner, der 30-Rautenflächner, der 12⨯5wandige Keilflächner, der 20 ⨯ 3wandige Keilflächner und der 60-Lanzenflächner sind auch als 1fach 3gliedrige 20-strahlige Gestalten zu betrachten; aber diejenigen ihrer Theile, welche 2fach 5-, 3-, 2- oder 1gliedrig waren, sind hier bloſs 1fach 5-, 3-, 2- oder 1gliedrig. Eine eigenthümliche Gestalten-Art aber in dem 1fach 3gliedrigen 20strahligen Systeme entsteht, wenn man den 120wandigen Dreieckflächner als eine dem fraglichen Strahlensysteme entsprechende Gestalt betrachtet und 60 ≌ Flächen desselben so weit verlängert, bis sie einen Körper allein umschlieſsen, dessen Gegenbild durch die Verlängerung der 60 andern unter sich ≌ Flächen des 120wandigen Dreieckflächners entstehen würde. Die so entstehenden Gestalten sind:

Der *60wandige 5eckflächner (Hexecontaedrum pentagonoideum).* Dieser hat 60 ≌ 1fach 1gliedrige 5eckige Flächen e, jede mit 2 Seiten einer, 2 Seiten einer andern und 1 Seite von dritter Länge, je 2 gleich lange Seiten einen der Winkel einschlieſsend. Die Kanten sind von dreierlei Art. Die 60 einen sind 5ständige 1fach 1gliedrige v, die 60 andern δ sind 3ständige 1fach 1gliedrige, die übrigen 30 Kanten r sind 1fach 2gliedrige, die 12 Ecken d sind 1fach 5gliedrige 5kantige, die 20 Ecken i sind 1fach 3gliedrige 3kantige und die 60 Ecken y sind 1fach 1gliedrige 3⨯1kantige. Die Theile einer Art sind alle einander ebenbildlich gleich.

Eben so wie es zwei einander gleiche und ähnliche sich gegenbildlich verhaltende 24wandige Fünfeckflächner gab, einen

Fig. 308. rechten und einen linken, hat man auch zwei solche 60wandige Fünfeckflächner [1].

Bezeichnung der einfachen hauptaxigen Gestalten.

Wenn man von einer Gestalt blofs angiebt, sie sey z. B. eine gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige und sey ein 2×12-flächiger Ebenrandner, so ist dadurch die Beschaffenheit ihrer Form noch keineswegs vollständig bestimmt; denn bei gleicher Beschaffenheit und Gröfse des mittleren Querschnittes kann die Gröfse der Hauptstrahlen verschieden seyn zwischen 0 und ∞, und nur dieses sind die Grenzen, wo die Gestalt aufhört ein 2×12flächiger Ebenrandner zu seyn, auch können bei unveränderten 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 1ster Art die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 2ter Art verschieden seyn zwischen 0 und ∞ und die Gestalt bleibt immer noch ein 2×12flächiger Ebenrandner. Es ist also eine bestimmte Angabe nöthig, aus welcher die Gröfse des Hauptstrahles, des 2fach 2gliedrigen Querstrahles 2ter Art erkannt werden kann, wenn die Gestalt eine vollständig bestimmte seyn soll. Die Aufgabe, aus der hinreichenden Anzahl gegebener Stücke einen solchen 2×12flächigen Ebenrandner zu bestimmen, kann auf sehr verschiedene Weise gestellt werden. Ist aber der Zweck vorhanden, den die Aufgabe Lösenden möglichst schnell ein deutliches bestimmtes Bild gewinnen zu lassen von der Gestalt, die er sich denken oder in seinem Geiste gleichsam wieder erschaffen soll, so leidet es wohl keinen Zweifel, dafs die unmittelbare Angabe der Gröfse der 3 wichtigsten Strahlenarten hierzu am meisten geeignet ist.

Ein *Zeichen*, bestehend aus einer Zusammenstellung dreier Gröfsen, deren eine die Gröfse des Hauptstrahls, die andere die Gröfse des 2fach 2gliedrigen Querstrahls 1ster Art und die 3te

1 Die Abbildung dieser Gestalt ist die 2gliedrige Projection einer solchen, während die des 120wandigen Dreieckflächners und der meisten übrigen Gestalten 1fach 1gliedrige Projectionen sind, bei denen die hintere dem Beschauer nicht zugekehrte Seite durch punctirte Linien gleichfalls abgebildet ist, während diese hier weggelassen sind. Würde eine 5gliedrige Axe senkrecht auf die Ebene der Zeichnung angenommen worden seyn, so hätte man die 5gliedrige Projection erhalten u. s. w.

jene des 2fach 2gliedrigen Querstrahls 2ter Art ist, in einer gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen 1fachen Gestalt, dient daher besser, als eine noch so ausführliche Beschreibung oder etwaige besondere Benennung derselben, um sie von jeder andern gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen Gestalt zu unterscheiden.

Berücksichtigt man, dafs die Strahlen nichts anderes sind, als Linien, deren je zwei zusammen in einer und derselben Axe, nur in entgegengesetzter Richtung, liegen, so ist einleuchtend, dafs für die als Beispiel gewählte gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige Gestalt und für jede gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige überhaupt, deren p eine gerade Zahl ist, die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen 1ster Art in 2fach 2gliedrigen Queraxen 1ster und jene Querstrahlen 2ter Art in eben solchen Queraxen 2ter Art liegen, mithin die beiden wichtigsten Arten von Queraxen bei der Bezeichnung zum Grunde liegen, wenn die beiden wichtigsten Arten von Querstrahlen im Zeichen enthalten sind. Bei gleichstellig 2endigen 2fach 3gliedrigen und überhaupt bei solchen gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten, deren p eine ungerade Zahl ist, liegt jeder 2fach 2gliedrige Querstrahl 2ter Art mit einem 2fach 2gliedrigen Querstrahle 1ster Art in einer 2fach 2gliedrigen ungleichendigen Queraxe. Eine Bezeichnung, welche sich hier auf die beiden wichtigsten Queraxenarten mit beziehen soll, mufs also enthalten: einen der beiden ungleichen Strahlen einer ungleichendigen 2fach 2gliedrigen Queraxe und einen solchen Strahl, der in einer gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Queraxe liegt, während die Bestimmung, welche sich auf die beiden wichtigsten Querstrahlenarten bezieht, einen 2fach 2gliedrigen Querstrahl erster und einen solchen zweiter Art enthält.

Die nachbarlichen Querstrahlen 1ster und 2ter Art R und r in irgend einem 2fach pgliedrigen Systeme bilden mit einander einen Winkel $= \frac{360^\circ}{2p}$. Der Strahl, welcher diesen Winkel halbirt, heifse ϱ, der Winkel $\frac{360^\circ}{4p}$ sey $= \psi$ und Cos. $2\psi = q$.

$$1)\ \varrho = \frac{2\,R\,r.\,\mathrm{Cos.}\,\psi}{R+r} = \frac{R.\,r\,\sqrt{2(q+1)}}{R+r}.$$

$$2)\ r = \frac{\varrho\,.\,R}{2R.\,\mathrm{Cos.}\,\psi - \varrho} = \frac{\varrho\,.\,R}{R\sqrt{2\,(q+1)} - \varrho}$$

$$3)\ R = \frac{\varrho \cdot r}{2r . \text{Cos.}\ \psi - \varrho} = \frac{\varrho \cdot r}{r \sqrt{2(q+1)} - \varrho}.$$

Aus der einen Bezeichnung läfst sich demnach die andere herleiten und umgekehrt.

Nur in dem Falle, wenn $p = 1$, also $\psi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ und $\text{Cos.}\ \psi = o$ wird, hat man $r = \frac{\varrho \cdot R}{-\varrho} = -R$,

also $$R + r = o$$

und $$\varrho = \frac{2R.r.o}{R+r} = \frac{2R.r.o}{o},$$

so dafs also r durch R und ϱ als $= - R$ bestimmt wird, während nicht umgekehrt ϱ durch R und r bestimmt werden kann.

Es mag hier genügen, blofs diejenige Bezeichnung und Bestimmung der Gestalten der verschiedenen hauptaxigen Systeme aufzustellen, bei welcher, aufser dem einen Strahle der Hauptaxe, Strahlen der beiden wichtigsten Arten von Queraxen für jede einfache Gestalt angegeben werden. Bei ihrer Anwendung wird das minder Regelmäfsige aus dem Regelmäfsigeren abgeleitet. Es ist daher mit den regelmäfsigsten hauptaxigen Gestaltensystemen, den gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen, deren p eine gerade Zahl ist, zu beginnen.

Fig. 309. Es seyen A, B, C Horizontalprojectionen von 2×4-, 2×8- und 2×12flächigen Ebenrandnern, welche als Beispiele von solchen $2 \times t$flächigen Ebenrandnern gewählt sind, bei denen t das Doppelte einer geraden Zahl p ist. Die 2fach 2gliedrigen Querstrahlen der 1sten Art mögen mit R, die der 2ten Art mit r bezeichnet werden, so dafs R oder r die Länge eines solchen Strahles angiebt. Die Länge der halben Hauptaxe, die auf jeder solchen Projection senkrecht im Mittelpuncte c aufstehend zu denken ist, sey $= a$. Es ist einleuchtend, dafs der $2 \times t$flächige Ebenrandner, in welchem der Hauptstrahl $= a$, der Querstrahl 1ster Art $= R$ und der Querstrahl 2ter Art $= r$ ist, ein solcher von bestimmter Form und Gröfse seyn wird, wenn a, R, r und t bestimmte bekannte Gröfsen sind. Von dem Verhältnisse a : R : r hängt die Beschaffenheit der Form der fraglichen Gestalt ab. Ist die Gröfse von a oder von R oder von r und aufserdem das Verhältnifs a : R : r bekannt, so ist auch Gröfse und Form der Gestalt bekannt, wenn, wie in der Folge stets vorausgesetzt wird, t bekannt ist.

Es sey c a′ ein Strahl a und c R′ ein Strahl R und c r′ ein zu c R′ nachbarlicher Strahl r, so wird das Dreieck a′ R′ r′ eine der Flächen des 2⋊tflächigen Ebenrandners darstellen, deren Lage durch die 3 in ihr gegebenen Puncte a′, R′ und r′ bestimmt ist.

Nennt man die am Mittelpuncte c entstehende Ecke, für welche die Bestimmungsstrahlen c a′, c R′, c r′ als Kantenlinien und die Ebenen a′ c r′, a′ c R′, R′ c r′ als die die Ecke bildenden Ebenen anzusehen sind, oder vielmehr den Raum, den diese 3 Ebenen begrenzen, eine Zelle (*cellula*), so kann man sagen: die Fläche a′ R′ r′ gehöre dieser Zelle an. Um einen und denselben 2fach 2gliedrigen Querstrahl herum liegen also 4 Zellen. Diese 4 Zellen bilden zusammengenommen einen Hauptaxenflügel, der von 2 ebenbildlichen doppelten Flügelflächen eingeschlossen ist. Es ist hier also bei hauptaxigen Gestalten jede Zelle ein *Flügelsviertel*. Bezeichnet man daher die Strahlen R und r mit Nummern I, II, III . . ., als R^{I}, R^{II}, R^{III} . . . r^{I}, r^{II}, Fig. 309. r^{III} . . . und auch den aufwärts gerichteten Hauptstrahl durch a^{I}, den abwärts gerichteten durch a^{II}, so kann durch das Zeichen (a^{I}, R^{I}, r^{I}) eine der Flächen des 2⋊tflächigen Ebenrandners besonders bezeichnet werden, während eine zweite durch (a^{I}, R^{II}, r^{I}), eine 3te durch (a^{I}, R^{II}, r^{II}) u. s. w. bezeichnet wird. Eben so hat man abwärts die Flächen (a^{II}, R^{I}, r^{I}), (a^{II}, R^{II}, r^{I}), (a^{II}, R^{II}, r^{II}) u. s. w. Es wird hierdurch also zugleich angegeben, in welchem Hauptaxenflügel und in welchem der 4 Viertel desselben, d. h. in welcher Zelle, die bezeichnete Fläche liegt. Das Zeichen a′ R′ r′ oder a′, R′, r′ (ohne Klammer) bedeutet daher eine bestimmte Zelle.

Es ergiebt sich wohl von selbst, daſs man, wenn kein besonderer Grund vorhanden ist, die gleichwerthigen Flächen einzeln aufzuzählen und zu betrachten, bei einer 2fach pgliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt mit Flächen von einerlei Art nur nöthig hat, die Fläche eines einzigen Flügelviertels anzugeben, indem die der übrigen Flügelviertel zugleich dadurch mit bedingt werden. Man setze daher vorerst fest, es sey das Flügelviertel, in welchem diese zu bestimmende Fläche liegt, das erste und die ihm angehörigen Strahlen a^{I}, R^{I} und r^{I}. Sollten Theile einer und derselben Ebene in verschiedenen Flügelvierteln der Hauptaxe als Begrenzungsflächen bei einer gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalt vorkommen, so ist jeder solcher Theil innerhalb

desjenigen Flügelviertels, in welchem er liegt, als eine besondere Begrenzungsfläche zu betrachten und als solche wird er auch im ersten Flügelviertel vorhanden seyn müssen und sich besonders bestimmen lassen in *diesem*.

Wenn in der Formel (a′, R′, r′) die Werthe von a′, R′ oder r′ sich ändern, so wird dadurch die Lage der Fläche (a′, R′, r′) in dem bestimmten Flügelviertel a′, R′, r′ der Hauptaxe, über welches hinaus sie als Begrenzungsfläche einer gleichartigflächigen 2fach pgliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt sich nicht erstreckt, verändert. Umgekehrt, wenn die Lage dieser Fläche in dem Flügelviertel, dem sie angehört, eine andere[1] wird, so ändern sich auch die Werthe für a′, R′, r′. Hat sich z. B. die Fläche
Fig. 310. a′ R′ r′ um die ruhig gebliebene Randkante R′ r′ als um eine in ihr liegende Umdrehungsaxe gedreht, so lange, bis sie auf dem mittleren Querschnitte c R′ r′ senkrecht steht, so dafs sie nun den Strahl a′ desjenigen Flügelviertels, dem sie angehört, nicht mehr schneidet, sondern ihm parallel liegt, so wird der Werth von a′ = ∞ und das ganze Zeichen (∞ a′, R′, r′). Die ganze Gestalt des 2✕tflächigen Ebenrandners wird dadurch zu einer 2✕pflächigen Säule; ihr Querschnitt wird gleich dem Mittelquerschnitte des Ebenrandners, aus dem sie hervorgegangen ist, und das Zeichen (∞, R, r) bezeichnet diese Säule. Dreht sich die fragliche Fläche a′ R′ r′ auf diese Art noch weiter fort, so wird sie mit dem Strahle a′ ihres Flügelviertels divergiren und nur ihre Verlängerung über die Randkante hinaus wird die Verlängerung des Strahles a′ über den Mittelpunct hinaus schneiden, so dafs hier also der Werth von a′ durch ∞ in das Negative übergeht. Die Fläche wäre dann zu bezeichnen durch ((— a′), R′, r′) und der ganze von solchen Flächen gebildete 2✕tflächige Schiefwandner[2] durch ((— a), R, r).

Läfst man die Fläche des Flügelviertels a′, R′, r′ sich noch weiter fort auf die angegebene Weise bewegen, so wird das

1 Eine ihre Lage verändernde Ebene, wenn sie durch mehr als ein Flügelviertel hindurch sich erstreckend gedacht wird, kann nach geschehener Lagenänderung in einem andern Flügelviertel so liegen, wie sie vorher im ersten lag.

2 Bei ihm ist jeder Schnitt, in welchem die Hauptaxe liegt, da
Fig. 311. p eine gerade Zahl ist, eine Figur wie k l m n, jeder Querschnitt ein 2fach pgliedriges tseit.

— a′ eine immer kleinere negative Gröfse und wird zuletzt $= -\frac{1}{\infty}$. Der Ausdruck $((-\frac{1}{\infty}a'), R', r')$ bedeutet daher Flächen, die in die Verlängerung des mittleren Querschnittes fallen, während der Ausdruck $(\frac{1}{\infty}a', R', r')$ Flächen anzeigt, die mit diesem Querschnitte selbst zusammenfallen [1].

Läfst man umgekehrt die Fläche a′R′r′ sich um eine, durch den Punct a′ gehend gedachte, mit R′r′ parallele Linie bewegen, so dafs zuerst die Strahlen cR′ und cr′ sich dabei vergröfsern, so wird bei Fortsetzung dieser Bewegung einmal a′R′r′ parallel mit cR′r′ werden müssen, und dann sind die Strahlen R′ und r′ unendlich, die Fläche a′R′r′ ist dann $= (a', \infty R', \infty r')$; das Zeichen (a, ∞, ∞) bedeutet daher in dem gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen und in jedem gleichendigen Gestaltensysteme die beiden Tafelflächen. Findet die Fortsetzung dieser Bewegung der Fläche a′R′r′ statt, so tritt der Fall ein, in welchem die über den Scheitel rückwärts hinausgehend gedachte Verlängerung dieser Fläche sich mit den, über den Mittelpunct des Strahlensystems rückwärts hinausgehend zu denkenden, Verlängerungen der Strahlen R′ und r′ schneidet. Ihr Zeichen erhält dann die Form $(a', (-R'), (-r'))$. Dem Zeichen $(a, (-R), (-r))$ entspricht ein 2×tflächiger Schiefwandner, dessen Mittelquerschnitt eine unendliche Ebene ist, während jeder Hauptschnitt, sofern p eine gerade Zahl ist, eine Figur wird wie m n k l [2]. Fig. 310. Fig. 312.

Durch das bis jetzt Entwickelte ist ersichtlich, welche Bedeutung das Vorhandenseyn von negativen Werthen für die Gröfse der Strahlen a′, R′, r′ in dem Zeichen, durch welches eine Begrenzungsfläche einer 2fach pgliedrigen gleichstellig 2endigen Gestalt mit gleichwerthigen Flächen bestimmt wird, hat. Auch

1 Um nicht positive und negative Nullen unterscheiden zu müssen, wird hier $\frac{1}{\infty}$ nicht $= 0$ gesetzt.

2 Für $p = 6$ und $R : r = 1 : \text{Cos.} \frac{360^\circ}{2p} = 1 : \sqrt{\frac{3}{4}}$ hat man einen hierher gehörigen Schiefwandner, wenn man an den 6flächigen Säulen mit 6flächig trichterartig vertieften Enden, wie sie z. B. beim Apatit vorkommen, von den Seitenflächen der Säule absieht. Vergl. Leonhard's Mineralog. Zeitschrift Jahrg. 1826. I. 439.

ergiebt sich, dafs der Strahl R′, um die allgemeinen Verschiedenheiten der Lage einer Begrenzungsfläche zu entwickeln, in folgenden Werthen betrachtet werden müsse:

1) als eine positive endliche Gröfse, die zu dem hier vorliegenden Zwecke $=1$ gesetzt werden kann;

2) als ∞;

3) als eine negative endliche Gröfse, die $=-1$ anzunehmen ist;

4) als eine negative unendlich kleine Gröfse $= -\frac{1}{\infty} R'$ $= -\frac{1}{\infty} R$;

5) als eine positive unendlich kleine Gröfse $= \frac{1}{\infty} R' = \frac{1}{\infty} R$, während auf ähnliche Weise die 5 Werthe, welche a′ haben kann, für jeden der 5 Werthe von R′ auszudrücken sind durch 1) a', 2) ∞, 3) $-a'$, 4) $-\frac{1}{\infty} a'$, 5) $\frac{1}{\infty} a'$; die Werthe aber, welche r′ haben kann für den Werth von $R' = 1$, haben nothwendig eine der folgenden 11 Formen:

$$-r,\ -\frac{1}{\infty}r,\ \frac{1}{\infty}r,\ q-v,\ q,\ q+x,\ 1,\ \frac{1}{q}-y,\ \frac{1}{q}+z,\ \infty,$$

wenn nämlich $q = \text{Cos.}\ \frac{360^0}{2p}$ und die Buchstaben v, x, y und z unbestimmte Gröfsen von solcher Beschaffenheit sind, dafs $q-v > \frac{1}{\infty} r$ und $< q$ und ebenso $q+x > q$ aber < 1, ferner $\frac{1}{q} - y > 1$ aber $< \frac{1}{q}$, und endlich $\frac{1}{q} + z > \frac{1}{q}$. Setzt man $q - v = \mathfrak{r}$ und $q + x = R$ und $\frac{1}{q} - y = \frac{1}{\mathfrak{R}}$, $\frac{1}{q} + z = \frac{1}{\mathfrak{r}}$, so hat man demnach für $R' = 1$ folgende Ausdrücke für R′, r′ zu beachten[1]:

$$1, -r \mid 1, -\frac{1}{\infty}r \mid 1, \frac{1}{\infty}r \mid 1, \mathfrak{r} \mid 1, q \mid 1, \mathfrak{R} \mid 1, 1 \mid 1, \frac{1}{\mathfrak{R}} \mid$$
$$1, \frac{1}{q} \mid 1, \frac{1}{\mathfrak{r}} \mid 1, \infty.$$

1 Als blofse Verhältnisse zweier Gröfsen sind diese Ausdrücke nicht zu betrachten, weil es hier zugleich noch ankommt auf das Verhältnifs R′ : a′ und r′ : a′ und auf die Gröfse von a′ oder R′ oder r′.

Daraus folgt, dafs für $R' = - 1$ als die vorzüglich wichtigen Arten des Ausdruckes R', r' anzusehen sind:

$$-1, r \mid -1, \frac{1}{\infty} r \mid -1, -\frac{1}{\infty} r \mid -1, -r \mid -1, -q \mid$$

$$-1, -\mathfrak{R} \mid -1, -1 \mid -1, -\frac{1}{\mathfrak{R}} \mid -1, -\frac{1}{q} \mid -1, -\frac{1}{r} \mid$$

$$-1, \infty.$$

Ist $R' = \infty$ oder $= \frac{1}{\infty} R$ oder $= -\frac{1}{\infty} R$, so kommt es zunächst darauf an, ob r' endlich und positiv oder endlich und negativ oder unendlich klein und positiv oder unendlich klein und negativ oder ob r' unendlich grofs ist, so dafs für jeden jener drei Werthe von R' die 5 Werthe für r' ausgedrückt werden können durch

$$-1 \mid -\frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} r \mid 1 \mid \infty$$

und also noch folgende Ausdrücke für R', r' entstehen:

$$\infty, -1 \mid \infty, -\frac{1}{\infty} r \mid \infty, \frac{1}{\infty} r \mid \infty, 1 \mid \infty, \infty$$

$$\frac{1}{\infty} R, -1 \mid \frac{1}{\infty} R, -\frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} R, \frac{1}{\infty} r \mid \frac{1}{\infty} R, 1 \mid \frac{1}{\infty} R, \infty$$

$$-\frac{1}{\infty}, -1 \mid -\frac{1}{\infty} R, -\frac{1}{\infty} r \mid -\frac{1}{\infty} R, \frac{1}{\infty} r \mid -\frac{1}{\infty} R, 1 \mid -\frac{1}{\infty} R, \infty.$$

Die Verbindung sämmtlicher Ausdrücke von R', r' mit jedem der Ausdrücke für a' giebt die wichtigsten Hauptarten des Ausdruckes (a', R', r'), wobei jedoch, wenn 2 oder 3 unendlich kleine Werthe ($\pm \frac{1}{\infty} a$, $\pm \frac{1}{\infty} r$ oder $\pm \frac{1}{\infty} a$, $\pm \frac{1}{\infty} R$ oder $\pm \frac{1}{\infty} R$, $\pm \frac{1}{\infty} r$) verbunden sind, wieder das Verhältnifs derselben ein verschiedenes seyn kann, indem hier z. B. $\frac{1}{\infty} R : \frac{1}{\infty} r = R : r$ ist. Berücksichtigt man, dafs die Fälle, wobei unendlich kleine positive oder negative Werthe der Strahlen a', R', r, vorkommen, untergeordnet werden können jenen, wobei kleine endliche Werthe derselben Strahlen vorhanden sind, so bleiben als Werthe

von a'	von R'
1) a'	1) 1
2) ∞	2) ∞
3) $-a$	3) -1

und als Werthe des Ausdruckes R′, r′

1, 1		− 1, − 1	
$1, \mathfrak{R}$	$1, \frac{1}{\mathfrak{R}}$	$-1, -\mathfrak{R}$	$-1, -\frac{1}{\mathfrak{R}}$
$1, q$	$1, \frac{1}{q}$	$-1, -q$	$-1, -\frac{1}{q}$
$1, \mathfrak{r}$	$1, \frac{1}{\mathfrak{r}}$	$-1, -\mathfrak{r}$	$-1, -\frac{1}{\mathfrak{r}}$
. . .	$1, \infty$		$-1, \infty$
$1, -r$	. . .	$-1, r$	

und außerdem noch die Werthe

$$\infty,\ 1 \text{ und } \infty,\ -1 \text{ und } \infty,\ \infty.$$

Man hat daher folgende verschiedene Hauptarten des Zeichens (a, R, r):

(a, 1, 1)		a, (−1), (−1)	
$(a, 1, \mathfrak{R})$	$(a, 1, \frac{1}{\mathfrak{R}})$	$(a, (-1), (-\mathfrak{R}))$	$(a, (-1), (-\frac{1}{\mathfrak{R}}))$
$(a, 1, q)$	$(a, 1, \frac{1}{q})$	$(a, (-1), (-q))$	$(a, (-1), (-\frac{1}{q}))$
$(a, 1, \mathfrak{r})$	$(a, 1, \frac{1}{\mathfrak{r}})$	$(a, (-1), (-\mathfrak{r}))$	$(a, (-1), (-\frac{1}{\mathfrak{r}}))$
. . .	$(a, 1, \infty)$		$(a, (-1), \infty)$
$(a, 1, (-r))$	. . .	$(a, (-1), r)$	
$(a, \infty, 1)$	. . .	$(a, \infty, (-1))$	
(a, ∞, ∞)	. . .		

(∞, 1, 1)		∞, (−1), (−1)	
$(\infty, 1, \mathfrak{R})$	$(\infty, 1, \frac{1}{\mathfrak{R}})$	$(\infty, (-1), (-\mathfrak{R}))$	$(\infty, (-1), (-\frac{1}{\mathfrak{R}}))$
$(\infty, 1, q)$	$(\infty, 1, \frac{1}{q})$	$(\infty, (-1), (-q))$	$(\infty, (-1), (-\frac{1}{q}))$
$(\infty, 1, \mathfrak{r})$	$(\infty, 1, \frac{1}{\mathfrak{r}})$	$(\infty, (-1), (-\mathfrak{r}))$	$(\infty, (-1), (-\frac{1}{\mathfrak{r}}))$
. . .	$(\infty, 1, \infty)$		
$(\infty, 1, (-r))$	. . .	$(\infty, (-1), r)$	
$(\infty, \infty, 1)$	. . .		

((-a), 1, 1)		((-a), (-1), (-1))	
$((-a),1,\mathfrak{R})$	$((-a)1,\frac{1}{\mathfrak{R}})$	$((-a),(-1),(-\mathfrak{R}))$	$((-a),(-1),(-\frac{1}{\mathfrak{R}}))$
((-a),1,q)	$((-a),1,\frac{1}{q})$	((-a), (-1), (-q))	$((-a),(-1),(-\frac{1}{q}))$
((-a), 1, r)	$((-a),1,\frac{1}{r})$	((-a), (-1), (-r))	$((-a),(-1),(-\frac{1}{r}))$
. . .	((-a) 1, ∞)		((-a), (-1), (∞)
((-a),(1,)-r)		((-a), (-1), r)	
((-a), ∞, 1)		((-a), ∞, (-1))	

Es sind hier die Fälle ((—a), ∞, ∞) und (∞, (—1), ∞) und (∞, ∞, (—1)) nicht mit aufgeführt, weil sie Flächen bezeichnen, welche nicht in der Zelle a′, R′, r′ liegen können, indem sie die Grenzen bezeichnen, welche (a′, R′, r′) nicht erreichen darf, ohne aufzuhören, eine hierher gehörige d. h. in der Zelle a′, R′, r′ auftretende Begrenzungsfläche zu seyn.

Setzt man ∞a oder ∞R oder ∞r in diejenigen Stellen, worin statt a oder R oder r ein bloſses ∞ Zeichen sich befindet, und multiplicirt man jedes der 3 Glieder in jeder der 59 Formeln mit $\frac{1}{\infty}$, so erhält man 59 neue Formeln, unter welchen diejenigen, die kein — Zeichen enthalten, 1) wenn sie vor dieser Veränderung *kein* ∞ Zeichen enthielten, bloſs Zeichen für den Mittelpunct des Strahlensystems sind, in so fern er als das erste Element dieser oder jener ringsum endlich begrenzten Gestalt betrachtet wird, gleichsam eine solche Gestalt von unendlich kleinen Abmessungen ist; 2) wenn sie vorher *ein* ∞ Zeichen hatten und also jetzt eine der 3 Formen $(a, \frac{1}{\infty}R, \frac{1}{\infty}r)$ oder $(\frac{1}{\infty}a, R, \frac{1}{\infty}r)$ oder $(\frac{1}{\infty}a, \frac{1}{\infty}R, r)$ haben, die Strahlen a, R, r selbst bezeichnen, sofern diese als die ersten Elemente der Gestalten (∞a, R, r) oder (a, ∞R, r) oder (a, R, ∞r) angesehen werden können; 3) wenn sie vorher *zwei* ∞ Zeichen enthielten, jetzt also im Allgemeinen eine der Formen $(\frac{1}{\infty}a, R, r)$ oder $(a, \frac{1}{\infty}R, r)$ oder $(a, R, \frac{1}{\infty}r)$ haben, Ebenen bezeichnen, von denen die erste dem mittleren Querschnitte, während die 2te sowohl als die 3te einer doppelten Hauptflügelfläche (der 1sten

oder 2ten Art) entspricht, die als Grenze des Flügelviertels, von dem es sich handelt, auftritt; diejenigen endlich, welche ein oder zwei oder drei —Zeichen enthalten, Gestalten bezeichnen, deren Flächen im Mittelpuncte des Strahlensystems sich vereinigen [1].

Bisher wurde zum Behuf der Bestimmung der Lage einer Begrenzungsfläche in einer Zelle bei gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten, deren p eine gerade Zahl ist, vorausgesetzt, dafs in jeder Zelle jeder der 3 Bestimmungsstrahlen derselben in seiner natürlichen Richtung vom Mittelpuncte des Strahlensystems an nach aufsen hin positiv zu nehmen sey, und kein Unterschied gesetzt zwischen die $2 \times t$ Flügelviertel oder Zellen, die in einem solchen Strahlensysteme vorhanden sind. Stellt man sich aber vor, der Strahl R′, insofern er der Zelle a′R′r′ angehört, sey der Stellvertreter für die Verbindung (Combination) der Strahlen R^{I}, R^{II}, R^{III}, R^{IV}, wie sie in dem fraglichen Strahlensysteme statt findet, in derjenigen Stellung des Strahlensystems, in welcher jeder der Strahlen a′, R′, r′ als der erste, z. B. oberste, seiner Art auftritt, d. h. in einer bestimmten solchen Stellung des Strahlensystems, bei welcher irgend ein in dem Flügelviertel $a^{I} R^{I} r^{I}$ liegender 1fach 1gliedriger (er heifse x) senkrecht aufwärts gerichtet ist, so ist einleuchtend, dafs der Strahl R^{II} für das Flügelviertel a′R″r″ z. B. gleichfalls als Stellvertreter sämmtlicher verbundenen (combinirten) Strahlen R zu betrachten sey; dafs aber dieser Strahlencombination eine andere Stellung (Versetzung, Permutation), als vorher, eigen seyn müsse, indem jetzt der Strahl R″ als der oberste seiner Art auftritt und die Stelle einnimmt, welche vorher R′ einnahm, wäh-

1 Gröfsere Ausführlichkeit über diese und über alle jenen einfachen Gestalten, welche von gleichwerthigen Flächen begrenzt sind, in deren Zeichen der Werth von einem oder von zwei oder von drei der Bestimmungsstrahlen a′, R′, r negativ ist, scheint erst später für die Krystallkunde von Wichtigkeit zu werden, wenn die bisher als *zufällige* gestörte Bildungen betrachteten Gestalten mit trichterartigen Vertiefungen, statt dieser oder jener Fläche (Apatit, Eis, Kochsalz, Wismuth u. s. w.), und alle jene Formen, bei denen gleichsam nur das Gerippe zu einem Krystalle ausgebildet ist (Schneeflocken, Gestricktes u. s. w.), noch sorgfältiger werden untersucht seyn. Dessenungeachtet aber werden, wenigstens für die Krystallkunde, jene Gestalten stets die wichtigsten bleiben, in denen keiner der Werthe der Strahlen a′, R′, r′ negativ ist.

rend der Strahl a' für die Zellen $a' R'' r''$ dieselbe Stelle einnimmt, die er für das Flügelviertel $a' R' r'$ vorher einnahm. Auch ist der dem Strahle x' entsprechende Strahl x'' an die Stelle von x getreten. Man setze fest, die combinirten Strahlen einer Art seyen für jede Zelle so aufzuzählen, dafs, wenn der Strahl x der Zelle aufwärts gerichtet ist, derjenige Strahl der fraglichen Art z. B. R, welcher am meisten sich der senkrecht aufwärts gerichteten Lage nähert, die erste Stelle einzunehmen habe in der Permutation und dafs die übrigen in derjenigen Ordnung nach einander folgen sollen, in welcher sie sich mehr und mehr von der senkrecht aufwärts gerichteten Lage entfernen. Es wird dann z. B. bei einer gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen Gestalt

dem Flügelviertel entsprechen			die Strahlenpermutation					
$a' R' r'$	oder	$a'' R' r'$	R'	R''	R^{VI}	R'''	R^{V}	R^{IV}
$a' R'' r'$	—	$a'' R'' r'$	II	I	III	VI	IV	V
$a' R'' r''$	—	$a'' R'' r''$	II	III	I	IV	VI	V
$a' R''' r''$	—	$a'' R''' r''$	III	II	IV	I	V	VI
$a' R''' r'''$	—	$a'' R''' r'''$	III	IV	II	V	I	VI
$a' R^{IV} r'''$	—	$a'' R^{IV} r'''$	IV	III	V	II	VI	I
$a' R^{IV} r^{IV}$	—	$a'' R^{IV} r^{IV}$	IV	V	III	VI	II	I
$a' R^{V} r^{IV}$	—	$a'' R^{V} r^{IV}$	V	IV	VI	III	I	II
$a' R^{V} r^{V}$	—	$a'' R^{V} r^{V}$	V	VI	IV	I	III	II
$a' R^{VI} r^{V}$	—	$a'' R^{VI} r^{V}$	VI	V	I	IV	II	III
$a' R^{VI} r^{VI}$	—	$a'' R^{VI} r^{VI}$	VI	I	V	II	IV	III
$a' R' r^{VI}$	—	$a'' R' r^{VI}$	I	VI	II	V	III	IV

Auf ähnliche Weise erhält man für $a' R' r'$ und $a'' R' r'$ mit einander übereinstimmende Permutationen der Strahlen r, aber wieder verschiedene für $a' R' r'$, $a' R'' r'$, $a' R'' r''$ u. s. w. Für sämmtliche Flügelviertel, welche a' enthalten, gilt die Permutation $a^{I}\, a^{II}$ und für alle, welche a'' enthalten, die Permutation $a^{II}\, a^{I}$. Sieht man nun den Gegensatz zwischen den beiden binären Permutationen 1 . 2 und 2 . 1 als ähnlich dem Gegensatze zwischen vorwärts und rückwärts, zwischen + und — an und bezeichnet von 2 Permutationen derselben Combination, welche mit einander übereinstimmen hinsichtlich auf die Stellung aller ihrer Elemente, bis auf 2 derselben, die mit einander gegenseitig vertauscht werden mufsten, um die eine der beiden Permutationen in die andere zu verwandeln, die eine mit + und die

andere mit —[1], so können auch die hier vorkommenden Permutationen in dieser Rücksicht betrachtet werden[2]. Setzt man die Permutation I II VI III V IV als positiv, so hat man[3]:

1 So ist also z. B., wenn 1234 positiv ist, 2134 negativ, wenn fghiklm positiv ist, auch fgmiklh negativ.

2 Vergleiche Hessel: Ueber positive und negative Permutationen. Marburg bei Garthe 1823. Hier möge nur so viel zur Erläuterung dienen, daſs, wenn eine Permutation als + gesetzt, gegeben oder angenommen ist und man von einer andern Permutation derselben Elementencombination wissen will, ob sie + oder — zu bezeichnen sey, man nach folgender Regel verfahren könne, die gleich auf irgend ein Beispiel angewendet dargestellt werden möge.

Aufgabe. Es sey gegeben + 123456; man will wissen, ob 365214 mit + oder — zu bezeichnen sey.

Auflösung. Suche in der gegebenen positiven Permutation von links an das erste Element, welches nicht mit dem in derselben Stelle stehenden der zu bestimmenden Permutation gleichnamig ist (hier also 1), und vertausche es mit dem Elemente (3), das in der zu bestimmenden Permutation an dieser Stelle steht. Es wird so aus der gegebenen positiven Permutation (+ 123456) eine neue entstehen (321456), welche wegen der stattgefundenen gegenseitigen Vertauschung zweier Elemente eine negative (— 321456) seyn wird. An dieser sucht man nun wieder das erste Element, von links an gezählt, auf, welches von dem in derselben Stelle der zu bestimmenden Permutation stehenden abweicht, und vertauscht es mit dem dahin gehörigen gegenseitig, so entsteht eine positive Permutation (aus — 321456 wird + 361452). So fährt man fort, aus der jedesmal erhaltenen neuen positiven oder negativen Permutation eine andere negative oder positive zu erzeugen, die der zu bestimmenden (hinsichtlich auf die Stellung von wenigstens einem Elemente mehr) näher verwandt ist, als die, aus welcher sie entwickelt wurde, bis man eine solche erhält, die mit der zu bestimmenden Permutation vollkommen einerlei ist. Man erhält also nach und nach die Permutationen

	365214	
wenn man aus	+ 123456	macht
die Permutation	— 321456	und aus dieser
— —	+ 361452	— — —
— —	— 365412	— — —
— —	+ 365214,	

so daſs also die Permutation 365214 positiv ist, wenn 123456 positiv war.

3 Zur Erläuterung möge hier die Ableitung jeder folgenden aus der vorhergehenden solchen Permutation stehen. Die mit dem Zeichen (*) versehenen sind die hierher gehörigen, auf deren Vorzeichen es ankommt.

+ I II VI III V IV	— IV V III VI II I
— II I III VI IV V	+ V IV VI III I II
— II III I IV VI V	+ V VI IV I III II
+ III II IV I V VI	— VI V I IV II III
+ III IV II V I VI	— VI I V II IV III
— IV III V II VI I	+ I VI II V III IV

+ 1 2 6 3 5 4 *	— 4 5 3 6 2 1 *
— 2 1 6 3 5 4	+ 5 4 3 6 2 1
+ 2 1 3 6 5 4	— 5 4 6 3 2 1
— 2 1 3 6 4 5 *	+ 5 4 6 3 1 2 *
+ 2 3 1 6 4 5	— 5 6 4 3 1 2
— 2 3 1 4 6 5 *	+ 5 6 4 1 3 2 *
+ 3 2 1 4 6 5	— 6 5 4 1 3 2
— 3 2 4 1 6 5	+ 6 5 1 4 3 2
+ 3 2 4 1 5 6 *	— 6 5 1 4 2 3 *
— 3 4 2 1 5 6	+ 6 1 5 4 2 3
+ 3 4 2 5 1 6 *	— 6 1 5 2 4 3 *
— 4 3 2 5 1 6	+ 1 6 5 2 4 3
+ 4 3 5 2 1 6	— 1 6 2 5 4 3
— 4 3 5 2 6 1 *	+ 1 6 2 5 3 4 *
+ 4 5 3 2 6 1	

Man kann daher den Strahl R′ in jeder der beiden Zellen a′R′r′ und a″R′r′ als positiv = + R′ betrachten, während er in den beiden anliegenden a′R′r^{VI} und a″R′r^{VI} gleichfalls als positiv erscheint, so daſs der 2fach 2gliedrige Strahl R′ gleichsam aus 4 einzelnen 1fach 1gliedrigen positiven Strahlen zusammengesetzt erscheint. Eben so muſs dann jeder der Strahlen R^{III}, R^{V} als aus 4 positiven 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehend gedacht werden, während die den negativen Permutationen entsprechenden Strahlen R^{II}, R^{IV}, R^{VI} als aus 4 negativen 1fach 1gliedrigen Strahlen bestehend zu denken sind, da jeder derselben für jedes der 4 Flügelviertel, denen er angehört, einer negativen Permutation der Strahlen, welche R heiſsen, entspricht, gleichsam Stellvertreter derselben ist.

Setzt man ebenso den Strahl r′ als aus 4 positiven Strahlen bestehend, so ist jeder der Strahlen r′, r^{III}, r^{V} für jede der vier Zellen, die ihn umgeben, als positiv zu setzen und jeder der Strahlen r″, r^{IV}, r^{VI} gleichfalls für jede der vier Zellen, denen

er angehört, als negativ zu nehmen. Der obere Hauptstrahl a' entspricht der positiven Permutation $a'\,a''$ für sämmtliche obere Flügelviertel, während der untere Hauptstrahl a'' die Stelle der negativen Permutation $a''\,a'$ für sämmtliche untere Flügelviertel vertritt; a' ist also positiv, a'' negativ zu setzen. Ueberhaupt ist bei jeder gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalt, für welche p das Doppelte einer ungeraden Zahl ist (d. h. für $p = 2$ oder 6 oder 10 u. s. w.), jeder Strahl R oder r mit ungerader Zeigezahl I, III, V . . . ($R'\,R^{III}$, R^{V}..., so wie r', r''', r^{V}....) für jedes der vier Flügelviertel, denen er angehört, *positiv;* jeder mit gerader Zeigezahl II, IV, VI (R^{II}, R^{IV}, R^{VI} r^{II}, r^{IV}, r^{VI}...) aber für jedes der vier Flügelviertel, denen er angehört, *negativ*.

Bei gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten, bei denen p das Doppelte einer geraden Zahl ist (d. h. für $p = 4$ oder $= 8$ oder $= 12$. . .), hat jeder 2fach 2gliedrige Strahl (R sowohl als r) die Bedeutung von 4 (in einen einzigen Strahl zusammenfallenden nicht mehr divergirenden) 1fach 1gliedrigen Strahlen, von denen 2 positiv und 2 negativ sind. Es ist nämlich der Strahl R', wenn er für die Zelle $a'\,R'\,r'$ positiv ist, auch positiv für $a''\,R'\,r'$, aber negativ für[1] $a'\,R'\,r^{w}$ und für $a''\,R'\,r^{w}$. Ebenso ist dann R''' positiv für $a'\,R'''\,r'''$ und $a''\,R'''\,r'''$, aber negativ für $a'\,R'''\,r''$ und $a''\,R'''\,r''$. Allgemein R^{2n+1} ist positiv für $a'\,R^{2n+1}\,r^{2n+1}$ und für $a''\,R^{2n+1}\,r^{2n+1}$, aber negativ[2] für $a^{I}\,R^{2n+1}\,r^{2n}$ und für $a^{II}\,R^{2n+1}\,r^{2n}$, während R^{2n} positiv ist für $a'\,R^{2n}\,r^{2n-1}$ und für $a^{II}\,R^{2n}\,r^{2n-1}$. Dieselben Gesetze gelten für r. Auch hier ist a' als $+$ und a^{II} als $-$a zu betrachten. Das Zeichen ($+$a, $+$R, $+$r) umfaſst daher jede Fläche (a, R, r), welche in einem solchen Flügelviertel liegt, von welchem jeder der Strahlen a, R, r als Stellvertreter einer positiven Permutation der sämmtlichen combinirten Strahlen derjenigen Art, zu welcher er gehört, zu betrachten ist[3].

1 r^{w} soll andeuten r mit der letzten Zeigezahl, also bei 4gliedrigen Gestalten r^{IV}, bei 8gliedrigen r^{VIII} u. s. w.

2 Wie dieses sich für R' modificirt, ist bereits gezeigt. Es wird hier nämlich $n = o$ und statt r^{o} tritt r^{w} an die Stelle.

3 Es sind demnach diese Vorzeichen $+$ und $-$, namentlich das letztere, nicht zu verwechseln mit Vorzeichen, welche sich auf die Gröſse des Werthes von a oder R oder r beziehen; denn auch hier

Bezeichnet man jede Zelle[1] $+$a, $+$R, $+$r mit α und jede dem Zeichen $-$a, $+$R, $+$r entsprechende mit α', so wird auch $+$a, $-$R, $+$r mit β und $-$a, $-$R, $+$r mit β' bezeichnet werden können u. s. w.; man erhält daher: Fig. 309.

$+$a, $+$R, $+$r $= \alpha$	$-$a, $+$R, $+$r $= \alpha'$
$+$a, $-$R, $+$r $= \beta$	$-$a, $-$R, $+$r $= \beta'$
$+$a, $-$R, $-$r $= \gamma$	$-$a, $-$R, $-$r $= \gamma'$
$+$a, $+$R, $-$r $= \delta$	$-$a, $+$R, $-$r $= \delta'$

und ($+$a, $-$R, $-$r) ist daher z. B. das allgemeine Zeichen für Begrenzungsflächen, die in Flügelvierteln γ liegen $= (\gamma)$ u. s. w.

Es sind nun folgende Fälle möglich:

I. Beachtet man die Vorzeichen $+$ oder $-$ bei keinem der drei Strahlen a, R, r, so wird zwischen der Bezeichnung der 8 Arten von Zellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ kein Unterschied seyn, d. h. sie werden alle als gleichwerthig betrachtet:

$$\text{a, R, r} = \alpha = \beta = \gamma = \delta = \alpha' = \beta' = \gamma' = \delta'$$
$$(\text{a, R, r}) = (\alpha) = (\beta) = (\gamma) = (\delta)$$
$$= (\alpha') = (\beta') = (\gamma') = (\delta')$$

daher hat das Zeichen bei *gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen* einfachen Gestalten, wenn p eine gerade Zahl ist, kein Vorzeichen, welches eine Verschiedenheit der Flügelviertel erzeugte, und ist allgemein $=$ (a, R, r).

II. Beachtet man das Vorzeichen bei einem der 3 Strahlen, so kann dieses geschehen

1) bei a; es sind dann verschieden die Flügelviertel $+$a, R, r von $-$a, R, r und die Flächen ($+$a, R, r) von ($-$a, R, r), jene gehören oberen, diese unteren Zellen an. Treten an einer zusammengesetzten Gestalt Begrenzungsflächen ($+$a, R, r) allein auf, ohne dafs die Flächen ($-$a, R, r) zugleich vorhanden sind, oder umgekehrt diese ohne jene, so ist die Gestalt eine *un-*

können die Werthe sowohl der positiven als auch der negativen Strahlen negativ werden; es bedeutet nämlich z. B. der Ausdruck ($+$a, $+$($-$R), $+$($-$r)) eine Fläche, die so in den Flügelvierteln $+$a, $+$R, $+$r liegt, wie (a, ($-$R), ($-$r)) in jedem Flügelviertel liegen würde u. s. w.

1 Da immer zwei durch gleichnamige Buchstaben bezeichnete Zellen, z. B. α und α', über einander liegen, so kann man sich mit Hülfe der Bilder A, B, C die gegenseitige Lage der Zellen hinreichend versinnlichen.

gleichendige 2fach pgliedrige, wenn p, wie bisher, eine gerade Zahl ist.

2) bei R. Es sind dann die Flügelviertel

$$\alpha = \delta = \alpha' = \delta' = a, + R, r$$
$$\beta = \gamma = \beta' = \gamma' = a, - R, r$$

und eben so die Flächen

$$(\alpha) = (\delta) = (\alpha') = (\delta') = (a, + R, r)$$
$$(\beta) = (\gamma) = (\beta') = (\gamma') = (a, - R, r).$$

Eine Gestalt, welche von Flächen wie (a, + R, r) (die man sich so weit verlängert denkt, daſs sie, wo möglich, für sich allein eine ringsum endlich begrenzte Gestalt einschlieſsen[1]) begrenzt ist, ohne daſs die Flächen (a, — R, r) zugleich vorhanden wären (und umgekehrt (a, — R, r) ohne (a, + R, r)), ist eine *gleichstellig 2endige 2fach mgliedrige*, wenn m eine ganze Zahl $= \frac{1}{2}p$ bedeutet, so daſs m gerade oder ungerade seyn kann. Das Zeichen (a, + R, r) oder (a, — R, r) dient daher vorzüglich, um gleichstellig 2endige 2fach mgliedrige 1fache Gestalten[2] der 1sten oder 2ten Stellung zu bezeichnen, bei denen m eine *ungerade* Zahl ist. Die Strahlen r sind hier also in dem 2fach mgliedrigen Strahlensysteme nicht die Querstrahlen 2ter Art, sondern solche Querstrahlen, welche den Winkel zwischen zwei nachbarlichen ungleichwerthigen 2fach 2gliedrigen halbiren, d. h. sie liegen in gleichstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Queraxen.

3) bei r. Die Unterschiede der Formen (a, R, + r) und (a, R, — r) sind ganz ähnlich denen zwischen (a, + R, r) und (a, — R, r).

III. Berücksichtigt man die Vorzeichen bei zwei von den drei Bestimmungsstrahlen, so kann hier auf zweierlei Weise verfahren werden.

A. Man setzt Zellen als gleichwerthig, wenn sie mit einander übereinstimmen hinsichtlich auf das + oder — Zeichen, welches dem Verhältnisse der beiden zu beachtenden Strahlen zukommen würde, nach der bekannten Regel, gemäſs welcher gleiche Zeichen der Glieder des Verhältnisses für dieses Verhältniſs selbst das Zeichen + bedingen, während ungleiche Vorzeichen der Glieder ebenso für das Verhältniſs ein — Zeichen fordern. Dieses kann geschehen:

1 Was für p = 2 nicht möglich ist.

2 Gewöhnlich also 2 × mflächige Ebenrandner.

1) bei dem Hauptstrahle a und bei einem der Querstrahlen R oder r, z. B. bei R. Es ist dann

$$(\alpha) = (\delta) = (\beta') = (\gamma') = (\pm a, \pm R, r)$$

und $$(\beta) = (\gamma) = (\alpha') = (\delta') = (\pm a, \mp R, r)$$

indem hier $$+ a : + R = - a : - R = + \frac{a}{R}$$

und wieder $$+ a : - R = - a : + R = - \frac{a}{R}.$$

Die Flächen $(\pm a, \pm R, r)$ für sich allein so weit verlängert gedacht, dafs sie, wo möglich, eine ringsum endlich begrenzte Gestalt einschliefsen, liefern eine *gerenstellig 2endige 2fach mgliedrige Gestalt* erster Stellung, während ebenso $(\pm a, \mp R, r)$ eine solche 2ter Stellung bedingen. Man sagt daher, eine gerenstellig 2endige 2fach mgliedrige Gestalt sey eine flächenhalbzählige (hemiedrische) gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige. Die Strahlen R sind hier die 2fach 1gliedrigen und die Strahlen r die 1fach 2gliedrigen Querstrahlen des gerenstellig 2endigen 2fach mgliedrigen Strahlensystems [1].

2) Bei den 2 Querstrahlen R und r. Es ist dann

$$(\alpha) = (\gamma) = (\alpha') = (\gamma') = (a, \pm R, \pm r)$$
$$(\beta) = (\delta) = (\beta') = (\delta') = (a, \mp R, \pm r).$$

Die gleichstellig 2endige 2fach pgliedrige Gestalt (a, R, r) wird hier zerlegt in 2 einzelne *gleichstellig 2endige 1fach pgliedrige*, deren erste durch genugsame Verlängerung der Flächen $(a, \pm R, \pm r)$ entsteht, während die zweite ebenso durch $(a, \mp R, \pm r)$ sich bezeichnen läfst.

B. Man fordert, dafs Flügelviertel, welche als gleichwerthig betrachtet werden sollen, mit einander übereinstimmen sowohl rücksichtlich auf das Vorzeichen bei R, als auch auf jenes bei r, ohne dafs hier auf das Vorzeichen des Verhältnisses der beiden zu beachtenden Strahlen gesehen wird.

1) Die beiden mit Vorzeichen versehenen Strahlen seyen der Hauptstrahl a und ein Querstrahl R oder r z. B. R, so ist:

$$(\alpha) = (\delta) = (+a, +R, r)$$
$$(\beta) = (\gamma) = (+a, -R, r)$$
$$(\alpha') = (\delta') = (-a, +R, r)$$
$$(\beta') = (\gamma') = (-a, -R, r).$$

1 Aehnlich sind die Ergebnisse bei Beachtung der Vorzeichen von a und r.

Es wird hier (a, R, r) zerlegt in 4 einzelne *ungleichendige 2fach mgliedrige Gestaltenbezeichnungen*, denen eine der vier so eben aufgestellten Formen eigen ist, und sie dienen vorzüglich für solche ungleichendige 2fach mgliedrige einfache Gestalten, deren m ungerade ist.

2) Die hinsichtlich auf ihr Vorzeichen zu beachtenden Strahlen seyen die beiden Querstrahlen R und r, so ist

$$(\alpha) = (\alpha') = (a, +R, +r)$$
$$(\beta) = (\beta') = (a, -R, +r)$$
$$(\gamma) = (\gamma') = (a, -R, -r)$$
$$(\delta) = (\delta') = (a, +R, -r).$$

Jede dieser vier Bezeichnungen dient zur Bestimmung einer *gleichstellig 2endigen 1fach mgliedrigen Gestalt*, und zunächst einer solchen, bei welcher m ungerade ist.

IV. Nimmt man Rücksicht auf die Vorzeichen bei allen 3 Bestimmungsstrahlen a, R und r, so sind folgende Fälle möglich:

A. Man fordert, dafs Zellen, welche als gleichwerthig betrachtet werden sollen, sich gleich sind in Beziehung auf die Vorzeichen der Verhältnisse des Hauptstrahls zu jedem der beiden Querstrahlen, so dafs

$$+a : +R = -a : -R = +\frac{a}{R}$$
$$+a : -R = -a : +R = -\frac{a}{R}$$

gedacht wird; solche Flügelviertel stimmen denn auch miteinander überein hinsichtlich auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse R : r gebührt. Es ist dann:

$$(\alpha) = (\gamma') = (\pm a, \pm R, \pm r)$$ [1]
$$(\beta) = (\delta') = (\pm a, \mp R, \pm r)$$ [2]
$$(\gamma) = (\alpha') = (\pm a, \mp R, \mp r)$$ [2]
$$(\delta) = (\beta') = (\pm a, \pm R, \mp r).$$ [3]

Flächen, die einem dieser vier Zeichen entsprechen, begrenzen bei hinreichender Verlängerung *gerenstellig 2endige 1fach mglie-*

1 Es ist nämlich hier $+a : +R = -a : -R$ und $+a : +r = -a : -r$ und zugleich auch $+R : +r = -R : -r$.

2 $+a : -R = -a : +R$ und $+a : +r = -a : -r$ und auch $-R : +r = +R : -r$.

3 In den beiden letzten Zeichen wiederholen sich dieselben Verhältnisse, wie in den beiden ersten Fällen, nur in anderer Verbindung.

drige Gestalten, und diese Zeichen dienen daher zur Bestimmung solcher Formen, wobei m sowohl gerade als auch ungerade ist.

B. Man fordert, daſs gleichwerthige Flügelviertel mit einander übereinstimmen rücksichtlich auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse des Hauptstrahls a zu dem Verhältnisse der beiden Querstrahlen $\frac{R}{r}$ gebührt, nach der bekannten Regel, gemäſs welcher $+a : +\frac{R}{r} = -a : -\frac{R}{r}$ und $+a : -\frac{R}{r} = -a : +\frac{R}{r}$, so daſs, wenn in dem Ausdrucke a, R, r eine gerade Anzahl von — Zeichen (0 oder 2) vorkommt, das ganze Verhältniſs ein positives wird, während es bei ungerader Anzahl von — Zeichen (1 oder 3) negativ seyn muſs. Es ist dann

$$(\alpha) = (\gamma) = (\beta') = (\delta') = +(a, R, r)$$
$$(\beta) = (\delta) = (\alpha') = (\gamma') = -(a, R, r).$$

Die beiden Zeichen + (a, R, r) und — (a, R, r) beziehen sich auf die beiden *ebenbildlich 2endigen 1fach pgliedrigen Gestalten,* welche sich aus jeder gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalt durch Verlängerung der einen oder der andern Hälfte ihrer Flächen entwickeln lassen.

C. Man setzt Flügelviertel nur dann als gleichwerthig, wenn sie einander gleich sind in Beziehung auf das Vorzeichen, welches dem Verhältnisse zweier Strahlen zusteht, und in Beziehung auf das Vorzeichen, welches dem 3ten Strahle eigen ist. Der auf solche Weise einzeln zu betrachtende Strahl kann seyn entweder der Hauptstrahl a, oder einer der Querstrahlen R oder r, z. B. r.

1) Ist a der einzeln zu berücksichtigende Strahl, so ist

$$(\alpha) = (\gamma) = (+a, \pm R, \pm r)^1$$
$$(\beta) = (\delta) = (+a, \mp R, \pm r)$$
$$(\alpha') = (\gamma') = (-a, \pm R, \pm r)$$
$$(\beta') = (\delta') = (-a, \mp R, \pm r).$$

Es sind dieses die allgemeinen Formen für die Bezeichnung *ungleichendiger 1fach pgliedriger einfacher Gestalten.*

2) Ist r der einzeln zu berücksichtigende Strahl, so hat man

1 d. h. $(+a, +R, +r) \doteq (+a, -R, -r)$.

$$(\alpha) = (\beta') = (\pm a, \pm R, +r)$$
$$(\beta) = (\alpha') = (\pm a, \mp R, +r)$$
$$(\gamma) = (\delta') = (\pm a, \mp R, -r)$$
$$(\delta) = (\gamma') = (\pm a, \pm R, -r)$$[1].

Flächen, die *einem* solchen Zeichen entsprechen, begrenzen eine *ebenbildlich 2endige 1fach mgliedrige einfache Gestalt.* Diese Bezeichnung ist vorzüglich wichtig für den Fall, wobei m eine ungerade Zahl ist.

D. Man hält Zellen nur dann für gleichwerthig, wenn sie einander gleich sind in Beziehung auf das Vorzeichen eines jeden der drei Bestimmungsstrahlen. Es ist dann

$(\alpha) = (+a, +R, +r)$	$(\alpha') = (-a, +R, +r)$
$(\beta) = (+a, -R, +r)$	$(\beta') = (-a, -R, +r)$
$(\gamma) = (+a, -R, -r)$	$(\gamma') = (-a, -R, -r)$
$(\delta) = (+a, +R, -r)$	$(\delta') = (-a, +R, -r)$.

Gestalten, die bloſs von den Flächen begrenzt sind, welche einem dieser 8 Zeichen entsprechen, sind *ungleichendige 1fach mgliedrige*, eine vorzüglich dann zu gebrauchende Bezeichnung, wenn m eine ungerade Zahl ist.

Wenn man demnach von einem Axenkreuze ausgeht, bestehend aus den drei wichtigsten Arten von Axen, nämlich einer Hauptaxe und m Queraxen erster und m Queraxen zweiter Art, und man bezeichnet in Beziehung auf dasselbe die Gestalten der verschiedenen Systeme, denen dieses Axenkreuz zum Grunde liegt, so sieht man, daſs die einen nur die halbe Anzahl der Flächen besitzen, welche diesem Axenkreuze möglicher Weise entsprechen können, andere nur den vierten und noch andere bloſs den achten Theil dieser Anzahl. Man kann daher auch mittelst der Bezeichnung die sämmtlichen Gestalten, bei denen auſser der Hauptaxe m Queraxen 1ster und folglich auch m Queraxen 2ter Art als Maſslinien dienen, zusammenfassen unter dem allgemeinen Ausdrucke 1- *und mmaſsige Gestalten* (z. B. 1– und

1 Diesem Ergebnisse ähnlich würde seyn:

$$(\alpha) = (\delta') = (\pm a, + R, \pm r)$$
$$(\beta) = (\gamma') = (\pm a, - R, \pm r)$$
$$(\gamma) = (\beta') = (\pm a, - R, \mp r)$$
$$(\delta) = (\alpha') = (\pm a, + R, \mp r)$$

wenn R der einzeln rücksichtlich auf seine Vorzeichen zu beachtende Bestimmungsstrahl wäre.

3maſsige Gestalt, *forma monocaetrimetrica*, 1- und 2maſsige, *forma monocaedimetrica*, 1- und 1maſsige, *forma monocaemonometrica*, u. s. w.); damit jedoch der auf dem Wege der Bezeichnung gewonnene Begriff der 1- und mmaſsigen Gestalten vollkommen mit dem rein geometrischen bereits oben entwickelten übereinstimme, muſs auch hier festgesetzt werden, daſs als Messungsqueraxen von einerlei Art nur solche betrachtet werden dürfen, welche auch in der nicht vollzählig flächigen Gestalt sich als *gleichwerthig* verhalten; dann werden, wenn m *gerade* ist, die gleichstellig 2endigen 1fach und 2fach mgliedrigen, so wie die ebenbildlich gleichendigen 1fach mgliedrigen und wieder die ungleichendigen 1fach und 2fach mgliedrigen Gestalten nicht zu den 1- und mmaſsigen gehören, wohl aber wenn m *ungerade* ist.

Es ist dann z. B. jede 1- und 3maſsige Gestalt entweder

	Zeichen der einfachen Gestalten.
1) eine flächenvollzählige (*forma monocaetrimetrica homoedrica*); sie ist eine gleichstellig 2endige 2fach 6gliedrige . .	(a, R, r)
2) eine flächenhalbzählige (*f. m. hemiedrica*). Diese ist	
a) gleichstellig 2endig 1fach 6gliedrig .	(a, $\pm$ R, $\pm$ r) (a, $\pm$ R, $\mp$ r)
b) gleichstellig 2endig 2fach 3gliedrig .	(a, + R, r) (a, — R, r)
c) gerenstellig 2endig 2fach 3gliedrig .	($\pm$ a, $\pm$ R, r) ($\pm$ a, $\mp$ R, r)
d) ebenbildlich 2endig 1fach 6gliedrig .	+ (a, R, r) — (a, R, r)
e) ungleichendig 2fach 6gliedrig . . .	(+ a, R, r) (— a, R, r)
3) eine flächenviertelszählige (*f. m. tetartoedrica*), und zwar	
a) gleichstellig 2endig 1fach 3gliedrig .	(a, + R, + r) (a, — R, — r) (a, — R, + r) (a, + R, — r) .
b) gerenstellig 2endig 1fach 3gliedrig .	($\pm$ a, $\pm$ R, $\pm$ r) ($\pm$ a, $\mp$ R, $\pm$ r) ($\pm$ a, $\mp$ R, $\mp$ r) ($\pm$ a, $\pm$ R, $\mp$ r)

c) ebenbildlich 2endig 1fach 3gliedrig . . . $\begin{cases} (\pm a, +R, \pm r) \\ (\pm a, -R, \pm r) \\ (\pm a, -R, \mp r) \\ (\pm a, +R, \mp r) \end{cases}$

d) ungleichendig 1fach 6gliedrig . . . $\begin{cases} (+a, \pm R, \pm r) \\ (+a, \pm R, \mp r) \\ (-a, \pm R, \pm r) \\ (-a, \pm R, \mp r) \end{cases}$

4) eine flächenachtelszählige (*f. m. hemi-tetartoedrica*), sie ist

ungleichendig 1fach 3gliedrig $\begin{cases} (+a, +R, +r) \\ (+a, -R, +r) \\ (+a, -R, -r) \\ (+a, +R, -r) \\ (-a, +R, +r) \\ (-a, -R, +r) \\ (-a, -R, -r) \\ (-a, +R, -r) \end{cases}$

Was von den 1- und 3mafsigen Gestalten gesagt worden ist, gilt von den 1- und mmafsigen, wenn man statt 3 die Zahl m und statt 6 die Zahl p = 2m setzt, so lange m *ungerade* ist; ist aber m *gerade*, so fallen die Abtheilungen 2a, 3a, 3c und 4 hinweg, indem sie, wenn m = 2n ist, blofs 1- und nmafsige Gestalten enthalten. Fordert man aber blofs, dafs Gestalten, welche man 1- und mmafsige nennt, m gleichwerthige Messungsqueraxen *einer* Art haben müssen, welche sich unter Winkeln von $\frac{360}{m}$ Graden schneiden, ohne zu fordern, dafs auch die Quermafslinien, welche zwischen diesen liegen, den Winkel von $\frac{360}{m}$ Graden halbirend (die Messungsqueraxen zweiter Art), einander gleichwerthige Queraxen seyen, so fällt *dieser* Unterschied zwischen der Reihe der 1- und mmafsigen Gestalten, der durch einen geraden oder ungeraden Werth von m bedingt wird, hinweg.

Man sieht leicht ein, dafs die Bezeichnung durch die drei wichtigsten Axenarten bei solchen 1- und 1mafsigen Gestalten, welche mehr als 3 Arten einheitlicher Axen besitzen, nicht gerade nothwendig durch 3 gegen einander senkrechte Axen geschehen mufs und dafs man, ohne dafs die Art der Anwendung

der Vorzeichen sich ändert, in einem solchen Falle je 3 nicht in einerlei Ebene liegende Axen bei der Bezeichnung zum Grunde legen kann, wenn nur in der Gestalt keine andern Axen vorhanden sind, denen eine höhere Wichtigkeit zusteht. So also wird man z. B. bei den gerenstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen oder bei den gleichstellig 2endigen 1fach 2gliedrigen Gestalten die 2gliedrige Axe und irgend zwei (der unendlich vielen auf diese senkrechten) einander unter beliebigem Winkel schneidende 2fach 1gliedrige Axen als die drei wichtigsten Axen betrachten können, eben weil hier jede der 2fach 1gliedrigen Axen eine *einheitliche* Axe ist, welche eben so gut wie jede andere vorhandene einheitliche Axe gewählt zu werden fähig ist, um aus ihrem Charakter (einer gerenstellig 2endigen 2fach 1gliedrigen Axe) die Beschaffenheit jeder andern Axe des ganzen Axensystems zu entwickeln[1]. Aus demselben Grunde kann bei gerenstellig 2endigen 1fach 1gliedrigen Gestalten jede Verbindung dreier unter beliebigen Winkeln sich schneidenden, nicht in einerlei Ebene liegenden Axen zur Bezeichnung gebraucht werden, weil hier jede denkbare Axe eine einheitliche Axe ist. Man wird jedoch von einer solchen Bezeichnung durch unregelmäſsige Zellen nur dann Gebrauch machen, wenn besondere Gründe dieses fordern.

Abgekürzte Bezeichnung hauptaxiger einfacher Gestalten.

Wenn es sich bloſs von den wichtigsten Gestaltenarten handelt, nämlich von jenen, für welche keiner der Werthe von a′, R′, r′ die Grenzen zwischen 0 und ∞ überschreitet, d. h. wenn kein solcher Werth negativ ist[2] und wenn namentlich die Gröſse

1 Dasselbe gilt mit der gehörigen Veränderung für alle gleichstellig 2endigen 1fach pgliedrigen Gestalten, in denen p eine gerade Zahl ist; auch hier können je p Queraxen einer *beliebigen* 2ten Art nebst der Hauptaxe als vorzüglich wichtige Axen gelten.

2 Oder wenn von den flächenvollzähligen 1- und mmaſsigen 1fachen Gestalten auſser den ringsum endlich begrenzten nur solche betrachtet werden sollen, welche 1) Säulen oder 2 ⋊ pflächige Gegenseitenwandner, 2) pfach quersäulige 2⋊ tflächige Schiefwandner (welche bekanntlich für das 1- und 1maſsige Axenkreuz zu 4flächigen quersäuligen Schiefwandnern werden) und 3) 2flächige Tafeln sind.

der 1fachen Gestalt unberücksichtigt bleiben darf, so kann jedesmal (a:R:r) umgewandelt werden in $(\frac{a}{R}:1:\frac{r}{R})$ oder in (z:1:y) so daſs, wenn der Strahl R als Einheit betrachtet wird, z den Hauptstrahl a und y den Querstrahl r bedeutet. Es kann dann für die flächenvollzähligen Gestalten das Zeichen z | y die Stelle von (z:1:y) vertreten. Man erhält nämlich

1) für die 2×tflächigen Ebenrandner statt (a:R:r) hier (z:1:y), also (z | y)[1]

2) für die tflächigen Ebenrandner
 1ster Stellung $(z:1:\frac{1}{q})$ $(z \mid \frac{1}{q})$[2]
 2ter Stellung (z:1:q) (z | q)

3) für die 2×pflächige Säule (∞:1:y) (∞ | y)

4) für die pflächige Säule
 1ster Stellung $(\infty:1:\frac{1}{q})$ $(\infty \mid \frac{1}{q})$
 2ter Stellung (∞:1:q) (∞ | q)

5) für die 2×tflächigen pfach quersäuligen Schiefwandner 1ster Stellung (z:1:∞) (z | ∞)
 2ter Stellung (z:∞:y) hier $(\frac{1}{\infty}z:1:\frac{1}{\infty}y)$ $(\frac{1}{\infty}z \mid \frac{1}{\infty}y)$

6) für 2×pflächige Gegenseitenwandner
 1ster Stellung (∞:1:∞) (∞ | ∞)
 2ter Stellung (∞z:∞:y) hier $(z:1:\frac{1}{\infty}y)$ $(z \mid \frac{1}{\infty}y)$

7) für die Tafelflächner
 z:∞:∞y hier $\frac{1}{\infty}z:1:y$ $(\frac{1}{\infty}z \mid y)$

Die Vorzeichen + und —, durch welche die verschiedenen 1- und mmaſsigen Gestalten unterschieden werden, welche nur

während von den flächenhalbzähligen u. s. w. Gestalten auch nur die diesen Fällen entsprechenden 1fachen Gestalten berücksichtigt werden.

1 Wenn y > 1, so hat jede Gestalt die 1ste Stellung, wenn y < 1, die 2te.

2 $q = \text{Cos.}\frac{360^\circ}{2p}$, wie früher. Für p = 2 ist $q = \frac{1}{\infty}$ zu setzen und daher in diesem Falle $z \mid \frac{1}{q} = z \mid \infty$, $z \mid q = z \mid \frac{1}{\infty}y$, $\infty \mid \frac{1}{q} = \infty \mid \infty$, $\infty \mid q = \infty \mid \frac{1}{\infty}$, hier $= z \mid \frac{1}{\infty}y$.

die Hälfte oder den vierten oder den achten Theil der Flächen besitzen, die den flächenvollzähligen Gestalten dieser Art eigen sind, können hier natürlich blofs in Beziehung auf den Hauptstrahl z oder a und den Querstrahl y oder r berücksichtigt werden. Man erhält hierdurch Gestalten, in Beziehung auf welche sich diejenigen, welche von dem Vorzeichen bei R mit abhängen, als flächenhalbzählige verhalten, und es können die Verschiedenheiten, die von + oder — bei R herrühren, dadurch angedeutet werden, dafs in dem Zeichen y | z der Zwischenstrich | eine der folgenden Gestalten erhält: ⌉⌊ ⌋⌈] [.

Stellt nämlich die erste der nebenstehenden Figuren die beiden Flügelviertel α und α' dar, im Durchschnitte senkrecht auf r, vom Mittelpuncte des Strahlensystems aus gesehen, so ist α für den obern Hauptstrahl ein linkes und α' für den untern Hauptstrahl ein rechtes Flügelviertel. Das Zeichen ⌉⌊ bedeute linkes, das Zeichen ⌋⌈ aber rechtes Flügelviertel für den Hauptstrahl a, welcher dem Flügelviertel angehört, so ist, wie aus der Betrachtung der nebenstehenden Figuren erhellet,

(α) = + z ⌉⌊ + y	(α') = — z ⌋⌈ + y
(β) = + z ⌋⌈ + y	(β') = — z ⌉⌊ + y
(γ) = + z ⌉⌊ — y	(γ') = — z ⌋⌈ — y
(δ) = + z ⌋⌈ — y	(δ') = — z ⌉⌊ — y.

Man hat hierdurch die Bezeichnungen für die *ungleichendigen 1fach mgliedrigen 1- und mmafsigen Gestalten.*

Wenn (α) = (β) ist, so ist + z ⌉⌊ + y und + z ⌋⌈ + y zu vereinigen in + z | + y; man erhält auf solche Weise bei den *ungleichendigen* 2fach mgliedrigen Gestalten[1]

für (α) = (β)	das Zeichen	+ z \| + y
(γ) = (δ)	- -	+ z \| — y
(α') = (β')	- -	— z \| + y
(γ') = (δ')	- -	— z \| — y

und daher auch bei den ungleichendigen 2fach pgliedrigen Gestalten

(α) = (β) = (γ) = (δ) = + z | y

(α') = (β') = (γ') = (δ') = — z | y.

1 Der Fall, wobei (α) = (δ) und (γ) = (β) und (a') = (δ') und (γ') = (β') ist, läfst sich auf diesen hier dadurch reduciren, dafs man R mit r vertauscht, also dasjenige r nennt, was durch R bezeichnet ist, und umgekehrt.

Ist

$$(\alpha) = (\beta') \text{ so hat man } z \rceil\!\lfloor + y$$
$$(\beta) = (\alpha') \text{ - - - } z \rfloor\!\lceil + y$$
$$(\gamma) = (\delta') \text{ - - - } z \rceil\!\lfloor - y$$
$$(\delta) = (\gamma') \text{ - - - } z \rfloor\!\lceil - y.$$

Ebenso

$$(\alpha) = (\delta') \text{ - - - } \pm z \rceil\!\lfloor \pm y$$
$$(\beta) = (\gamma') \text{ - - - } \pm z \rfloor\!\lceil \pm y$$
$$(\gamma) = (\beta') \text{ - - - } \pm z \rceil\!\lfloor \mp y$$
$$(\delta) = (\alpha') \text{ - - - } \pm z \rfloor\!\lceil \mp y.$$

Beide Bezeichnungen sind gültig für *ebenbildlich 2endige 1fach mgliedrige* 1- und mmafsige *Gestalten*, je nachdem sie als flächenhalbzählige betrachtet werden, von den *gleichstellig 2endigen* 2fach mgliedrigen[1], für welche

$$(\alpha) = (\beta') = (\beta) = (\alpha') = z \mid + y$$
$$(\gamma) = (\delta') = (\delta) = (\gamma') = z \mid - y,$$

oder als flächenhalbzählige Gestalten von den *gerenstellig 2endigen 2fach mgliedrigen*, für welche

$$(\alpha) = (\delta') = (\beta) = (\gamma') = \pm z \mid \pm y$$
$$(\gamma) = (\beta') = (\delta) = (\alpha') = \pm z \mid \mp y.$$

Für den Fall, wobei $(\alpha) = (\alpha')$ gesetzt werden mufs, dient das Zeichen[2]], um anzudeuten, dafs ein in Beziehung zum obern Ende der Hauptaxe linkes Flügelviertel und ein in Beziehung zum unteren Ende der Hauptaxe sich als rechtes verhaltendes als gleichwerthig gesetzt seyen. Für $(\beta) = (\beta')$ hat man das entgegengesetzte Zeichen [. Es ist daher für die *gleichstellig 2endigen 1fach mgliedrigen Gestalten*

$$(\alpha) = (\alpha') = z\,] + y$$
$$(\beta) = (\beta') = z\,[+ y$$
$$(\gamma) = (\gamma') = z\,] - y$$
$$(\delta) = (\delta') = z\,[- y$$

und daher auch für die *gleichstellig 2endigen 1fach pgliedrigen* 1- und mmafsigen *Gestalten*

1 Wäre $(\alpha) = (\delta) = (\alpha') = (\delta')$ und $(\beta) = (\gamma) = (\beta') = (\gamma')$, so nenne man r, was mit R bezeichnet ist, und umgekehrt R, was r heifst, und man hat dann die Bezeichnung für diesen Fall.

2 Gewissermafsen eine Verbindung von $\rceil\!\lfloor$, so wie [eine Verbindung von $\rfloor\!\lceil$.

$$(\alpha) = (\alpha') = (\gamma) = (\gamma') = z\,]\,y$$
$$(\beta) = (\beta') = (\delta) = (\delta') = z\,[\,y.$$

Wenn $(\alpha) = (\gamma)$ ist, so wird $+z\rceil\!\lfloor+y$ und $+z\rceil\!\lfloor-y$ verbunden in $+z\rceil\!\lfloor y$; man hat daher für die *ungleichendigen 1fach pgliedrigen Gestalten*

$$(\alpha) = (\gamma) = +z\rceil\!\lfloor y$$
$$(\beta) = (\delta) = +z\rfloor\!\lceil y$$
$$(\alpha') = (\gamma') = -z\rfloor\!\lceil y$$
$$(\beta') = (\delta') = -z\rceil\!\lfloor y.$$

Wenn $(\alpha) = (\gamma')$ ist, so ist zu verbinden $+z\rceil\!\lfloor+y$ mit $-z\rfloor\!\lceil-y$, d. h. ein für den oberen Hauptstrahl als links sich verhaltendes mit einem für den unteren Hauptstrahl als rechts zu betrachtenden Flächenzeichen, daher $\pm z\,]\,\pm y$ statt $\left\{\begin{matrix}+z\rceil\!\lfloor+y\\ -z\rfloor\!\lceil-y\end{matrix}\right\}$.

Es ist daher für die gerenstellig 2endigen 1fach mgliedrigen Gestalten

$$(\alpha) = (\gamma') = \pm z\,]\,\pm y$$
$$(\beta) = (\delta') = \pm z\,[\,\pm y$$
$$(\gamma) = (\alpha') = \pm z\,]\,\mp y$$
$$(\delta) = (\beta') = \pm z\,[\,\mp y.$$

Ist endlich $(\alpha) = (\beta) = (\gamma) = \delta = (\alpha') = (\beta') = (\gamma') = (\delta')$, so ist das Zeichen für die flächenvollzähligen 1- und mmafsigen d. h. für die gleichstellig 2endigen 2fach pgliedrigen Gestalten $= z \mid y$.

Bezeichnung der hauptaxenlosen Gestalten.

Was die hauptaxenlosen Gestalten anlangt, so werden auch diese am ungekünsteltsten durch Angabe der Strahlen der 3 wichtigsten Arten von Axen derselben bestimmen.

Bei der allgemeinsten Gestalt im 8strahligen Systeme, dem 48wandigen Dreieckflächner, genügt die Angabe eines 4gliedrigen Strahles a, eines 2gliedrigen R und eines 3gliedrigen Strahles r.

Das Zeichen (a, R, r) ist[1]

beim		oder	oder
8flächner . .	$(1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{3}\sqrt{3})$	$(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\sqrt{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
Würfel . . .	$(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$	$(1, 2\sqrt{\frac{1}{2}}, 3\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
12-Rautenflächner	$(1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$	$(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
8 ⨯ 3wandigen Keilflächner .	$(1, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \varrho\sqrt{3})$	$(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, \mathfrak{d}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3}, x\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
6 ⨯ 4wandigen Keilflächner .	$(1, \psi\sqrt{2}, \psi\sqrt{3})$	$(1, \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{3}{2}\mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
24wandigen Lanzenflächner .	$(1, \psi\sqrt{2}, \frac{\psi}{2-\psi}\sqrt{3})$	$(1, \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{3\mathfrak{y}}{4-\mathfrak{y}}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3}, \frac{4x}{3x+1}\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$
48wandigen Dreieckflächner .	$(1, \psi\sqrt{2}, \varrho\sqrt{3})$	$(1, \mathfrak{y}\sqrt{\frac{1}{2}}, \mathfrak{d}\sqrt{\frac{1}{3}})$	$(x\sqrt{3}, y\sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$

Jede Begrenzungsebene des 48wandigen Dreieckflächners befindet sich in einer Zelle, für welche, wenn man sie als eine Ecke betrachtete, ein 4gliedriger Strahl a, ein 3gliedriger r und ein 2gliedriger Strahl R als Kantenlinien erscheinen, während ihre 3 Winkel bestimmt werden durch

$$\text{Tg. } m = 1, \quad \text{also } m = 45^\circ$$
$$\text{Tg. } n = \sqrt{2} \quad - \quad n = 54^\circ\ 44' \ldots,$$
$$\text{Tg. } l = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad - \quad l = 35^\circ\ 16'$$

wenn m der Winkel von a gegen R und n der Winkel von a gegen r und l der Winkel von r gegen R ist. Bezeichnet man auch hier wieder die Bestimmungsstrahlen einer und derselben Art, um sie von einander unterscheiden zu können, mit Nummern, so hat man für a

a	a	a	a	a	a
1	2	3	4	5	6

für R

R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

für r

r	r	r	r	r	r	r	r
1	2	3	4	5	6	7	8

1 Gestalten des 2fach 3gliedrig 8strahligen Systems, bei denen einer oder zwei von den 3 Strahlen a, R und r unendlich oder null- oder negativwerthig sind, müssen *hier* von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Die derartigen — Zeichen sind auch hier wieder mit dem Strahle, welchen sie betreffen, im Zeichen der Gestalt in Klammern () einzuschliefsen [z. B. (— a, (— R), r)], um von den — Zeichen, die sich auf den Charakter der Strahlenpermutationen beziehen, unterschieden zu werden.

und es lassen sich dann die einzelnen Zellen wieder unterscheiden, z. B. a_1, R_1, r_1 oder a_1, R_2, r_1 u. s. w.

Die Abbildung stellt einen Würfel dar, in welchem die 6 Fig. 313. Strahlen a durch Linien wie — — . — — ., die 12 Strahlen R durch Linien wie — . . — . . — . ., die 8 Strahlen r durch solche wie — . — . — . unterschieden sind. Jeder solcher Strahl ist an seinem Ende mit dem ihm beigelegten Namen $R_1, R_2, R_3 \ldots$ $a_1, a_2, a_3 \ldots$ $r_1, r_2, r_3 \ldots$ versehen. Die Numerirung der Strahlen *einer* Art ist als eine willkürlich gewählte zu betrachten. Statt des Würfels könnte jede andere ringsum geschlossene 2fach 3gliedrig 8strahlige Gestalt, z. B. ein 48wandiger Dreieckflächner, gesetzt werden, indem hier blofs der Zweck ist, die sämmtlichen Bestimmungsstrahlen in ihren gegenseitigen Lagenverhältnissen darzustellen.

Setzt man nun: es sey für die Zelle $a_1 R_1 r_1$ jeder der 3 Strahlen positiv, so mufs die Permutation der Strahlen a sowohl und die der Strahlen R, als auch jene der Strahlen r (welche z. B. entsteht, wenn man einen 1fach 1gliedrigen, in der Zelle $a_1 R_1 r_1$ befindlichen, Strahl x senkrecht aufwärts richtet und dann die Strahlen einer Art in der Ordnung aufzählt, in welcher sie mit dem Strahle x mehr und mehr divergiren, so dafs der stärker divergirende nach dem minder divergirenden folgt) als eine positive gesetzt werden.

Man erhält die Permutation der Strahlen a, welche das + oder — Zeichen des Strahles a einer andern Zelle z. B. $a_1 R_2 r_1$ bestimmt, wenn man den dem Strahle x in $a_1 R_1 r_1$ gleichwerthigen Strahl in der Zelle $a_1 R_2 r_1$ senkrecht stellt und dann die Strahlen a in der Ordnung aufzählt, gemäfs welcher jeder folgende mit dem Strahle ξ mehr divergirt, als der vorhergehende. Auf ähnliche Weise wird die Permutation der Strahlen R oder r gefunden, welche für den Strahl R oder r das in dieser oder jener Zelle gültige + oder — Zeichen bestimmt. Es ist jedoch nicht gerade nothwendig, dafs man zur Bestimmung des + oder

— Zeichens *für R* in einer Zelle denselben Strahl x senkrecht aufwärts gerichtet stelle, welcher bei der Bestimmung des + oder — Zeichens *für a* in dieser Zelle gedient hat, nur muſs für jeden Strahl R (oder r) in *jeder* Zelle so verfahren werden, wie in der Zelle $\underset{111}{aRr}$ mit R (oder r) der Anfang gemacht worden ist.

Das + oder — Zeichen, welches einer jeden Permutation zukommt, wird auf die früher angegebene Weise aufgefunden und dem Strahle a oder R oder r der fraglichen Zelle, welcher als Stellvertreter dieser Permutation angesehen wird, beigelegt. Es entspricht sonach

in der Zelle	der Strahl a der Permutation	der Strahl R der Permutation	der Strahl r der Permutation
a R r	a a a a a a	R R R R R R R R R R R R	r r r r r r r r
1 1 1	+ 1 4 6 5 3 2	+ 1 2 5 3 4 6 7 10 9 11 8 12	+ 1 4 2 3 5 8 6 7
a R r			
1 2 1	+ 1 6 4 3 5 2	— 2 1 6 3 10 5 11 4 9 7 12 8	+ 1 2 4 3 5 6 8 7
4 1 1	+ 4 1 6 5 2 3	— 1 3 4 2 5 7 6 11 8 10 9 12	+ 1 4 5 8 2 3 6 7
1 1 4	— 1 4 5 6 3 2	+ 1 5 2 4 3 6 7 9 10 8 11 12	+ 4 1 3 2 8 5 7 6
4 1 4	— 4 1 5 6 2 3	— 1 4 3 5 2 7 6 8 11 9 10 12	+ 4 1 8 5 3 2 7 6

Es ist nicht nöthig, auch die übrigen Permutationen aufzustellen, da aus den hier bereits angegebenen erhellet:

1) daſs für je 2 Zellen (wie $\underset{111}{aRr}$ und $\underset{121}{aRr}$), welche einen 4gliedrigen und einen 3gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 4gliedrige Strahl sowohl als auch der 3gliedrige in *beiden gleiche* Vorzeichen hat, während dem 2gliedrigen Strahle der einen ein — Zeichen gebührt, wenn der der andern ein + Zeichen hat;

2) daſs für je 2 Zellen (wie $\underset{111}{aRr}$ und $\underset{114}{aRr}$ oder wie $\underset{411}{aRr}$ und $\underset{444}{aRr}$), welche einen 4gliedrigen und einen 2gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 4gliedrige Strahl für die eine negativ zu setzen ist, wenn er für die andere positiv ist, daſs aber dem 2gliedrigen Strahle, so wie den beiden 3gliedrigen Strahlen in beiden Zellen *gleiche* Vorzeichen zustehen;

3) dafs für 2 Zellen, welche (wie $\underset{111}{aRr}$ und $\underset{411}{aRr}$ oder wie $\underset{114}{aRr}$ und $\underset{414}{aRr}$) einen 2gliedrigen und einen 3gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, der 3gliedrige Strahl für beide Zellen gleiche, der 2gliedrige aber ungleiche Vorzeichen besitze, während die 4gliedrigen Strahlen beider Zellen gleiche Vorzeichen haben;

4) dafs der 3gliedrige Strahl, wie aus den drei vorhergehenden Sätzen folgt, in jeder Zelle positiv zu setzen sey, wenn der der einen als positiv gesetzt ist.

Stellt man sich daher unter den Quadraten $\underset{1432}{rrrr}$ und $\underset{1485}{rrrr}$ Fig. 314.
eben so bezeichnete Flächen des Würfels $\underset{12345678}{rrrrrrrr}$ vor, 313.
sieht man ferner jedes der Dreiecke $\underset{111}{aRr}$ oder $\underset{114}{aRr}$ u. s. w. als 314.
den Stellvertreter einer der 48 Zellen an und schreibt in jeden Winkel dieser Dreiecke das Vorzeichen ein, welches dem Strahle, der sich in dem Scheitel des Winkels endigt, für die Zelle gebührt, deren Stellvertreter das fragliche Dreieck ist, so läfst sich aus Figur 314 leicht die Figur 315 ableiten. Sie stellt die Fig. 315.
Gesammtheit der Flächen des Würfels (Netz des Würfels) dar in einer solchen Verbindung, dafs man, wenn jede solche Fläche mit der andern durch ein Scharniergelenk[1] verbunden und um dieses beweglich wäre, durch Benutzung der Bewegung,

1 Man verfertigt aus Pappe Modelle von ebenflächigen Körpern dadurch, dafs man Netze derselben auf ein ebenes Stück Pappendeckel zeichnet, diese ihren äufseren Grenzlinien gemäfs beschneidet und diejenigen Grenzlinien der einzelnen Flächen, mit welchen sie im Netze an einander stofsen, durch einen, nur die halbe Dicke der Pappe durchschneidenden Einschnitt zu Stellvertretern der oben erwähnten Scharniergelenke umwandelt und dann nach und nach durch Benuzzung der so gestatteten Bewegung die Umschliefsung eines körperlichen Raums zu bewirken sucht, indem man die Flächen an den Kanten, welche sich bilden, da wo es nöthig ist, vorläufig mit (einer hierzu vorzüglich geeigneten möglichst schlechten Sorte von) Siegellack heftet, welche nachher zu besserer Befestigung mit Leim überstrichen werden. Die ersten *Krystallmodelle* der Art hat Augustin Philipp Betzold gefertigt. Vergleiche Wackernagel's Netze zu Raumer's ABC-Buch der Krystallkunde. Berlin 1822.

die auf diese Weise gestattet ist, leicht einen würfelförmigen Raum mittelst dieser Flächen einzuschliefsen im Stande wäre.

Es zerfallen sonach die 48 Zellen in folgende 4 Arten:

		oder
α)	$+a, +R, +r$	$= +a, +R, r$
β)	$+a, -R, +r$	$= +a, -R, r$
γ)	$-a, -R, +r$	$= -a, -R, r$
δ)	$-a, +R, +r$	$= -a, +R, r.$

Man sieht hieraus, dafs es am zweckmäfsigsten ist, den 3gliedrigen Strahl $r = 1$ zu setzen und den Werth, welchen a hat, durch x, den aber, welchen R hat, durch y zu bezeichnen, wenn von Flächen 3gliedrig 4axiger Gestalten oder von diesen Gestalten selbst die Rede ist und es nicht auf die Gröfse der einfachen Gestalt ankommt. Der allgemeinste Ausdruck für (a, R, r) ist dann $= (x\sqrt{3}, y\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 1)$; aus ihm können füglich die Gröfsen $\sqrt{3}$ und $\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ und 1 wegbleiben, wenn man unter $x \mid y$ sich stets $(x\sqrt{3}, y\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 1)$ vorstellt, so dafs
jeder Strahl

$a = x\sqrt{3}$	= dem xfachen des Strahles a beim 8flächner		
$R = y\sqrt{\tfrac{3}{2}}$	= - y - - - R - -		
$r = 1$	= - 1 - - - r - -		

angesehen wird, mithin blofs die Angabe von x und y nothwendig bleibt.

Das Zeichen $x \mid y = (a, R, r)$, in welchem kein Vorzeichen angegeben ist, bedeutet daher eine *flächenvollzählige* 3*gliedrig* 4*axige* d. h. eine (2fach 3gliedrig) 8*strahlige* 1fache *Gestalt*, in welcher die Zellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle als einander gleichwerthig betrachtet werden müssen[1].

1 Diese Gestalt wird, wenn $x \mid y$ gleich ist:

$1 \mid 1$ der 8flächner,
$\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3}$ der Würfel,
$\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3}$ der 12-Rautenflächner,
$x \mid x$ ein 8 ⨯ 3wandiger Keilflächner,
$x \mid \frac{2}{3}$ ein 6 ⨯ 4wandiger Keilflächner,
$x \mid \frac{4x}{3x+1}$ ein 24wandiger Lanzenflächner,
$x \mid y$ ein 48wandiger Dreieckflächner.

Aufser den Gestalten $1 \mid 1$ und $\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3}$ und $\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3}$ kommen an Krystallgestalten gewöhnlich vor 2 verschiedene 8 ⨯ 3wandige Keilflächner, nämlich $\frac{5}{6} \mid \frac{5}{6}$ der eine und $\frac{8}{9} \mid \frac{8}{9}$ der andere; 3 verschiedene 6 ⨯ 4-wandige Keilflächner, erstlich $\frac{5}{9} \mid \frac{2}{3}$, zweitens $\frac{1}{2} \mid \frac{2}{3}$ und drittens $\frac{4}{9} \mid \frac{2}{3}$;

Eins der beiden Zeichen $+x \mid y = (+a, R, r)$, welches die Flächen (α) und (β) umfafst, oder $-x \mid y = (-a, R, r)$, welches für (γ) und (δ) gilt, bedingt eine flächenhalbzählige (hemiedrische) *3gliedrig 4axige Gestalt* und zwar eine (2fach 3gliedrig) *4strahlige*. Es bedeutet also $+x \mid y$ die fragliche Gestalt der ersten und $-x \mid y$ jene der 2ten Stellung für ein und dasselbe unbewegt bleibende Strahlensystem. Diejenigen Zeichen, bei denen $y = \frac{2}{3}$ ist, bedeuten in ihren beiden Formen, nämlich $+x \mid \frac{2}{3}$ und $-x \mid \frac{2}{3}$, eine und dieselbe Gestalt in einer und derselben Stellung oder vielmehr es ist bei ihnen kein Unterschied zwischen 1ster und 2ter Stellung; daher ist:

für den Würfel $+\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \mid \frac{2}{3}$
für den 12-Rautenflächner $+\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \mid \frac{2}{3}$
für den 6×4wandigen Keilflächner $+x \mid \frac{2}{3} = -x \mid \frac{2}{3}$.

Uebrigens ist

$+1 \mid 1$ der 4flächner 1ster Stellung,
$-1 \mid 1$ der 4flächner 2ter Stellung,
$+x \mid x$ ein 12-Lanzenflächner 1ster Stellung,
$-x \mid x$ ein 12-Lanzenflächner 2ter Stellung,
$+x \mid \frac{4x}{3x+1}$ ein 4×3wandiger Keilflächner 1ster Stellung,
$-x \mid \frac{4x}{3x+1}$ ein 4×3wandiger Keilflächner 2ter Stellung,
$+x \mid y$ ein 24wandiger Dreieckflächner 1ster Stellung,
$-x \mid y$ ein 24wandiger Dreieckflächner 2ter Stellung;

für $y = x$ ist:

beim 8flächner $1 \mid +1 = 1 \mid -1$
beim 12-Rautenflächner $\frac{2}{3} \mid +\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \mid -\frac{2}{3}$
bei den 8×3wandigen Keilflächnern $x \mid +x = x \mid -x$;

für $y = \frac{4x}{3x+1}$ ist:

beim 8flächner $1 \mid +1 = 1 \mid -1$
beim Würfel $\frac{1}{3} \mid +\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \mid -\frac{2}{3}$
bei den 24wandigen Lanzenflächnern $x \mid +\frac{4x}{3x+1} = x \mid -\frac{4x}{3x+1}$.

ferner 2 verschiedene 24wandige Lanzenflächner, erstlich $\frac{2}{3} \mid \frac{8}{9}$ und zweitens $\frac{5}{9} \mid \frac{5}{6}$, und endlich 3 verschiedene 48wandige Dreieckflächner, erstlich $\frac{2}{3} \mid \frac{4}{5}$, zweitens $\frac{3}{5} \mid \frac{3}{4}$ und drittens $\frac{7}{12} \mid \frac{7}{9}$.

Dagegen ist außerdem

$x \mid + \frac{2}{3}$ das Zeichen für einen 12wandigen Sterzenflächner 1ster Stellung,

$x \mid - \frac{2}{3}$ das Zeichen für einen solchen Körper 2ter Stellung [1].

Eins der beiden Zeichen, nämlich $x \mid + y = (a, +R, r)$, welches (α) und (δ) begreift, und $x \mid - y = (a, -R, r)$, welches (β) und (γ) als gleichwerthig umfaßt, bestimmt eine *flächenhalbzählige* 3*gliedrige* 4*axige Gestalt* und zwar eine (1fach 3gliedrig) 2 $\times$ 4*strahlige.* Ist dabei $y = x$ oder $y = \frac{4x}{3x+1}$, so fällt der Unterschied 1ster und 2ter Stellung, welcher zwischen $+ x \mid y$ und $- x \mid y$ vorhanden ist, hinweg; daher ist

$x \mid + y$ das Zeichen für einen 24wandigen Viereckflächner 1ster Stellung,

$x \mid - y$ das Zeichen für einen solchen 2ter Stellung [2].

Jedes der beiden Zeichen:

$\pm x \mid \pm y = (\pm a, \pm R, r)$, welches für ($\alpha$) und ($\gamma$) gilt, und
$\pm x \mid \mp y = (\pm a, \mp R, r)$, welches ($\beta$) und ($\delta$) als gleichwerthig betrifft,

liefert eine *flächenhalbzählige* 3*gliedrig* 4*axige Gestalt,* welche eine 1*fach* 3*gliedrig* 8*strahlige* ist. Die erste dieser beiden Gestalten $\pm x \mid \pm y$ verhält sich zur 2ten gegenbildlich, jene ist eine rechte, wenn diese eine linke genannt wird.

Wenn y einen der 3 Werthe $y = \frac{4x}{3x+1}$ oder $y = x$ (also auch $y = x = 1$) oder $y = \frac{2}{3}$ hat, so verschwindet der Unterschied zwischen der rechten Gestalt $\pm x \mid \pm y$ und der linken $\pm x \mid \mp y$, sofern sie als einfache Gestalt auftritt; außerdem aber ist dieser Unterschied vorhanden und die einfachen hierher gehörigen Gestalten sind die 24wandigen Fünfeckflächner; z. B. $\pm \frac{2}{3} \mid \pm \frac{4}{5}$ und $\pm \frac{2}{3} \mid \mp \frac{4}{5}$ oder $\pm \frac{3}{5} \mid \pm \frac{3}{4}$ und $\pm \frac{3}{5} \mid \mp \frac{3}{4}$ und so weiter.

1 z. B. $\frac{5}{9} \mid + \frac{2}{3}$ und $\frac{5}{9} \mid - \frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2} \mid + \frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2} \mid - \frac{2}{3}$ oder $\frac{4}{9} \mid + \frac{2}{3}$ und $\frac{4}{9} \mid - \frac{2}{3}$.

2 z. B. $\frac{2}{3} \mid + \frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3} \mid - \frac{4}{5}$ oder $\frac{3}{5} \mid + \frac{3}{4}$ und $\frac{3}{5} \mid - \frac{3}{4}$ oder $\frac{7}{12} \mid + \frac{7}{9}$ und $\frac{7}{12} \mid - \frac{7}{9}$.

Jedes der Zeichen

$$+x\,|+y = (+a, +R, r) = (\alpha)$$
$$+x\,|-y = (+a, -R, r) = (\beta)$$
$$-x\,|-y = (-a, -R, r) = (\gamma)$$
$$-x\,|+y = (-a, +R, r) = (\delta)$$

giebt eine *flächenviertelszählige* 3*gliedrig* 4*axige* d. h. eine 1*fach* 3*gliedrig* 4*strahlige* einfache *Gestalt*. Die beiden Gestalten $+x\,|+y$ und $-x\,|-y$ sind ebenbildlich; dasselbe gilt für $+x\,|-y$ und $-x\,|+y$. Zwei Gestalten $+x\,|+y$ und $+x\,|-y$ (oder $-x\,|-y$ und $-x\,|+y$) verhalten sich gegenbildlich. Wenn

$+x\,|+y$ die rechte solche Gestalt 1ster Stellung bedeutet, so ist auch

$-x\,|-y$ die rechte 2ter Stellung,

$+x\,|-y$ die linke 1ster Stellung,

$-x\,|+y$ die linke 2ter Stellung.

Wenn $y = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{1}{2}$ oder $= \frac{2}{3}$ ist, so fällt die Unterscheidung in rechte und linke Gestalten, so wie in solche 1ster und 2ter Stellung weg, wenn die Gestalt als einfache auftritt. Wenn $y = \frac{2}{3}$, so ist $+x\,|+\frac{2}{3}$ und $-x\,|+\frac{2}{3}$ ein 12wandiger Sterzenflächner von einer und derselben Form und Stellung. Dasselbe gilt für $-x\,|-\frac{2}{3}$ und $+x\,|-\frac{2}{3}$ für den 12wandigen Sterzenflächner 2ter Stellung. Bei der nämlichen Bedingung gehören die beiden Ausdrücke $+x\,|+\frac{2}{3}$ und $-x\,|+\frac{2}{3}$ einem und demselben 12wandigen Sterzenflächner 1ster Stellung an. Ebenso giebt $-x\,|-\frac{2}{3}$ sowohl als $+x\,|-\frac{2}{3}$ einen solchen Körper 2ter Stellung.

Wenn $y = x$ ist, so ist $+x\,|+x$ sowohl als $+x\,|-y$ ein 12-Lanzenflächner 1ster und $-x\,|-y$ sowohl als $-x\,|+y$ ein 12-Lanzenflächner 2ter Stellung. Wenn $y = \frac{4x}{3x+1}$ ist, so ist $+x\,|+\frac{4x}{3x+1}$ sowohl als $+x\,|-\frac{4x}{3x+1}$ ein 4×3-wandiger Keilflächner 1ster und $-x\,|-\frac{4x}{3x+1}$ sowohl als auch $-x\,|+\frac{4x}{3x+1}$ ein solcher 2ter Stellung. Aufserdem ist $+x\,|+y$ ein 12wandiger Fünfeckflächner, der von dem ihm ebenbildlichen $-x\,|-y$ durch verschiedene Stellung sich un-

terscheidet, während er zu den beiden in verschiedenen Stellungen befindlichen einander ebenbildlichen linken Körpern $+x \mid -y$ und $-x \mid +y$ sich gegenbildlich verhält.

Auf ähnliche Weise sind bei 3gliedrig 10axigen Gestalten 120 Zellen vorhanden, von denen jede als eine Ecke betrachtet werden kann, deren Scheitel oder Spitze im Mittelpuncte des Körpers liegt und deren Kantenlinien zusammenfallen die eine mit einem 5gliedrigen Strahle a, die andere mit einem dazu nachbarlichen 2gliedrigen Strahle R und die 3te mit einem gegen beide nachbarlichen 3gliedrigen Strahle r, welche als die Bestimmungsstrahlen dieser Zelle betrachtet werden müssen, wenn man auch hier die 3 wichtigsten Arten von Axen bei genauer Bestimmung der verschiedenen Gestalten zum Grunde legt. Es ist für den 12flächner

$$(a, R, r) = (1, \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}-1), \sqrt{3\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}-2)).$$

Aus den oben gegebenen Formeln über die wichtigsten Verhältnisse einer 5kantigen 5winkligen Ecke mit Kanten von 120° lassen sich die Werthe des Ausdrucks (a, R, r) für den 20flächner und den 30-Rautenflächner leicht ableiten, so wie die allgemeinen Formen desselben für die 20 × 3wandigen Keilflächner und für die 60wandigen Lanzenflächner [1].

Nimmt man auch hier an, dafs in einer der Zellen jeder der drei Bestimmungsstrahlen a, R und r einer positiven Permutation der sämmtlichen Strahlen seiner Art entspreche und daher für diese Zelle als positiv zu setzen sey, und bestimmt man auf ähnliche Weise, wie bei den 3gliedrig 4axigen Gestalten angegeben ist, die Permutation der Strahlen a, so wie jene der Strahlen R und der Strahlen r für jede Zelle, so ergiebt sich:

1) dafs für jede Zelle der 5gliedrige Strahl derselben einer positiven Permutation der Strahlen seiner Art entspreche, mithin als ein positiver zu betrachten und mit + a zu bezeichnen sey;

2) dafs ebenso der 3gliedrige Strahl für jede Zelle einer positiven Permutation der sämmtlichen Strahlen seiner Art entspreche und also = + r zu setzen sey;

1 Vergleiche auch Rothe's Arbeiten: „Ueber die regulären geometrischen Körper, die daraus entstehenden Rhomboidalkörper und insbesondere über das Rhomboidal-Triacontaeder" in Kastner's Archiv f. d. ges. N. 1825. IV. 2. S. 1—180 und 3. S. 257—300.

3) dafs der 2gliedrige Strahl für je 2 Zellen, welche ihn und einen und denselben 5gliedrigen Strahl gemeinschaftlich haben, Permutationen der sämmtlichen Strahlen R mit entgegengesetztem Vorzeichen entspreche, also für die eine = + R, für die andere = — R zu setzen sey;

4) dafs eben so für 2 Zellen, welche einem und demselben 5gliedrigen und einem und demselben 3gliedrigen Strahle angehören, die Strahlen R Permutationen der Strahlen ihrer Art mit entgegengesetztem Vorzeichen entsprechen, so dafs also, wenn der eine für die fragliche ihm angehörige Zelle = + R ist, der andere für die seinige, von der die Rede ist, = — R zu setzen sey.

Der durch eine Abbildung versinnlichte Theil des Netzes eines 12flächners zeigt, wie auf solche Weise jeder Strahl R für 2 der ihm angehörigen Zellen als + R und für die beiden andern = — R zu setzen ist und wie 2 benachbarte 2gliedrige Strahlen sich in dieser Hinsicht verhalten. Jedes der 10 Dreiecke, in welche jedes der regelmäfsigen Fünfecke zerlegt ist, dient nämlich gewissermafsen als Stellvertreter einer der 120 Zellen, von denen nur 30 in der Abbildung angedeutet sind, aus denen die übrigen sich leicht ergänzen lassen. Fig. 316.

Alle Zellen sind daher entweder

= + a, + R, + r

oder = + a, — R, + r,

so dafs der Unterschied sich ausdrücken läfst durch a, + R, r und a, — R, r. Beachtet man das Vorzeichen bei R nicht, so hat man das Zeichen (a, R, r) für eine *flächenvollzählige 3gliedrig 10axige* d. h. für eine *2fach 3gliedrig 20strahlige Gestalt*. Achtet man aber auf diesen Unterschied, so bedingt jedes einzelne der beiden Zeichen (a, + R, r) und (a, — R, r) eine flächenhalbzählige 3gliedrig 10axige d. h. eine 1fach 3gliedrig 20strahlige Gestalt. Beide Gestalten ((a, + R, r) und (a, — R, r)) verhalten sich im Allgemeinen gegenbildlich. Dieses spricht sich aus bei den 60wandigen Fünfeckflächnern, bei welchen das Verhältnifs a : R : r ein solches ist, welches einem 120wandigen Dreieckflächner entsprechen würde, wenn von dem + oder — Zeichen bei R abgesehen würde. Ist dieses Verhältnifs aber kein solches, so sind die beiden Zeichen für eine Gestalt gültig, welche, als einfache Gestalt für sich betrachtet, ihrem Gegenbilde ebenbildlich ist.

Bezeichnung, welche eine und dieselbe Fläche in ihrer Erstreckung durch die verschiedenen Zellen eines 1- und m-mafsigen Axenkreuzes erhält.

Wenn eine Begrenzungsebene irgend einer hauptaxigen Gestalt über die Zelle hinaus, in welcher sie bestimmt wurde, verlängert gedacht und in ihrer unendlichen Ausdehnung, die ihr als einer unbegrenzten Ebene zusteht, betrachtet wird, so ist einleuchtend, dafs, wenn sie nicht durch den Mittelpunct des Strahlensystems geht, einer der folgenden Fälle statt finden müsse:

1) sie schneidet alle Bestimmungsaxen, wenn diese hinreichend verlängert werden, d. h. sie schneidet die halbe Anzahl der Strahlen a sowohl als die halbe Anzahl der Strahlen R und jene der Strahlen r;

2) eine Bestimmungsaxe liegt ihr parallel,

α) aber keine 2te; sie schneidet dann die halbe Anzahl aller Bestimmungsstrahlen weniger einen, der in jener ihr parallelen Axe liegt;

β) auch eine 2te Bestimmungsaxe liegt ihr parallel; dann schneidet sie blofs alle jene Bestimmungsaxen, die nicht in die Ebene fallen, in welcher jene beiden ihr parallelen Axen liegen.

Der erste Fall ist der allgemeinere, welcher den 2ten α und β einschliefst, weil man sagen kann: die der Ebene parallelen
Fig. 317 A. B. C. Axen würden von ihr in unendlicher Entfernung geschnitten. Es seyen A, B, C Mittelquerschnitte von solchen 2 × tflächigen Ebenrandnern, für welche $p = \frac{1}{2} t = 2m$ eine gerade Zahl 2, 4, 6 ... ist, so ergeben sich folgende Gesetze:

1) Bei dem Mittelquerschnitte A der 1- und 1mafsigen Gestalt schneidet die gehörig verlängerte Randkante ef nur bei *einer* oberen Zelle die beiden dieser angehörigen Strahlen R und r; bei dem der 1- und 2mafsigen B findet dieses in 3 oberen Zellen statt und bei dem der 1- und 3mafsigen C in 5 solchen oberen Zellen; bei dem der 1- und mmafsigen Gestalt wird dieses in 2m — 1 oberen Zellen der Fall seyn.

2) Eine Fläche (a′, R′, r′) wird sich daher durch 2m — 1 obere Zellen hin so erstrecken, dafs sie die 3 Bestimmungsstrahlen jeder dieser 2m — 1 Zellen schneidet, ohne dafs diese rück-

wärts über den Mittelpunct hinaus verlängert zu werden brauchen. Die Längenwerthe, welche den Strahlen a, R und r in jeder dieser 2m — 1 Zellen vom Mittelpuncte c an bis zu dem Puncte zukommen, in welchem sie sich mit der Verlängerung der Fläche (a′, R′, r′) schneiden, werden daher alle drei positive seyn. Wenn z. B. bei B für die durch den oberen Scheitel und durch die Linie d g gelegte Ebene der Ausdruck in der Zelle a′ R′ r′ = (a′, cf, ce) ist, so wird er in der Zelle a′ R′ r^IV für dieselbe Fläche = (a′, cf, cg), in der Zelle a′ R″ r′ aber = (a′, cd, ce). Fig. 317 B.

3) Dieselbe Fläche (a′, R′, r′) wird noch durch 2 obere Zellen (von denen die eine vor der ersten, die andere nach der letzten von den 2m — 1 erwähnten Zellen liegt) sich so erstrecken, daſs sie in jeder von beiden den Strahl a und einen der beiden übrigen Bestimmungsstrahlen derselben (R oder r), nicht aber auch den andern (r oder R), schneidet; von diesem aber, den sie nicht schneidet, wird sie die Verlängerung nach rückwärts über den Mittelpunct c hinaus schneiden, so daſs also dessen Werth ein negativer ist. Es wird also das Zeichen für die durch den oberen Scheitel (welcher hier mit s bezeichnet gedacht werden möge, während man den untern Scheitel als mit v bezeichnet sich vorstellen kann) und durch d g gelegte Ebene s d g in der Zelle a′ R^IV r^IV, da a = cs ist, = (cs, (— cd), cg), in der Zelle a′ R″ r″ aber = (cs, cd, — cg) werden müssen.

4) Sie durchschneidet ferner die 2m — 1 noch übrigen oberen Zellen so, daſs sie nur den Hauptstrahl a derselben schneidet, nicht aber deren Strahlen R und r, vielmehr schneidet sie die rückwärts über den Mittelpunct c hinausgehenden Verlängerungen dieser Strahlen, und es steht daher dem Strahle R sowohl als auch dem Strahle r in jeder von diesen Zellen für die Fläche s d g ein negativer Längenwerth zu. In der Zelle a′ R^IV r‴ wird daher für die Fläche s d g das Zeichen = (cs, (- cd), (- ce)), in der Zelle a′ R‴ r‴ aber = (cs, (-cf), (-ce)) und in der Zelle a′ R‴ r″ gebührt der Fläche s d g das Zeichen (cs, (— cf), (— cg)).

5) In 2m — 1 unteren Zellen, die jenen unter 2. aufgeführten anliegen, schneidet die fragliche Fläche (s d g) die beiden Querstrahlen R w r, aber nicht den Hauptstrahl a″ derselben, sondern dessen Verlängerung nach rückwärts über den Mittelpunct c hinaus. Für diese Zellen wird also der Längenwerth

von a″ ein negativer. In der Zelle a″ R′ r′ ist die Fläche s d g = ((— c s), c f, c e), in der Zelle a″ R′ r^{IV} wird s d g = ((— c s), c f, c g), in der Zelle a″ R″ r′ aber = ((— c s), c d, c e).

6) In den beiden unteren Zellen, die den unter 3. aufgeführten oberen anliegen, wird außer a″ auch noch der eine der beiden einer solchen Zelle angehörigen Strahlen R oder r einen negativen Längenwerth erhalten. Es ist also in a″ $R^{IV} r^{IV}$ die Fläche s d g = ((— c s), (— c d), c g), in a″ R″ r″ aber ist s d g ((— c s), c d, (— c g)).

7) In den 2 m — 1 übrigen unteren Zellen wird keiner von den 3 einer solchen Zelle angehörigen Strahlen a, R und r durch die fragliche Fläche s d g geschnitten, wohl aber schneidet diese die Verlängerung dieser Strahlen über den Mittelpunct hinaus. Die Fläche s d g wird also, wenn sie auf eine dieser 2 m — 1 Zellen, welche sie nicht durchschneidet, bezogen und mittelst einer solchen bezeichnet werden soll, für jeden der Strahlen a, R und r in dieser Zelle einem negativen Längenwerthe entsprechen. Demnach ist in a″ R^{IV} r‴ die Fläche s d g

= ((— c s), (— c d), (— c e)),

in a″ R‴ r‴ ist s d g

= ((— c s), (— c f), (— c e)),

in a″ R‴ r″ aber ist s d g

= ((— c s), (— c f), (— c g)).

Es versteht sich, daſs (— c f) z. B. bedeutet: es soll in dem Strahle R‴ ein Stück = c f abgeschnitten werden, welches aber in der der Richtung c R‴ entgegengesetzten Richtung vom Puncte c anfangend zu nehmen ist.

Nennt man unter den oberen Zellen die Zelle a′ R′ r′ die *Anfangszelle* für die Fläche s d g und die Zelle a′ R″ r′ die erste folgende oder + 1ste, folglich a′ R″ r″ die 2te folgende oder + 2te, so wird die Zelle a′ R′ r^{w} (wo r^{w} wieder den mit der höchsten Zeigezahl w versehenen Strahl seiner Art bedeutet) die erste vorhergehende oder — 1ste seyn. Eben so ist dann a″ R′ r′ die untere 0te oder Anfangszelle, a″ R″ r′ die + 1ste oder die erste folgende u. s. w. Es hat dann das Zeichen einer Fläche s d g:

Bei der 1- und 1mafsigen Gestalt A Fig. 317 A.

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	R	r		a	R	r
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te oder — 4te	+	+	+	0te oder — 4te	—	+	+
+1- - —3-	+	—	+	+1- - —3-	—	—	+
+2- - —2-	+	—	—	+2- - —2-	—	—	—
+3- - —1-	+	+	—	+3- - —1-	—	+	—

Bei der 1- und 2mafsigen Gestalt B Fig. 317. B.

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	R	r		a	R	r
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te oder — 8te	+	+	+	0te oder — 8te	—	+	+
+1- - —7-	+	+	+	+1- - —7-	—	+	+
+2- - —6-	+	+	—	+2- - —6-	—	+	—
+3- - —5-	+	—	—	+3- - —5-	—	—	—
+4- - —4-	+	—	—	+4- - —4-	—	—	—
+5- - —3-	+	—	—	+5- - —3-	—	—	—
+6- - —2-	+	—	+	+6- - —2-	—	—	+
+7- - —1-	+	+	+	+7- - —1-	—	+	+

Bei der 1- und 3mafsigen Gestalt C Fig. 317 C.

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles			in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles		
	a	R	r		a	R	r
	das Vorzeichen				das Vorzeichen		
0te oder — 12te	+	+	+	0te oder — 12te	—	+	+
+ 1- - — 11-	+	+	+	+ 1- - — 11-	—	+	+
+ 2- - — 10-	+	+	+	+ 2- - — 10-	—	+	+
+ 3- - — 9-	+	—	+	+ 3- - — 9-	—	—	+
+ 4- - — 8-	+	—	—	+ 4- - — 8-	—	—	—
+ 5- - — 7-	+	—	—	+ 5- - — 7-	—	—	—
+ 6- - — 6-	+	—	—	+ 6- - — 6-	—	—	—
+ 7- - — 5-	+	—	—	+ 7- - — 5-	—	—	—
+ 8- - — 4-	+	—	—	+ 8- - — 4-	—	—	—
+ 9- - — 3-	+	+	—	+ 9- - — 3-	—	+	—
+10- - — 2-	+	+	+	+10- - — 2-	—	+	+
+11- - — 1-	+	+	+	+11- - — 1-	—	+	+

Bei der 1- und mmafsigen Gestalt, wenn ($t = 2p = 4m$ und) m eine gerade Zahl ist:

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a / das Vorzeichen	R	r	in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a / das Vorzeichen	R	r
0te oder — 4mte	+	+	+	0te oder — 4mte	—	+	+
.	.	.	.		.	.	.
+ m- - — 3m-	+	+	—	+ m- - — 3m-	—	+	—
.	.	.	.		.	.	.
+ 2m- - — 2m-	+	—	—	+ 2m- - — 2m-	—	—	—
.	.	.	.		.	.	.
+ 3m- - — m-	+	—	+	+ 3m- - — m-	—	—	+
.	.	.	.		.	.	.

Bei der 1- und mmafsigen Gestalt, wenn ($t = 2p = 4m$ und) m eine ungerade Zahl ist:

in der oberen Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a / das Vorzeichen	R	r	in der unteren Zelle, welche ist die	der Werth des Strahles a / das Vorzeichen	R	r
0te oder — 4mte	+	+	+	0te oder — 4mte	—	+	+
.	.	.	.		.	.	.
+ m- - — 3m-	+	—	+	+ m- - — 3m-	—	—	+
.	.	.	.		.	.	.
+ 2m- - — 2m-	+	—	—	+ 2m- - — 2m-	—	—	—
.	.	.	.		.	.	.
+ 3m- - — m-	+	+	—	+ 3m- - — m-	—	+	—
.	.	.	.		.	.	.

Nennt man dagegen die Anfangszelle die 1ste und bezeichnet sie mit α und versieht man die sämmtlichen Zellen mit den Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, in der Ordnung, wie es in Folge der Berücksichtigung der positiven und negativen Strahlenpermutationen geschah (wobei, wenn m eine gerade Zahl war, wie
Fig. 309.. 317. bei B, die Buchstaben α, β, γ, δ in der entgegengesetzten Ordnung mit R′ R″ R‴ liefen, während, wenn m eine ungerade Zahl war, beide Zeichenreihen in einerlei Ordnung fortschrit-

ten), und fährt man mit der Numerirung der Zellen fort in der Ordnung von der Anfangszelle α nach der nächsten oberen Zelle β, welche dadurch die zweite wird, so wird die 3te mit γ, die 4te mit δ, die 5te mit α, die 6te mit β bezeichnet seyn. Eben so ist die 1ste untere Zelle eine mit α', die 2te untere eine mit β' bezeichnete u. s. w. Es ist dann für *jede* 1- *und mmaſsige Gestalt*, *m mag gerade oder ungerade seyn*,

	das Vorzeichen bei a	R	r
für die 1ste obere Zelle	+	+	+
.	.	.	.
für die (m + 1)te obere Zelle	+	—	+
.	.	.	.
für die (2m + 1)te obere Zelle	+	—	—
.	.	.	.
für die (3m + 1)te obere Zelle	+	+	—
.	.	.	.
für die 1ste untere Zelle	—	+	+
.	.	.	.
für die (m + 1)te untere Zelle	—	—	+
.	.	.	.
für die (2m + 1)te untere Zelle	—	—	—
.	.	.	.
für die (3m + 1)te untere Zelle	—	+	—
.	.	.	.

Um die Abhängigkeit der Werthe der verschiedenen Strahlen r oder R von einander, vom Mittelpuncte c an bis an die Linie ef oder an deren Verlängerung gemessen, darzustellen, sey der Winkel

$$\left.\begin{array}{l} fce = k \text{ und Cos. } k = q \\ cf = \xi \text{ und } ce = \psi \end{array}\right\} \text{gegeben.}$$ Fig. 318.

Zieht man cv senkrecht auf ef, bezeichnet die Winkel ecv mit σ und fcv mit τ und zieht fn senkrecht auf ce, so ist

$$1)\ ef = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi \text{ Cos. k}}$$
$$= \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q},$$

$$2)\ cv = \frac{ce \cdot nf}{ef} = \frac{\xi \cdot \psi \cdot \sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi q}},$$

3) $\text{Cos.}\,\sigma = \frac{cv}{ce} = \frac{\xi\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{\xi^2+\psi^2-2\xi\psi q}}$,

4) $\text{Cos.}\,\tau = \frac{cv}{cf} = \frac{\psi\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{\xi^2+\psi^2-2\xi\psi q}}$.

Bezeichnet man nun die den Strahlen R′, R″, R‴ zukommenden Werthe cf, cd ... mit R_1, R_2, R_3 und die den Strahlen r′, r″, r‴ zukommenden ce, cb mit r_1, r_2, r_3 ..., so ist

$$\frac{cv}{r_1} = \text{Cos.}\,\sigma = \text{Cos.}\,(k-\tau)$$

$$\frac{cv}{r_2} = \text{Cos.}\,(2k+\sigma) = \text{Cos.}\,(3k-\tau)$$

$$\frac{cv}{r_3} = \text{Cos.}\,(4k+\sigma) = \text{Cos.}\,(5k-\tau)$$

.

$$\frac{cv}{r_x} = \text{Cos.}\,(2(x-1)k+\sigma) = \text{Cos.}\,((2x-1)k-\tau)$$

$$\frac{cv}{R_1} = \text{Cos.}\,(k-\sigma) = \text{Cos.}\,\tau$$

$$\frac{cv}{R_2} = \text{Cos.}\,(k+\sigma) = \text{Cos.}\,(2k-\tau)$$

$$\frac{cv}{R_3} = \text{Cos.}\,(3k+\sigma) = \text{Cos.}\,(4k-\tau)$$

.

$$\frac{cv}{R_x} = \text{Cos.}\,((2x-3)k+\sigma) = \text{Cos.}\,(2(x-1)k-\tau).$$

Wenn durch r_1, r_2, r_3 ... und R_1, R_2, R_3 ... die Werthe der Gröfsen r und R bezeichnet werden, welche von cv links liegen, so wie sie in der Ordnung nach links hin auf einander folgen, so dafs z.B. ${}_1r = r_1 = ce$, aber ${}_2r = cg$ u. s. w., so hat man

$$\frac{cv}{{}_1r} = \text{Cos.}\,\sigma = \text{Cos.}\,(k-\tau)$$

$$\frac{cv}{{}_2r} = \text{Cos.}\,(2k-\sigma) = \text{Cos.}\,(k+\tau)$$

$$\frac{cv}{{}_3r} = \text{Cos.}\,(4k-\sigma) = \text{Cos.}\,(3k+\tau)$$

.

$$\frac{cv}{{}_xr} = \text{Cos.}\,(2(x-1)k-\sigma) = \text{Cos.}\,((2x-1)k+\tau)$$

$$\frac{cv}{{}_1R} = \text{Cos.}\,(k-\sigma) = \text{Cos.}\,\tau$$

$$\frac{cv}{{}_2R} = \text{Cos.}\,(3k-\sigma) = \text{Cos.}\,(2k+\tau)$$

$$\frac{cv}{{}_3R} = \text{Cos.}\,(5k-\sigma) = \text{Cos.}\,(4k+\tau)$$

.

$$\frac{cv}{{}_xR} = \text{Cos.}\,((2x-1)k-\sigma) = \text{Cos.}\,(2(x-1)k+\tau).$$

Es ist dann

5) ${}_xR : {}_1R = \text{Cos.}\,\tau : \text{Cos.}\,(2(x-1)k+\tau)$
6) $R_x : R_1 = \text{Cos.}\,\tau : \text{Cos.}\,(2(x-1)k-\tau)$
7) ${}_xr : {}_1r = \text{Cos.}\,\sigma : \text{Cos.}\,(2(x-1)k-\sigma)$
8) $r_x : r_1 = \text{Cos.}\,\sigma : \text{Cos.}\,(2(x-1)k+\sigma)$.

Für die 1- und 1maſsige Gestalt ist $q = o$ und $ce = \mathfrak{y}$

$$ef = \sqrt{\xi^2+\mathfrak{y}^2}$$

$$ce\,.\,cf = ef\,.\,cv$$

$$cv = \frac{\xi\,.\,\mathfrak{y}}{\sqrt{\xi^2+\mathfrak{y}^2}}$$

$$\text{Cos.}\,\tau = \frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{\xi^2+\mathfrak{y}^2}}$$

$$\text{Cos.}\,\sigma = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\mathfrak{y}^2}}$$

$$\begin{aligned} {}_2R_2 : {}_1R_1 &= \text{Cos.}\,\tau : \text{Cos.}\,(180 \pm \tau) \\ &= \text{Cos.}\,\tau : -\,\text{Cos.}\,\tau. \end{aligned}$$

Es ist also

$$ {}_2R = -\,{}_1R$$

und ebenso

$$ {}_2r = -\,{}_1r,$$

wie dieses schon an und für sich einleuchtet.

Für die 1- und 2maſsige Gestalt ist $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$

$$ef = \sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

$$cv = \frac{\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$

$$\text{Cos. } \sigma = \frac{\xi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$

$$\text{Cos. } \tau = \frac{\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - 2\xi\psi\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}$$

$$R_2 : R_1 = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (90 - \tau) = \text{Cos. } \tau : \text{Sin. } \tau$$
$$= \psi\sqrt{\tfrac{1}{2}} : (\xi - \psi\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

$${}_2r : {}_1r = \text{Cos. } \sigma : \text{Cos. } (90 - \sigma) = \text{Cos. } \sigma : \text{Sin. } \sigma$$
$$\underset{2}{r} : \underset{1}{r} = \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}} : \psi - \xi\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Setzt man $\psi = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$,
so wird $\mathfrak{y} = \psi\sqrt{2}$ und

$$R_2 : R_1 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{y} : (\xi - \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}) \text{ und}$$
$${}_2r : {}_1r = \xi : (\mathfrak{y} - \xi),$$

folglich

Fig. 317 B.

$$R_2 = R_1 \left(\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}}\right) = cd$$

$${}_2r = {}_1r \left(\frac{\xi}{\mathfrak{y} - \xi}\right) = cg.$$

Für die 1- und 3maſsige ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$, folglich

$$\text{Cos. } \sigma = \frac{\xi}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$

$$\text{Cos. } \tau = \frac{\psi}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$

$$\text{Sin. } \sigma = \frac{2\psi - \xi\sqrt{3}}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$

$$\text{Sin. } \tau = \frac{2\xi - \psi\sqrt{3}}{2\sqrt{\xi^2 + \psi^2 - \xi\psi\sqrt{3}}}$$

$$R_2 : R_1 = \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (2k - \tau)$$
$$= \text{Cos. } \tau : \text{Cos. } (60^\circ - \tau)$$
$$= \text{Cos. } \tau : \tfrac{1}{2}\text{Cos. } \tau + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\text{Sin. } \tau$$
$$= \psi : \tfrac{1}{2}\psi + (2\xi - \psi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$

$${}_2R : {}_1R = \cos.\tau : \cos.(60^\circ + \tau)$$
$$= \cos.\tau : \tfrac{1}{2}\cos.\tau - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\sin.\tau$$
$$= \psi : \tfrac{1}{2}\psi - (2\xi - \psi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$r_2 : r_1 = \cos.\sigma : \cos.(60^\circ + \sigma)$$
$$= \cos.\sigma : \tfrac{1}{2}\cos.\sigma - \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,\sin.\sigma$$
$$= \xi : (\tfrac{1}{2}\xi - (2\psi - \xi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$
$$= \xi : (\tfrac{1}{2}\xi - 2\psi\sqrt{\tfrac{3}{4}} + \tfrac{3}{2}\xi)$$
$$= \xi : (2\xi - \psi\sqrt{3})$$
$${}_2r : {}_1r = \xi : (\tfrac{1}{2}\xi + (2\psi - \xi\sqrt{3})\sqrt{\tfrac{3}{4}})$$
$$= \xi : (\psi\sqrt{3} - \xi).$$

Setzt man

$$\psi = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}\sqrt{3}$$

also

$$\mathfrak{y} = \psi\sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\psi\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

so wird

$$R_2 : R_1 = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}} : \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{3}{4}} + (2\xi - \tfrac{3}{2}\mathfrak{y})\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$
$$= \mathfrak{y} : 2\xi - \mathfrak{y}$$

$$R_2 = R_1\left(\frac{\mathfrak{y}}{2\xi - \mathfrak{y}}\right) = cd$$ Fig. 317 C.

$${}_2R = {}_1R\left(\frac{\mathfrak{y}}{2\mathfrak{y} - \xi}\right) = ch$$

$$r_2 = r_1\left(\frac{\xi}{2\xi - \tfrac{3}{2}\mathfrak{y}}\right) = cb$$

$${}_2r = {}_1r\left(\frac{\xi}{\tfrac{3}{2}\mathfrak{y} - \xi}\right) = cg.$$

Es ist demnach das Zeichen einer bestimmten Fläche:

Bei der 1- und 1maſsigen Gestalt A, wenn sie bezogen wird Fig. 317 A.

auf die 1ste obere Zelle $\alpha = (a, R, r)$
- - 2te - - $\beta = (a, (-R), r)$
- - 3te - - $\gamma = (a, (-R), (-r))$
- - 4te - - $\delta = (a, R, (-r))$
- - 1ste untere Zelle $\alpha' = ((-a), R, r)$
- - 2te - - $\beta' = ((-a), (-R), r)$
- - 3te - - $\gamma' = ((-a), (-R), (-r))$
- - 4te - - $\delta' = ((-a), R, (-r))$.

Bei der 1- und 2maſsigen Gestalt B für $R = \xi$ und $r = \mathfrak{y}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, wenn sie bezogen wird Fig. 317 B.

auf die 1ste obere Zelle $\alpha = (a, R, r)$

- - 2te - - $\beta = (a, R, \frac{\xi}{\eta - \xi} r)$

- - 3te - - $\gamma = (a, (-\frac{\eta}{2\xi - \eta} R), r)$

- - 4te - - $\delta = (a, (-\frac{\eta}{2\xi - \eta} R), - r)$

- - 5te - - $\alpha = (a, (-R), (-r))$

- - 6te - - $\beta = (a, (-R), (-\frac{\xi}{\eta - \xi} r))$

- - 7te - - $\gamma = (a, \frac{\eta}{2\xi - \eta} R, (-\frac{\xi}{\eta - \xi} r))$

- - 8te - - $\delta = (a, \frac{\eta}{2\xi - \eta} R, r)$.

Setzt man statt a ein (— a) in diese 8 Zeichen, so erhält man die Zeichen für die 1ste, 2te 8te untere Zelle α', β'

Fig. 317 C. Bei der 1- und 3maſsigen Gestalt für $\xi = R$ und $\eta \sqrt{\tfrac{3}{4}} = r$, wenn sie bezogen wird

auf die 1ste obere Zelle $\alpha = (a, R, r)$

- - 2te - - $\beta = (a, \frac{\eta}{2\xi - \eta} R, r)$

- - 3te - - $\gamma = (a, \frac{\eta}{2\xi - \eta} R, \frac{\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\eta} r)$

- - 4te - - $\delta = (a, (\frac{-\eta}{2(\eta - \xi)} R), \frac{\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\eta} r)$

- - 5te - - $\alpha = (a, (\frac{-\eta}{2(\eta - \xi)} R), (\frac{-\xi}{\frac{3}{2}\eta - \xi} r))$

- - 6te - - $\beta = (a, (-R), (\frac{-\xi}{\frac{3}{2}\eta - \xi} r))$

- - 7te - - $\gamma = (a, (-R), (-r))$

- - 8te - - $\delta = (a, (\frac{-\eta}{2\xi - \eta} R), (-r))$

- - 9te - - $\alpha = (a, (\frac{-\eta}{2\xi - \eta} R), (\frac{-\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\eta} r))$

- - 10te - - $\beta = (a, \frac{\eta}{2(\eta - \xi)} R, \frac{-\xi}{2\xi - \frac{3}{2}\eta} r))$

auf die 11te obere Zelle $\gamma = (a, \frac{\mathfrak{y}}{2(\mathfrak{y}-\mathfrak{x})} R, \frac{\mathfrak{x}}{\frac{3}{2}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}} r)$

- - 12te - - $\delta = (a, R, \frac{\mathfrak{x}}{\frac{3}{2}\mathfrak{y}-\mathfrak{x}} r)$.

Setzt man statt a ein (— a), so hat man die Zeichen für die 1ste, 2te, 3te ... untere Zelle.

Bezeichnung von Flächen verschiedener Zellen durch die Bestimmungsstrahlen einer einzigen Zelle eines 1- und mmafsigen Axenkreuzes.

Sollen umgekehrt gleichwerthige Flächen, welche verschiedenen Zellen angehören, bezeichnet werden hinsichtlich auf ihr Verhalten gegen eine einzige Zelle, z. B. gegen die Zelle a′R′r′, so ist ersichtlich, dafs (wenn man diese Zelle α wieder die 0te obere, die nächste β die + 1ste obere u. s. w. u. s. w. nennt)

1) die Fläche, welche in der ± 1sten oder ± 3ten oder ± 5ten Zelle durch (a, R, r) bezeichnet ist, für die 0te Zelle so wird bezeichnet werden müssen, wie die Fläche (a, R, r) der 0ten Zelle für die ± 1ste oder ± 3te oder ± 5te Zelle bezeichnet wurde, dafs aber

2) die Fläche, welche für die ± 2te oder ± 4te oder ± 6te Zelle mit (a, R, r) bezeichnet ist, in der 0ten Zelle so wird zu bezeichnen seyn, wie die in der 0ten Zelle mit (a, R, r) bezeichnete Fläche in der ∓ 2ten oder ∓ 4ten oder ∓ 6ten Zelle bezeichnet werden mufste, so dafs hierbei die oberen Vorzeichen einander entsprechen und wieder die unteren. Eine Fläche, welche in Beziehung zu den drei Bestimmungsstrahlen der ersten Zelle a′R′r′ sich so verhält, dafs (gleichviel ob sie diese Zelle wirklich durchschneidet oder nicht) für sie dem Strahle a′ ein Werth $= \gamma$, dem Strahle R′ ein Werth $= \varrho$, dem Strahle r′ ein Werth $= \delta$ zusteht, werde bezeichnet mit $(\gamma, \varrho, \delta)$ [1].

Bezeichnung von Flächen hauptaxiger Gestalten mittelst der Bestimmungsstrahlen einer 3fach rechtwinkligen Zelle.

Es sey sef eine Fläche, welche in der ersten Zelle a′R′r′ liegt (oder doch für diese erste Zelle bezeichnet ist), so wird, Fig. 319.

wenn cs senkrecht vor dem Beobachter steht und cf nach rechtshin gerichtet ist, ein Strahl cu möglich seyn senkrecht auf die Ebene (fcs) der beiden Strahlen a′ und R′, so daſs cu von hinten nach vorwärts gerichtet ist.

Dieser Strahl wird von der Verlängerung der Ebene sfe geschnitten, so daſs ihm ein Werth cu = x für diese Fläche sfe eigen ist (welcher entweder positiv und endlich, wie in der Figur, oder unendlich oder negativ und endlich oder null seyn kann). Kennt man die Gröſse dieses Werthes, so kann man die Lage der Fläche usf auch dadurch bestimmen, daſs man die 3 auf einander senkrechten Strahlen [cs, cf, cu] [1] für sie angiebt, welche der bestimmten ersten 3fach rechtwinkligen Zelle c, sfu angehören, gleichviel ob der Werth, den jeder dieser Strahlen erhält, positiv und endlich oder negativ und endlich oder unendlich groſs oder = Null wird. Ist nun wieder cv senkrecht auf ef und der Winkel fcv = τ', so ist

$$cu : cf = cv : vf = \text{Cotg.}\,\tau' : 1$$

$$cu = cf\,.\,\text{Cotg.}\,\tau' = cf\,.\,\frac{\text{Cos.}\,\tau'}{\text{Sin.}\,\tau'}.$$

Ist nun die fragliche Fläche für die erste Zelle a′R′r′ (gleichviel ob sie in ihr liegt oder nicht) bezeichnet durch $(\gamma, \varrho, \delta)^{I}$, so ist, wenn Cos. fce = q,

$$\text{Cos.}\,\tau' = \frac{\delta\sqrt{1-q^2}}{\sqrt{\varrho^2+\delta^2-2\varrho\delta q}}$$

$$\text{Cotg.}\,\tau' = \frac{\delta\sqrt{1-q^2}}{\varrho-\delta q}$$

mithin

$$cu = \frac{\varrho\delta\sqrt{1-q^2}}{\varrho-\delta q} = \varphi.$$

Es ist also für die Fläche $(\gamma, \varrho, \delta)^{I}$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta\sqrt{1-q^2}}{\varrho-\delta q}];$$

für eine andere Fläche, welche in der ersten Zelle a′R′r′ bezeichnet war durch $(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d})^{I}$, hätte man

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{1-q^2}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{d}q}].$$

1 So daſs die rechtwinklige Klammer [...] gebraucht wird bei der Bezeichnung durch die drei auf einander senkrechten Strahlen.

Für das 1- und 1maſsige Axenkreuz ist q = 0, also

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d}]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \delta];$$

für das 1- und 2maſsige ist $q = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\varrho-\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}}}]$$

oder, wenn hier $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $\mathfrak{l} = \mathfrak{d}\sqrt{2}$
und $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $\lambda = \delta\sqrt{2}$
gesetzt wird,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{l}}{2\mathfrak{r}-\mathfrak{l}}]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \frac{\varrho\lambda}{2\varrho-\lambda}].$$

Für das 1- und 3maſsige Axenkreuz ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$, mithin

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}}{2\mathfrak{r}-\mathfrak{d}\sqrt{3}}]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \frac{\varrho\delta}{2\varrho-\delta\sqrt{3}}],$$

oder, wenn $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ und $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ gesetzt wird,

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{l}\sqrt{3}}{4\mathfrak{r}-3\mathfrak{l}}]$$

$$[\gamma, \varrho, \varphi] = [\gamma, \varrho, \frac{\varrho\lambda\sqrt{3}}{4\varrho-3\lambda}].$$

Gleichungen zwischen den Messungs- oder Bestimmungsstrahlen und den trigonometrischen Functionen von hier vorzüglich wichtigen Winkelgröſsen.

Da für die Neigung x zweier in Beziehung zu einer und derselben 3fach rechtwinkligen Zelle durch $[\gamma, \varrho, \varphi]$ und $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{f}]$ bezeichneten Flächen, wie dieses durch einfache trigonometrische Rechnung sich ergiebt, allgemein

$$\mathfrak{d})\ \text{Cos.}\,x = \mp\left(\frac{\gamma\mathfrak{g}\varrho\mathfrak{r} + \varrho\mathfrak{r}\varphi\mathfrak{f} + \varphi\mathfrak{f}\gamma\mathfrak{g}}{\sqrt{(\gamma^2\varrho^2+\varrho^2\varphi^2+\varphi^2\gamma^2)}\sqrt{(\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}^2\mathfrak{f}^2+\mathfrak{f}^2\mathfrak{g}^2)}}\right)$$

ist, so wird, wenn man statt φ und $\mathfrak{f}$ deren Werthe

$$\left(\varphi = \frac{\varrho\delta\sqrt{1-q^2}}{\varrho-\delta q} \text{ und } \mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{1-q^2}}{\mathfrak{r}-\mathfrak{d}q}\right) \text{ setzt:}$$

$\odot$) Cos. x =

$$\mp \frac{\gamma\varrho\mathfrak{g}\mathfrak{r} + \varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d} + \delta\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{g} - q(\gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{d} - \mathfrak{r}\delta) + \varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d}q)}{\sqrt{\gamma^2\varrho^2+\varrho^2\delta^2+\delta^2\gamma^2-\varrho\delta q(2\gamma^2+\varrho\delta q)}\sqrt{\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2+\mathfrak{d}^2\mathfrak{g}^2-\mathfrak{r}\mathfrak{d}q(2\mathfrak{g}^2+\mathfrak{r}\mathfrak{d}q)}}$$

die Gleichung seyn für die Neigung irgend zweier, in Beziehung auf die 1*ste Zelle eines* 1- *und mmafsigen Axenkreuzes durch* $(\gamma, \varrho, \delta)^1$ *und* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{d})^1$ *bestimmten, Flächen gegeneinander.* Setzt man in die mit $\odot$ bezeichnete Gleichung $\mathfrak{g} = -\gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und $\mathfrak{d} = \delta$, so erhält man

$$\text{I. Cos. } x' = \frac{\varrho^2\delta^2(1-q^2) - \gamma^2\varrho^2 + 2\gamma^2\varrho\delta q - \gamma^2\delta^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Setzt man in die Gleichung $\odot$ die Werthe $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$, aber $\mathfrak{d} = \dfrac{\varrho\delta}{2\delta q - \varrho}$, so hat man

II. Cos. x'' =

$$\frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q - \gamma^2\delta^2 + 2\gamma^2\delta^2 q^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Setzt man ferner in die Gleichung $\odot$ die Werthe $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{d} = \delta$, aber $\mathfrak{r} = \dfrac{\varrho\delta}{2\varrho q - \delta}$, so hat man

III. Cos. x''' =

$$\frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2) - \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2 + 2\gamma^2\varrho^2 q^2}{\varrho^2\delta^2(1-q^2) + \gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\delta q + \gamma^2\delta^2}.$$

Es ist dann x' die Randkante, x'' die Scheitelkante aus ϱ und x''' die Scheitelkante aus δ für den 2 × tflächigen Ebenrandner $(\gamma, \varrho, \delta)$.

Setzt man Cos. x' = $x_{,}$ und Cos. x'' = $x_{,,}$ und Cos. x''' = $x_{,,,}$, so ist

$$\text{IV. } \frac{x_{,} + x_{,,,}}{x_{,} + x_{,,}} = \frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

$$\text{V. } \frac{1 + x_{,}}{x_{,} + x_{,,}} = -\frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

$$\text{VI. } \frac{x_{,} + x_{,,,}}{1 + x_{,}} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2};$$

also

$$\text{VII. } \gamma^2 : \varrho^2 : \delta^2 =$$
$$-(x_{,} + x_{,,})(x_{,} + x_{,,,}) : (x_{,} + x_{,,,})(1 + x_{,}) : (x_{,} + x_{,,})(1 + x_{,}).$$

Ferner folgt aus IV:

$$\text{VIII.}\quad x_{,} = \frac{\varphi^2}{\varrho^2 - \delta^2}(x_{,,,} - x_{,,}) - x_{,,}$$

$$\text{IX.}\quad x_{,,} = \frac{\delta^2}{\varrho^2}(x_{,} + x_{,,,}) - x_{,}$$

$$\text{X.}\quad x_{,,,} = \frac{\varrho^2}{\delta^2}(x_{,} + x_{,,}) - x_{,}$$

Ebenso aus V:

$$\text{XI.}\quad x_{,} = -\frac{\gamma^2}{\varrho^2}(1 + x_{,}) - x_{,}$$

$$\text{XII.}\quad x_{,} = \frac{\varrho^2}{\gamma^2 + \varrho^2}(1 - x_{,,}) - 1.$$

Aus VI. hat man:

$$\text{XIII.}\quad x_{,,,} = -\frac{\gamma^2}{\delta^2}(1 + x_{,}) - x_{,}$$

$$\text{XIV.}\quad x_{,} = \frac{\delta^2}{\gamma^2 + \delta^2}(1 - x_{,,,}) - 1.$$

Aufserdem ist aber

$$\text{XV.}\quad \frac{\sqrt{1 + x_{,,}} + q\sqrt{1 + x_{,,,}}}{\sqrt{1 - q^2}} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})}$$

und

$$\text{XVI.}\quad \frac{\sqrt{1 + x_{,,,}} + q\sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{1 - q^2}} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,})}$$

so dafs:

$$\text{XVII.}\quad x_{,} = -x_{,,,} - \left(\frac{\sqrt{1 + x_{,,}} + q\sqrt{1 + x_{,,,}}}{\sqrt{1 - q^2}}\right)^2$$

oder

$$x_{,} = -x_{,,} - \left(\frac{\sqrt{1 + x_{,,,}} + q\sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{1 - q^2}}\right)^2$$

$$\text{XVIII.}\quad x_{,,} = -1 + \left(\sqrt{1 - q^2}\sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})} - q\sqrt{1 + x_{,,,}}\right)^2$$

$$\text{XIX.}\quad x_{,,,} = -1 + \left(\sqrt{1 - q^2}\sqrt{-(x_{,} + x_{,,})} - q\sqrt{1 + x_{,,}}\right)^2.$$

Für den 2 × pflächigen Ebenrandner (a, + R, r) oder (a, — R, r), wenn p das Doppelte einer ungeraden Zahl m ist, so wie für den 2 × pflächigen Ebenrandner (a, R, + r) oder (a, R, — r), wenn p das Doppelte einer geraden Zahl m ist, hat man, wenn $a : R : r = \gamma : \varrho : \delta$ ist, die Gleichung I zur Bestimmung der Randkante und die Gleichung II zu jener der Schei-

telkante von γ nach ϱ[1], zur Bestimmung der Scheitelkante $'''x$ von γ nach $\frac{\delta}{2\varrho q - \delta} \cdot \varrho$ aber die Gleichung

XX. $$\mathrm{Cos.}\,'''x = \frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2(8q^4-8q^2+1)-2\varrho\delta(4q^3-3q)+\delta^2(2q^2-1))}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2\varrho^2-2\gamma^2\varrho\delta q+\gamma^2\delta^2}$$

oder

$$\mathrm{Cos.}\,'''x = \frac{-\varrho^2\delta^2\,\mathrm{Sin.}\,k^2+\gamma^2(\varrho^2\,\mathrm{Cos.}\,4k-2\varrho\delta\,\mathrm{Cos.}\,3k+\delta^2\,\mathrm{Cos.}\,2k)}{\varrho^2\delta^2\,\mathrm{Sin.}\,k^2+\gamma^2(\varrho^2-2\varrho\delta\,\mathrm{Cos.}\,k+\delta^2)}.$$

Wenn p das Doppelte einer ungeraden Zahl m ist und dem $2\times$pflächigen Ebenrandner das Zeichen (a, R, + r) oder (a, R, — r) angehört, so wie wenn $\frac{1}{2}p = m$ eine gerade Zahl und der $2\times$pflächige Ebenrandner durch das Zeichen (a, + R, r) oder (a, — R, r) bestimmt ist, wonach also $a : R : r = \gamma : \varrho : \delta$, so wird die Randkante eines solchen Körpers bestimmt durch die Gleichung I, die Scheitelkante von γ nach δ durch die Gleichung III, aber die Scheitelkante $''x$ von γ nach $\frac{\varrho}{2\delta q - \varrho} \cdot \delta$ durch die Gleichung

XXI. $$\mathrm{Cos.}\,''x = \frac{-\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2(2q^2-1)-2\varrho\delta(4q^3-3q)+\delta^2(8q^4-8q^2+1))}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2\varrho^2-2\gamma^2\varrho\delta q+\gamma^2\delta^2}.$$

Für den $2\times$pflächigen Kronrandner, welchem als flächen-halbzähliger 1- und mmafsiger Gestalt, wenn m ungerade ist, das Zeichen (± a, ± R, r) oder (± a, ∓ R, r) entspricht, so wie für einen solchen, der, wenn m gerade ist, dem Zeichen (± a, R, ± r) oder (± a, R, ∓ r) entspricht, gilt für die Scheitelkante von γ nach ϱ die Gleichung II, für die von γ nach $\frac{\delta}{2\varrho q - \delta} \cdot \varrho$ die Gleichung XX und für die Randkante $'x$ die Gleichung

XXII. $$\mathrm{Cos.}\,'x = \frac{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2((2q^2-1)\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2)}{\varrho^2\delta^2(1-q^2)+\gamma^2(\varrho^2-2\varrho\delta q+\delta^2)}.$$

Eben so gilt bei dem $2\times$pflächigen Kronrandner (± a, R, ± r) oder (± a, R, ∓ r), wenn m ungerade ist, so wie bei dem, wel-

1 d. h. die Kante, von welcher die Kantenlinie die äufseren Enden der ihrer Länge und Lage nach bekannten Strahlen γ und ϱ mit einander verbindet.

cher das Zeichen $(\underline{+}a, \underline{+}R, r)$ oder $(\underline{+}a, \mp R, r)$ hat, wenn m gerade ist, die Gleichung III für die Scheitelkante von γ nach δ und die Gleichung XXI für die Scheitelkante von γ nach $\frac{\varrho}{2\delta q - \varrho} \cdot \delta$, aber für die Randkante $\overline{x}$ die Gleichung

$$\text{XXIII. } \operatorname{Cos.} \overline{x} = \frac{\varrho^2 \delta^2 (1 - q^2) + \gamma^2 (\varrho^2 - 2\varrho\delta q + \delta^2 (2q^2 - 1))}{\varrho^2 \delta^2 (1 - q^2) + \gamma^2 (\varrho^2 - 2\varrho\delta q + \delta^2)}.$$

Setzt man Cos. $'x = {}_{,}x$ und Cos. $x'' = x_{,,}$ und Cos. $'''x = {}_{,,,}x$, so hat man für den $2 \times$ pflächigen Kronrandner $(\underline{+}a, \underline{+}R, r)$ oder $(\underline{+}a, \mp R, r)$, wenn m ungerade, oder für den $2 \times$ pflächigen Kronrandner $(\underline{+}a, R, \underline{+}r)$ oder $(\underline{+}a, R, \mp r)$, wenn m gerade ist, folgende Gleichungen zur Bestimmung des Verhältnisses der Mafsstrahlen $\gamma : \varrho : \delta = a : R : r$.

$$\text{XXIV. } \frac{1 - x_{,,}}{1 - {}_{,}x} = \frac{\delta^2}{\gamma^2} + \frac{\delta^2}{\varrho^2}$$

$$\text{XXV. } \frac{{}_{,,,}x - x_{,,}}{1 - {}_{,}x} = 4q\left(\frac{\delta}{\varrho}\right) - 4q^2,$$

woraus sich ergiebt

$$\text{XXVI. } \frac{\delta}{\varrho} = \frac{1}{4q}\left(\frac{{}_{,,,}x - x_{,,}}{1 - {}_{,}x}\right) + q = \frac{{}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x)}{4q(1 - {}_{,}x)}$$

$$\text{XXVII. } \frac{\delta^2}{\gamma^2} = \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,}) - ({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}{16q^2(1 - {}_{,}x)^2}$$

$$\text{XXVIII. } \frac{\varrho^2}{\gamma^2} = \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,})}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2} - 1$$

$$= \frac{16q^2(1 - {}_{,}x)(1 - x_{,,}) - ({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}.$$

Die Abhängigkeit der dreierlei Kanten ${}_{,}x$, $x_{,,}$, ${}_{,,,}x$ eines solchen Körpers von einander ist gegeben durch die Gleichung

$$\text{XXIX. } \frac{1 - q^2}{(\sqrt{1 + {}_{,,,}x} + (2q^2 - 1)\sqrt{1 + x_{,,}})^2}$$

$$= \frac{4(1 - {}_{,}x)}{({}_{,,,}x - x_{,,} + 4q^2(1 - {}_{,}x))^2}.$$

Die den Gleichungen XXIV bis XXIX entsprechenden für den $2 \times$ pflächigen Kronrandner $(\underline{+}a, R, \underline{+}r)$ oder $(\underline{+}a, R, \mp r)$, wenn m ungerade ist, und für $(\underline{+}a, \underline{+}R, r)$ oder $(\underline{+}a, \mp R, r)$, wenn m gerade ist, erhält man aus diesen, wenn man in ihnen δ statt ϱ und ϱ statt δ setzt und den Cosinus der Randkante $\overline{x}$ mit $\underline{x}$ bezeichnet statt ${}_{,}x$ und jenen der Scheitelkante aus δ

mit $x_{'''}$ bezeichnet statt $x_{''}$ und den der Scheitelkante von γ nach $\frac{\rho\delta}{2\delta q-\rho}$ mit $_{''}x$ bezeichnet statt $_{'''}x$.

Für das 1- und 1maſsige Axenkreuz wird $q = \text{Cos.}\,90° = 0$, also die Gleichung ⊙ hier zu

$$\text{Cos.}\,x = \mp \frac{\gamma\mathfrak{g}\rho\mathfrak{r} + \rho\mathfrak{r}\delta\mathfrak{d} + \delta\mathfrak{d}\gamma\mathfrak{g}}{\sqrt{\gamma^2\rho^2+\rho^2\delta^2+\delta^2\gamma^2}\ \sqrt{\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2+\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2+\mathfrak{d}^2\mathfrak{g}^2}}.$$

Statt der Gleichungen I, II, III hat man dann:

1) $\text{Cos.}\,x' = \frac{\rho^2\delta^2-\gamma^2\rho^2-\gamma^2\delta^2}{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}$ für die Randkante,

2) $\text{Cos.}\,x'' = \frac{-\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2-\gamma^2\delta^2}{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}$ für die Scheitelkante aus ρ,

3) $\text{Cos.}\,x''' = \frac{-\rho^2\delta^2-\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}$ für die Scheitelkante aus δ.

Die für den 2×4flächigen Ebenrandner (γ, ρ, δ) oben gegebenen Gleichungen IV — XIV sind, als von q abhängig, auch hier gültig, XV und XVI aber werden hier

15) $1 + x_{''} = -(x_{'} + x_{'''})$ oder

16) $1 + x_{'''} = -(x_{'} + x_{''})$ d. h. $1 + x_{'} + x_{''} + x_{'''} = 0$.

Daher wird hier die Gleichung VII einerlei mit:

7) $\gamma^2 : \rho^2 : \delta^2 = (1+x_{''})(1+x_{'''}) : (1+x_{'})(1+x_{''}) : (1+x_{'})(1+x_{'''})$,

statt XVII, XVIII und XIX hat man daher

17) $x_{'} = -(1 + x_{''} + x_{'''})$

18) $x_{''} = -(1 + x_{'} + x_{'''})$

19) $x_{'''} = -(1 + x_{'} + x_{''})$.

Die Gleichung XXIII wird hier

23) $\text{Cos.}\,\bar{x} =$

$$\frac{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2-\gamma^2\delta^2}{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2} = -\left(\frac{-\rho^2\delta^2-\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}{\rho^2\delta^2+\gamma^2\rho^2+\gamma^2\delta^2}\right) = -\text{Cos.}\,x'''.$$

$\bar{x}$ ist hier die Mittelkante und x''' die Gipfelkante des strebesäuligen 2×2flächigen Schiefwandners, der die Stelle eines 2×2flächigen Kronrandners vertritt.

Da bei diesem Stellvertreter des 2×2flächigen Kronrandners die 3te Kantenart fehlt (indem hier $\frac{\rho\delta}{2\delta q-\rho} = -\delta$, mithin, da $-\delta$ für r'' einerlei ist mit $+\delta$ für r', folglich die

Scheitelkante $''x$ von γ nach $\frac{\varrho\delta}{2\delta q-\varrho}$ in r'' eine und dieselbe ist mit x''' von γ nach δ in r', was noch aus XXI erhellet, wenn man darin $q=0$ einführt und den Werth für Cos. $''x$ vergleicht mit Cos. x''' aus der Gleichung 3., so ist ersichtlich, daſs die Gleichungen XXIV bis XXVIII hier nicht dienen können, um die Verhältnisse der Maſsstrahlen aus den gegebenen Kanten dieser Gestalt zu finden. Ist aber eines der Verhältnisse $\varrho:\gamma$ oder $\varrho:\delta$ oder $\delta:\gamma$ mittelbar oder unmittelbar bekannt, so hat man aus der der Gleichung XXIV entsprechenden Gleichung

$$24)\quad \frac{1-x_{'''}}{1-\underline{x}}=\frac{\varrho^2}{\gamma^2}+\frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

oder

$$\frac{1+\underline{x}}{1-\underline{x}}=\frac{\varrho^2}{\gamma^2}+\frac{\varrho^2}{\delta^2},$$

wenn $\varrho:\delta$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\gamma^2}=\frac{1+\underline{x}}{1-\underline{x}}-\frac{\varrho^2}{\delta^2}$$

oder, wenn $\varrho:\gamma$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\delta^2}=\frac{1+\underline{x}}{1-\underline{x}}-\frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

und, wenn $\delta:\gamma$ bekannt ist,

$$\frac{\varrho^2}{\delta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2+\gamma^2}\left(\frac{1+\underline{x}}{1-\underline{x}}\right).$$

Für die 1- und 2maſsigen Gestalten wird, weil hier $q=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, die Gleichung ⊙ zu folgender:

$$\text{Cos. } x = \mp\frac{\tfrac{1}{2}\varrho\mathfrak{r}\delta\mathfrak{d}+\gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{r}+\delta\mathfrak{d}-(\varrho\mathfrak{d}+\mathfrak{r}\delta)\sqrt{\tfrac{1}{2}})}{\sqrt{\tfrac{1}{2}\varrho^2\delta^2+\gamma^2(\varrho^2+\delta^2-2\varrho\delta\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\sqrt{\tfrac{1}{2}\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2+\mathfrak{g}^2(\mathfrak{r}^2+\mathfrak{d}^2-2\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\tfrac{1}{2}})}}$$

oder, wenn $\delta=\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ und $\mathfrak{d}=\mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist,

$$\text{Cos. } x = \mp\frac{\gamma\mathfrak{g}(\varrho-\tfrac{1}{2}\lambda)(\mathfrak{r}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{l})+\tfrac{1}{4}\lambda\mathfrak{l}(\gamma\mathfrak{g}+\varrho\mathfrak{r})}{\sqrt{\gamma^2(\varrho-\tfrac{1}{2}\lambda)^2+\tfrac{1}{4}\lambda^2(\gamma^2+\varrho^2)}\sqrt{\mathfrak{g}^2(\mathfrak{r}-\tfrac{1}{2}\mathfrak{l})^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}(\mathfrak{g}^2+\mathfrak{r}^2)}}.$$

Die Gleichung I wird dann

$$1)\quad \text{Cos. } x'=\frac{\tfrac{1}{4}\lambda^2(\varrho^2-\gamma^2)-\gamma^2(\varrho-\tfrac{1}{2}\lambda)^2}{\tfrac{1}{4}\lambda^2(\varrho^2+\gamma^2)+\gamma^2(\varrho-\tfrac{1}{2}\lambda)^2}.$$

Aus dieser Formel für den Cosinus der Randkante des 2×8flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \delta)$ entsteht jene für den Co-

sinus der Randkante des 8flächigen Ebenrandners ($\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}$), wenn man in ihr $\lambda = \varrho$ setzt; es ist dann

$$\text{Cos. } x' = \frac{\varrho^2 - 2\gamma^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x' = \frac{\gamma\sqrt{2}}{\varrho}.$$

Die Randkante des 8flächigen Ebenrandners ($\gamma, \varrho, 2\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}$) bestimmt sich aus der Gleichung I, wenn man in ihr $\lambda = 2\varrho$ setzt, und man hat

$$\text{Cos. } x' = \frac{\varrho^2 - \gamma^2}{\varrho^2 + \gamma^2} \text{ und Tang. } \tfrac{1}{2}x' = \frac{\gamma}{\varrho}.$$

Die Gleichung II wird hier

$$2)\ \text{Cos. } x'' = \frac{-\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda^2}{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}$$

oder

$$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x'' = \frac{\tfrac{1}{2}\lambda\sqrt{\gamma^2 + \varrho^2}}{\gamma(\varrho - \tfrac{1}{2}\lambda)}.$$

Für $\lambda = \varrho$ bestimmt man die Scheitelkante des 8flächigen Ebenrandners ($\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}$) durch die Gleichung

$$\text{Cos. } x'' = \frac{-\varrho^2}{2\gamma^2 + \varrho^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x'' = \frac{\sqrt{\gamma^2 + \varrho^2}}{\gamma^2}.$$

Die Gleichung III ist hier

$$3)\ \text{Cos. } x''' = \frac{-\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\tfrac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \tfrac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}$$

oder $$\text{Tang. } \tfrac{1}{2}x''' = \frac{\varrho\sqrt{\gamma^2 + \tfrac{1}{2}\lambda^2}}{\gamma(\lambda - \varrho)}.$$

Setzt man $\lambda = 2\varrho$, so bestimmt sich die Scheitelkante des 8flächigen Ebenrandners ($\gamma, \varrho, 2\varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}}$) durch die Formel

$$\text{Cos. } x''' = \frac{-\varrho}{\gamma^2 + \varrho^2} \text{ oder Tang. } \tfrac{1}{2}x''' = \sqrt{\frac{\gamma^2 + 2\varrho}{\gamma^2}}.$$

Die Gleichungen XV und XVI werden hier

$$15)\ \sqrt{2(1 + x_{,,})} + \sqrt{1 + x_{,,,}} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})}$$

$$16)\ \sqrt{1 + x_{,,}} + \sqrt{2(1 + x_{,,,})} = \sqrt{-(x_{,} + x_{,,})},$$

woraus

$$17)\ x_{,} = -3 - 2(x_{,,} + x_{,,,}) + 2\sqrt{2(1 + x_{,,})(1 + x_{,,,})}$$

$$18)\ x_{,,} = -1 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{-(x_{,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}})^2$$

$$19)\ x_{,,,} = -1 + \tfrac{1}{2}(\sqrt{-(x_{,} + x_{,,})} - \sqrt{1 + x_{,,}})^2.$$

Für den 8flächigen Ebenrandner, wenn der Cosinus seiner Scheitelkante $= y$ und der seiner Randkante $= z$ ist, hat man das Gesetz

$$2y + z = -1.$$

Für die Kanten des 2×4flächigen Kronrandners $(\pm a, \pm R, r)$ hat man die Gleichungen

$$3)\ \text{Cos.}\, x''' = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2} \Big\} \text{ Scheitelkante aus } \delta$$

$$21)\ \text{Cos.}\, {}''x = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho\lambda - \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2} \Big\} \text{ Scheitelkante aus } \frac{\varrho}{2\delta q - \varrho}\,\delta$$

$$23)\ \text{Cos.}\, \bar{x} = \frac{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2\varrho^2 - \gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2} \Big\} \text{ Randkante.}$$

Daher hat man hier

$$\frac{{}_{''}x + x_{'''}}{1 - \underline{x}} = -\frac{\varrho^2}{\gamma^2}$$

$$\frac{\underline{x} + x_{'''}}{1 - \underline{x}} = \frac{\varrho^2}{\frac{1}{2}\lambda^2} + 1 \text{ oder } \frac{\varrho^2}{\frac{1}{2}\lambda^2} = \frac{2\underline{x} + x_{'''} - 1}{1 - \underline{x}}$$

als Stellvertreter für die Gleichungen XXIV und XXV; und

$$8)\quad (1 - \underline{x})(1 + {}_{''}x) = ({}_{''}x - x_{'''} + 2(1 - \underline{x})),$$

statt der Gleichung XXIX. Für $\lambda = \varrho$ hat man

$$\text{Cos.}\, x''' = -1 \text{ und } \text{Cos.}\, {}''x = -\left(\frac{\varrho^2 - 2\gamma^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2}\right)$$

und

$$\text{Cos.}\, \bar{x} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + 2\gamma^2},$$

folglich auch $2\,\text{Cos.}\, \bar{x} = 1 - \text{Cos.}\, {}''x$, so daſs ${}''x$ die Gipfelkante und $\underline{x}$ die Randkante des 4flächigen Kronrandners $(\pm\gamma, \pm\varrho, \varrho\sqrt{\tfrac{1}{2}})$ ist.

Für das 1- und 3maſsige Axenkreuz ist $q = \sqrt{\tfrac{3}{4}}$. Die Gleichung $\odot$ wird daher

$$\text{Cos.}\, x = \mp \frac{\gamma\varrho\mathfrak{g}\mathfrak{r} + \frac{1}{4}\varrho\delta\mathfrak{r}\mathfrak{d} + \delta\gamma\mathfrak{d}\mathfrak{g} - \gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{d} - \mathfrak{r}\delta)\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\gamma^2\varrho^2 + \frac{1}{4}\varrho^2\delta^2 + \delta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\varrho\delta\sqrt{\frac{3}{4}}}\sqrt{\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}^2 + \frac{1}{4}\mathfrak{r}^2\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{d}^2\mathfrak{g}^2 - 2\mathfrak{g}^2\mathfrak{r}\mathfrak{d}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$$

oder, wenn $\delta = \lambda\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{l}\sqrt{\tfrac{3}{4}}$ gesetzt wird,

$$\text{Cos.}\, x = \mp \frac{3\gamma\mathfrak{g}(\varrho\mathfrak{r} + \lambda\mathfrak{l} - (\varrho\mathfrak{l} + \mathfrak{r}\lambda)) + \varrho\mathfrak{r}(\gamma\mathfrak{g} + \frac{3}{4}\lambda\mathfrak{l})}{\sqrt{3\gamma^2(\lambda - \varrho)^2 + \varrho^2(\gamma^2 + \frac{3}{4}\lambda^2)}\sqrt{3\mathfrak{g}^2(\mathfrak{l} - \mathfrak{r})^2 + \mathfrak{r}^2(\mathfrak{g}^2 + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2)}}.$$

Man erhält dann statt der Gleichungen I, II, III die Gleichungen:

$$1)\ \mathrm{Cos.}\ x' = \frac{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2 - \gamma^2(3(\lambda-\varrho)^2+\varrho^2)}{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2 + \gamma^2(3(\lambda-\varrho)^2+\varrho^2)}$$

oder $$\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2}x' = \sqrt{\frac{\gamma^2(3(\lambda-\varrho)^2+\varrho^2)}{\frac{3}{4}\varrho^2\lambda^2}}$$

$$2)\ \mathrm{Cos.}\ x'' = -\left(\frac{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2+\varrho^2) - 4\gamma^2(\varrho-\frac{3}{4}\lambda)^2}{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2+\varrho^2) + 4\gamma^2(\varrho-\frac{3}{4}\lambda)^2}\right)$$

oder $$\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2}x'' = \sqrt{\frac{\frac{3}{4}\lambda^2(\gamma^2+\varrho^2)}{4\gamma^2(\varrho-\frac{3}{4}\lambda)^2}}$$

$$3)\ \mathrm{Cos.}\ x''' = -\left(\frac{\varrho^2(\gamma^2+\frac{3}{4}\lambda^2) - 3\gamma^2(\lambda-\varrho)^2}{\varrho^2(\gamma^2+\frac{3}{4}\lambda^2) + 3\gamma^2(\lambda-\varrho)^2}\right)$$

oder $$\mathrm{Tang.}\ \tfrac{1}{2}x''' = \sqrt{\frac{\varrho^2(\gamma^2+\frac{3}{4}\lambda^2)}{3\gamma^2(\lambda-\varrho)^2}}$$

für die dreierlei Kanten des 2×12flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \delta)$ oder $(\gamma, \varrho, \lambda\sqrt{\frac{3}{4}})$.

Die Gleichungen XVII, XVIII und XIX werden hierfür:

$$17)\ x_{,} = -x_{,,,} - (2\sqrt{1+x_{,,}} + \sqrt{3(1+x_{,,,})})^2.$$
$$= -x_{,,} - (2\sqrt{1+x_{,,,}} + \sqrt{3(1+x_{,,})})^2$$
$$18)\ x_{,,} = -1 + \tfrac{1}{4}(\sqrt{-(x_{,}+x_{,,,})} - \sqrt{3(1+x_{,,,})})^2$$
$$19)\ x_{,,,} = -1 + \tfrac{1}{4}(\sqrt{-(x_{,}+x_{,,})} - \sqrt{3(1+x_{,,})})^2.$$

Wenn $\lambda = \varrho$ wird, so verwandeln sich die Gleichungen 1, 2, 3 in jene für die Kanten des 12flächigen Ebenrandners $(\gamma, \varrho, \varrho\sqrt{\frac{3}{4}})$ und man hat

$$\mathrm{Cos.}\ x' = \frac{3\varrho^2 - 4\gamma^2}{3\varrho^2 + 4\gamma^2}$$

$$\mathrm{Cos.}\ x'' = \frac{-3\varrho^2 - 2\gamma^2}{3\varrho^2 + 4\gamma^2}.$$

Dann ist $x_{,} = -4x_{,,} - 3$ und $x_{,,} = -\frac{x_{,}-3}{4}$,

auch ist $\frac{\gamma^2}{\varrho^2} = \frac{3}{4}\frac{(1-x_{,})}{(1+x_{,})} = -\frac{3}{2}\frac{(1+x_{,,})}{(1+2x_{,,})}$.

Setzt man $\delta = \frac{4}{3}\varrho\sqrt{\frac{3}{4}}$, also $\lambda = \frac{4}{3}\varrho$, so wird

$$\mathrm{Cos.}\ x' = \frac{\varrho^2 - \gamma^2}{\varrho^2 + \gamma^2}$$

$$\mathrm{Cos.}\ x''' = -\frac{2\varrho^2 + \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},$$

auch ist $x_{,} = -4x_{'''} - 3$ und $x_{'''} = \frac{-x_{,} - 3}{4}$

$$\frac{\gamma^2}{\varrho^2} = \frac{1 - x_{,}}{1 + x_{,}} = -2\left(\frac{1 + x_{'''}}{1 + 2x_{'''}}\right).$$

Dieses sind die Gleichungen für den 12flächigen Ebenrandner $(\gamma, \varrho, \frac{4}{3}\varrho\sqrt{\frac{3}{4}})$.

Die Gleichungen für die Kanten des 2×6flächigen Kronrandners $(\pm a, \pm R, r)$ sind

$$22)\ \mathrm{Cos.}\ {}'x = \frac{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{2}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}$$

$$2)\ \mathrm{Cos.}\ x'' = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}$$

$$20)\ \mathrm{Cos.}\ {}'''x = \frac{-\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 - \frac{2}{3}\gamma^2\varrho^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2}{\frac{1}{4}\varrho^2\lambda^2 + \frac{4}{3}\gamma^2\varrho^2 - 2\gamma^2\varrho\lambda + \gamma^2\lambda^2}.$$

Die Gleichung XXIX wird hier

$$29)\ (1 + {}_{'''}x) = (\sqrt{1 + x_{''}} - \sqrt{1 - {}_{,}x})^2,$$

sie drückt die Art der Abhängigkeit der dreierlei Kanten eines jeden 2×6flächigen Kronrandners von einander aus, wenn ${}_{,}x = \mathrm{Cos.}\ {}'x$ und $x_{''} = \mathrm{Cos.}\ x''$ und ${}_{'''}x = \mathrm{Cos.}\ {}'''x$ und $'x$ die Randkante, x'' die stumpfe und $'''x$ die scharfe Scheitelkante bedeuten.

Die Gleichungen 22 und 20 verwandeln sich in jene für den 6flächigen Kronrandner $(\pm\gamma, \pm\varrho, \frac{4}{3}\varrho\sqrt{\frac{3}{4}})$, wenn $\lambda = \frac{4}{3}\varrho$ gesetzt wird:

$$\mathrm{Cos.}\ {}'x = \frac{2\varrho^2 - \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},\quad \mathrm{Cos.}\ {}'''x = -\frac{2\varrho^2 - \gamma^2}{2(\varrho^2 + \gamma^2)},$$

also $${}_{'''}x = -{}_{,}x;$$

auch ist $$\frac{\varrho^2}{\gamma^2} = \frac{1 + 2{}_{,}x}{2(1 - {}_{,}x)} = \frac{1 - 2{}_{'''}x}{2(1 + {}_{'''}x)}.$$

Bezeichnung, welche eine und dieselbe Fläche in ihrer Erstreckung durch die verschiedenen Zellen eines 3gliedrig 4axigen Strahlensystems erhält.

Es seyen mno, kno, kfo, bfo, beo, meo sechs Flächen eines 48wandigen Dreieckflächners, welche den Zellen Fig. 320.

$a_1R_1r_1$, $a_4R_1r_1$, $a_4R_3r_1$, $a_6R_2r_1$, $a_1R_2r_1$ angehören, so daſs cm in der Richtung von a_1 und ck in jener von a_4 und cb in jener von a_6 liegt und wieder cn in R_1 und ce in R_2 und cf in R_3, während co in r_1 sich befindet. (Vergl. Fig. 313).

Die Fläche mno sey in der Zelle $a_1R_1r_1$, welche die erste heiſsen möge, mit $(x\sqrt{3},\ y\sqrt{\tfrac{3}{2}},\ z)^{I}$ bezeichnet, so daſs $cm = x\sqrt{3}$, $cn = y\sqrt{\tfrac{3}{2}}$ und $co = z$ ist. Verlängert man die Ebene mno, bis sie die Ebenen a_1ca_4 und a_4ca_6 und a_6ca_1 schneidet, so wird sie zu mhs, und Theile von mhs sind mno, hno, sio, suo, muo. Es ist daher zunächst anzugeben, wie jeder dieser Theile in der Zelle, in welcher er liegt, die Bestimmungsstrahlen a, R, r derselben schneidet. Da cm, cn und co gegeben sind, so müssen noch die Ausdrücke für ch, ci, cs und cu bestimmt werden.

Es ist nun, weil $mck = 90°$ und $mcn = kcn = 45°$,

$$ch : cm = cn\sqrt{\tfrac{1}{2}} : (cm - cn\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$
$$ch : x\sqrt{3} = y : (2x - y)$$
$$ch = \frac{xy}{2x - y}\sqrt{3}$$

und weil Sin. $mco = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ und Cosinus $mco = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und der Winkel $mci = 90°$,

$$ci : cm = co\sqrt{\tfrac{2}{3}} : (cm - co\sqrt{\tfrac{1}{3}})$$
$$ci : x\sqrt{3} = z\sqrt{2} : (3x - z)$$
$$ci = \frac{2xz}{3x - z}\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Weil ferner $hcs = 90°$ und $hci = sci = 45°$, so ist

$$cs : ch = ci\sqrt{\tfrac{1}{2}} : (ch - ci\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$
$$cs : y\sqrt{3} = z : (3y - 2z)$$
$$cs = \frac{y \cdot z}{3y - 2z}\sqrt{3},$$

und weil $hcu = 90°$ und Sin. $hco = \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ und Cos. $hco = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, so ist

$$cu : ch = co\sqrt{\tfrac{2}{3}} : (ch = co\sqrt{\tfrac{1}{3}})$$

$$cu : xy\sqrt{3} = z\sqrt{2} : (3xy - 2xz + yz)$$

$$cu = \frac{2xyz}{3xy - 2xz + yz} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

Es ist daher die Fläche mno in ihrer Erstreckung durch

die Zelle	zu bezeichnen durch
aRr 111	$(cm, cn, co) = (x\sqrt{3}, y\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z)$
aRr 411	$(ch, cn, co) = \left(\frac{xy}{2x-y}\sqrt{3}, y\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z\right)$
aRr 431	$(ch, ci, co) = \left(\frac{xy}{2x-y}\sqrt{3}, \frac{2xz}{3x-z}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z\right)$
aRr 631	$(cs, ci, co) = \left(\frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3}, \frac{2xz}{3x-z}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z\right)$
aRr 621	$(cs, cu, co) = \left(\frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3}, \frac{2xyz}{3xy-2xz+yz}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z\right)$
aRr 121	$(cm, cu, co) = \left(x\sqrt{3}, \frac{2xyz}{3xy-2xz+yz}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, z\right).$

In der 3fach rechtwinkligen Zelle aaa ist die Fläche mno =

164

mhs zu bezeichnen durch

$$[cm, cs, ch] = [x\sqrt{3}, \frac{yz}{3y-2z}\sqrt{3}, \frac{xy}{2x-y}\sqrt{3}].$$

Setzt man $[cm, cs, ch]^{I} = [\xi\sqrt{3}, \psi\sqrt{3}, \varrho\sqrt{3}]$, so ist:

1) $\xi = x$

2) $\psi = \frac{yz}{3y - 2z}$

3) $\varrho = \frac{xy}{2x - y}$

4) $x = \xi$

5) $y = \frac{2\xi\varrho}{\xi + \varrho}$

6) $z = \frac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi + \psi\varrho + \varrho\xi}$

und

7) $cm = \xi\sqrt{3}$

8) $cs = \psi\sqrt{3}$

9) $ch = \varrho\sqrt{3}$

10) $cn = \frac{2\xi\varrho}{\xi+\varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

11) $cu = \frac{2\xi\psi}{\xi+\psi}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

12) $ci = \frac{2\psi\varrho}{\psi+\varrho}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$

13) $co = \frac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi + \psi\varrho + \varrho\xi}.$

Ist nun die Frage zu beantworten, welcher Längenwerth kommt jedem der übrigen 4-, 2- und 3gliedrigen Strählen des 3gliedrig 4axigen Strahlensystems zu vom Mittelpuncte c an bis zu dem Puncte, in welchem er von der Fläche m n o oder ihrer Verlängerung geschnitten wird, so ergiebt sich, wenn man die Strahlen so mit Zeigezahlen versieht, wie dieses in dem Würfelbilde früher geschehen ist, dafs dem Strahle a_5 der Werth

Fig. 313.

$(-cs) = (-\psi\sqrt{3}) = \left(\frac{-yz}{3y-2z}\sqrt{3}\right)$, dem Strahle a_3 der Werth $(-ch) = \left(\frac{-xy}{2x-y}\sqrt{3}\right)$ und dem Strahle a_2 der Werth $(-cm) = -x\sqrt{3}$ zukommt. Den Werth von r_4 findet man, wenn man in dem Ausdrucke $z = \frac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi+\psi\varrho+\varrho\xi}$ statt z setzt $\binom{r}{4}$ als Zeichen für den Werth von r_4 und statt ψ ein $-\psi$; wenn man ferner $\binom{r}{4} = \frac{3\xi\psi\varrho}{\xi\psi+\psi\varrho-\varrho\xi}$ setzt und hier die Werthe $\xi = x$ und $\psi = \frac{yz}{3y-2z}$ und $\varrho = \frac{xy}{2x-y}$ einführt. Es wird dann $\binom{r}{4} = \frac{3yz}{4z-3y}$.

Auf ähnliche Weise erhält man für $-\varrho$

$$\binom{r}{2} = \left(\frac{3\xi\psi\varrho}{-\xi\psi+\psi\varrho+\varrho\xi}\right) = \frac{3xyz}{3xy+2yz-4zx}$$

und für $-\xi$

$$\binom{r}{5} = \frac{3\xi\psi\varrho}{+\xi\psi-\psi\varrho+\varrho\xi} = \frac{3xz}{3x-2z};$$

übrigens ist

$$\binom{r}{3} = -\binom{r}{5} = \frac{-3xz}{3x-2z}$$

$$\binom{r}{7} = \left(-\binom{r}{1}\right) = (-z)$$

$$\binom{r}{6} = \left(-\binom{r}{4}\right) = \left(\frac{-3yz}{4z-3y}\right)$$

$$\binom{r}{8} = \left(-\binom{r}{2}\right) = \left(\frac{-3xyz}{3xy+2yz-4zx}\right).$$

Der Werth $\binom{R}{5}$ wird aus $\binom{R}{2} = (cu) = \frac{2\xi\psi}{\xi+\psi} r^{\frac{1}{2}}$ entwickelt, wenn man in dieser Gleichung statt $\binom{R}{2}$ die Gröſse $\binom{R}{5}$ und statt ψ die Gröſse $-\psi$ setzt und statt ξ und ψ die Werthe aus den Gleichungen 1 und 2 einführt.

Es ist dann

$$\binom{R}{5} = \frac{2\xi\psi}{\psi-\xi} r^{\frac{1}{2}} = \frac{2xyz}{-3xy+yz+2zx} r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{8} = \left(-\frac{R}{2}\right) = \frac{-2xyz}{3xy+yz-2zx} r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{11} = \left(-\frac{R}{5}\right) = \frac{-2xyz}{-3xy+yz+2zx} r^{\frac{1}{2}}.$$

$\binom{R}{6}$ wird aus $\binom{R}{1} = cn = \frac{2\xi\varrho}{\xi+\varrho} r^{\frac{1}{2}}$, wenn statt ϱ gesetzt wird $-\varrho$ und dann die Werthe ξ und ϱ aus 1 und 3 substituirt werden. Man hat dann

$$\binom{R}{6} = \frac{2\xi\varrho}{\varrho-\xi} r^{\frac{1}{2}} = \frac{xy}{y-x} r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{12} = \left(-\frac{R}{1}\right) = -y r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{7} = \left(-\frac{R}{6}\right) = \frac{-xy}{y-x} r^{\frac{1}{2}};$$

$\binom{R}{4}$ wird aus $\binom{R}{3} = ci = \frac{2\psi\varrho}{\psi+\varrho} r^{\frac{1}{2}}$ gefunden, wenn statt ψ gesetzt wird $-\psi$ und dann statt ψ und ϱ die Werthe aus 2 und 3 eingeführt werden. Man erhält so:

$$\binom{R}{4} = \frac{2\psi\varrho}{\psi-\varrho} r^{\frac{1}{2}} = \frac{2xyz}{-3xy-yz+4zx} r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{9} = \left(-\frac{R}{3}\right) = \frac{-2xz}{3x-2} r^{\frac{1}{2}}$$

$$\binom{R}{10} = \left(-\frac{R}{4}\right) = \frac{-2xyz}{-3xy-yz+4zx} r^{\frac{1}{2}}.$$

Auf solche Weise wird gefunden, welcher Längenwerth jedem der 6 Strahlen a und jedem der 12 Strahlen R und jedem der 8 Strahlen r zustehe für eine in Beziehung zum 3gliedrig 4axigen Strahlensysteme in bestimmter Lage befindliche gegebene

Ebene, folglich kann nun unmittelbar angegeben werden, welches Zeichen dieser Ebene in jeder der 48 Zellen entspreche. Es sey z. B. die Ebene gegeben in der Zelle $\underset{1}{a}\,\underset{1}{R}\,\underset{1}{r}$ durch $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$ oder in der 3fach; rechtwinkligen Zelle $\underset{1}{a}\,\underset{6}{a}\,\underset{4}{a}$ durch $[\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$, so ist sie

Nummer der Zelle	in der Zelle a R r mit der Zeigezahl	bestimmt durch $\sqrt{3}$ mit dem Factor	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	Nummer der Zelle	in der Zelle a R r mit der Zeigezahl	bestimmt durch $\sqrt{3}$ mit dem Factor	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1
1)	1 1 1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{7}$	25)	5 5 4	−4	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$
2)	4 1 1	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{7}$	26)	5 4 4	−4	8	$\frac{12}{5}$
3)	4 3 1	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	27)	2 7 5	−1	−4	−12
4)	6 3 1	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	28)	2 11 5	−1	$-\frac{8}{3}$	−12
5)	6 2 1	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{7}$	29)	3 10 2	−2	−8	4
6)	1 2 1	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{7}$	30)	3 6 2	−2	4	4
7)	1 1 4	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	31)	5 5 3	−4	$\frac{8}{3}$	12
8)	4 1 4	2	$\frac{4}{3}$	$\frac{12}{5}$	32)	5 4 8	−4	8	− 4
9)	4 3 5	2	$\frac{8}{3}$	−12	33)	2 7 8	−1	−4	− 4
10)	6 3 5	4	$\frac{8}{3}$	−12	34)	2 11 6	−1	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{5}$
11)	6 2 2	4	$\frac{8}{5}$	4	35)	3 10 6	−2	−8	$-\frac{12}{5}$
12)	1 2 2	1	$\frac{8}{5}$	4	36)	3 6 3	−2	4	12
13)	1 5 4	1	$\frac{8}{3}$	$\frac{12}{5}$	37)	5 9 3	−4	$-\frac{8}{3}$	12
14)	4 4 4	2	8	$\frac{12}{5}$	38)	5 8 8	−4	$-\frac{8}{5}$	− 4
15)	4 7 5	2	−4	−12	39)	2 8 8	−1	$-\frac{8}{5}$	− 4
16)	6 11 5	4	$-\frac{8}{3}$	−12	40)	2 12 6	−1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$
17)	6 10 2	4	−8	4	41)	3 12 6	−2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{5}$
18)	1 6 2	1	4	4	42)	3 9 3	−2	$-\frac{8}{3}$	12
19)	1 5 3	1	$\frac{8}{3}$	12	43)	5 9 7	−4	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{7}$
20)	4 4 8	2	8	− 4	44)	5 8 7	−4	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{7}$
21)	4 7 8	2	−4	− 4	45)	2 8 7	−1	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{12}{7}$
22)	6 11 6	4	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{5}$	46)	2 12 7	−1	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{7}$
23)	6 10 6	4	−8	$-\frac{12}{5}$	47)	3 12 7	−2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{12}{7}$
24)	1 6 3	1	4	12	48)	3 9 7	−2	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{12}{7}$

Unter den 48 Zellen befinden sich demnach 15, in deren jeder die 3 Bestimmungsstrahlen a, R, r derselben von der fraglichen Fläche geschnitten werden, ohne über den Mittelpunct hinaus verlängert werden zu müssen[1], in 9 andern Zellen wer-

1 Es sind dieses in dem gewählten Beispiele die den fortlaufenden Nummern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 11, 12, 13, 14, 18, 19, 24 entsprechenden.

den blofs 2 der Bestimmungsstrahlen a, R, r auf solche Weise geschnitten, der 3te aber mufs über den Mittelpunct hinaus verlängert werden [1], in noch andern 9 Zellen wird blofs einer der Bestimmungsstrahlen unmittelbar geschnitten, von den beiden anderen Strahlen aber werden blofs die Verlängerungen über den Mittelpunct hinaus geschnitten [2].

Die dann noch übrigen 15 Zellen werden von der in Rede seyenden Fläche nicht durchschnitten, jeder der 3 Strahlen einer solchen Zelle mufs über den Mittelpunct hinaus, also nach rückwärts, verlängert werden, ehe er von dieser Fläche geschnitten wird.

Daraus geht zugleich hervor, dafs 48 in Beziehung auf ihre Lage zu einem 3gliedrig 4axigen Strahlensysteme einander gleichwerthige Ebenen 33 verschiedenen 2fach 3gliedrig 8strahligen Gestalten als Grenzen oder Wände dienen, nämlich 15 verschiedenen ringsum endlich begrenzten Räumen, deren jeder ein 48wandiger Dreieckflächner ist, und 18 zwar begrenzten d. h. von Aufsen gänzlich abgeschiedenen, aber nach mehreren Richtungen hin unendlichen Räumen [3].

Bezeichnung von Flächen, die in verschiedenen Zellen liegend gegeben sind in einer und derselben Zelle.

Es ist leicht einzusehen, dafs eine Fläche, welche in der Zelle aRr bezeichnet ist durch $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$, in der Zelle
121

1 Dieses ist der Fall in den Zellen 9, 10, 17, 20, 25, 26, 30, 31, 36.

2 So in den Zellen 15, 16, 21, 22, 23, 29, 32, 37, 42.

3 Dazu kommt noch, dafs gleichfalls der äufsere unendliche Raum, welcher eine dieser 33 Gestalten umgiebt (gleichsam die hohle Form für einen solchen ist), wieder als besondere Hohlgestalt betrachtet werden kann, wodurch jene 33 Gestalten sich verdoppeln und zu 66 werden. Die zu der Gestalt $(2\sqrt{3}, 8\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{5})$ gehörige Hohlgestalt $((-2\sqrt{3}), (-8\sqrt{\frac{3}{2}}), (-\frac{12}{5}))$ kann dargestellt werden durch $)2\sqrt{3}, 8\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{5}($, so wie die zu $(2\sqrt{3}, (-4\sqrt{\frac{3}{2}}), (-12))$ gehörige durch $)2\sqrt{3}, (-4\sqrt{\frac{3}{2}}), (-12)($ und die zu $((-2\sqrt{3}), 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 12)$ gehörige durch $)(-2\sqrt{3}), 4\sqrt{\frac{3}{2}}, 12($.

$\underset{111}{aRr}$ wird eben so bezeichnet werden müssen, wie die Fläche, welche in der Zelle $\underset{111}{aRr}$ bezeichnet ist durch $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$, in der Zelle $\underset{121}{aRr}$ zu bezeichnen war, während die in der Zelle $\underset{431}{aRr}$ durch $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$ bezeichnete Fläche in der Zelle $\underset{111}{aRr}$ so wird bezeichnet werden müssen, wie die in $\underset{111}{aRr}$ mit $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$ bezeichnete Fläche in der Zelle $\underset{621}{aRr}$ bezeichnet wurde. Behält man die Numerirung der 48 Zellen bei, welche bei der Tabelle über das Verhalten der Fläche $(\sqrt{3}, \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{12}{7})$ der Zelle $\underset{111}{aRr}$ in den sämmtlichen 48 Zellen gewählt wurde, so kann man sagen, die 6te Zelle verhalte sich in dieser Beziehung zur 1sten, wie die 1ste zur 6ten, und die 3te zur 1sten, wie die 1ste zur 5ten, während die 5te zur 1sten sich verhält wie die 1ste zur 3ten. Sagt man daher: eine Fläche F der nten Zelle sey in der 1sten Zelle so zu bezeichnen, wie die Fläche F der 1sten Zelle in der mten Zelle zu bezeichnen war, so sind die einander entsprechenden Werthe von n und m in folgender Tabelle neben einander gestellt:

n	m	n	m	n	m	n	m
1	1	13	12	25	9	37	23
2	2	14	11	26	10	38	35
3	5	15	30	27	27	39	34
4	4	16	29	28	28	40	40
5	3	17	17	29	16	41	41
6	6	18	18	30	15	42	22
7	7	19	19	31	20	43	43
8	8	20	31	32	32	44	48
9	25	21	36	33	33	45	45
10	26	22	42	34	39	46	46
11	14	23	37	35	38	47	47
12	13	24	24	36	21	48	44

Gleichungen zwischen den trigonometrischen Functionen der Kanten einer 3gliedrig 4axigen Gestalt und den Werthen der Bestimmungsstrahlen.

Es seyen die Werthe der Bestimmungsstrahlen zweier Flächen in der 1sten Zelle $\underset{111}{aRr}$ (gleichviel ob sie als Begrenzungstheile einer gegebenen Gestalt darin liegen oder nicht) für die eine $= (\gamma\sqrt{3}, \varrho\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \delta)^{\mathrm{I}}$ und für die andere $(\mathfrak{g}\sqrt{3}, \mathfrak{r}\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \mathfrak{d})^{\mathrm{I}}$, so ist, wenn jene in der 3fach rechtwinkligen Zelle $\underset{164}{aaa}$ durch $[\xi_{,}\sqrt{3}, \psi_{,}\sqrt{3}, \varrho_{,}\sqrt{3}]^{\mathrm{I}}$ und diese durch $[\xi_{,,}\sqrt{3}, \psi_{,,}\sqrt{3}, \varrho_{,,}\sqrt{3}]^{\mathrm{I}}$ ausgedrückt wird,

$$\xi_{,} = \gamma \text{ und } \psi_{,} = \frac{\varrho\delta}{3\varrho - 2\delta} \text{ und } \varrho_{,} = \frac{\gamma\varrho}{2\gamma - \varrho}$$

$$\xi_{,,} = \mathfrak{g} \text{ und } \psi_{,,} = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{d}}{3\mathfrak{r} - 2\mathfrak{d}} \text{ und } \varrho_{,,} = \frac{\mathfrak{g}\mathfrak{r}}{2\mathfrak{g} - \mathfrak{r}}.$$

Heiſst dann die Neigung der beiden fraglichen Flächen $= x$, so ist[1]:

⊙. Cos. x =

$$\mp \frac{\xi_{,}\xi_{,,}\psi_{,}\psi_{,,} + \psi_{,}\psi_{,,}\varrho_{,}\varrho_{,,} + \varrho_{,}\varrho_{,,}\xi_{,}\xi_{,,}}{\sqrt{\xi_{,}^2\psi_{,}^2 + \psi_{,}^2\varrho_{,}^2 + \varrho_{,}^2\xi_{,}^2}\;\sqrt{\xi_{,,}^2\psi_{,,}^2 + \psi_{,,}^2\varrho_{,,}^2 + \varrho_{,,}^2\xi_{,,}^2}};$$

setzt man für $\xi_{,}$, $\xi_{,,}$, $\psi_{,}$, $\psi_{,,}$, $\varrho_{,}$, $\varrho_{,,}$ die ihnen zustehenden Werthe, so wird

☽. Cos. x =

$$\mp \frac{\left(\frac{1}{\gamma}\right)\left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right) + \left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)\left(3\left(\frac{1}{\mathfrak{d}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right) + \left(2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)\left(2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)^2 + \left(2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)^2}\;\sqrt{\left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)^2 + \left(3\left(\frac{1}{\mathfrak{d}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right)\right)^2 + \left(2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right)\right)^2}}$$

oder wenn man

$$\frac{1}{\gamma} = \mathrm{l}_{,} \text{ und } 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \mathrm{m}_{,} \text{ und } 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right) = \mathrm{n}_{,}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \mathrm{l}_{,,} \text{ und } 3\left(\frac{1}{\mathfrak{d}}\right) - 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) = \mathrm{m}_{,,} \text{ und } 2\left(\frac{1}{\mathfrak{r}}\right) - \left(\frac{1}{\mathfrak{g}}\right) = \mathrm{n}_{,,}$$

1 Vergleiche die Formeln ♉ für die hauptaxigen Gestalten, insbesondere die Formel ⊙ für die 1- und 1maſsigen.

setzt

$$\sigma) \quad \text{Cos. } x = \mp \frac{l_{,}l_{,,} + m_{,}m_{,,} + n_{,}n_{,,}}{\sqrt{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\sqrt{l_{,,}^2 + m_{,,}^2 + n_{,,}^2}}.$$

Es ist dann

1) $\frac{1}{\gamma} = l_{,}$	und $\frac{1}{\mathfrak{g}} = l_{,,}$
2) $\frac{1}{\varrho} = \frac{n_{,} + l_{,}}{2}$	$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{n_{,,} + l_{,,}}{2}$
3) $\frac{1}{\delta} = \frac{m_{,} + n_{,} + l_{,}}{3}$	$\frac{1}{\mathfrak{d}} = \frac{m_{,,} + n_{,,} + l_{,,}}{3}$

Nimmt man $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{d} = \delta$, aber $\mathfrak{r} = \frac{2\gamma\varrho\delta}{3\gamma\varrho - 2\gamma\delta + \varrho\delta}$, so wird $l_{,,} = l_{,} = \frac{1}{\gamma}$, $m_{,,} = n_{,} = 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right)$,

$$n_{,,} = m_{,} = 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

und man hat dann

$$4) \quad \text{Cos. } x' = -\left(\frac{l_{,}^2 + 2m_{,}n_{,}}{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\right),$$

wenn x' die 4- und 3ständige Kante des 48wandigen Dreieckflächners $(\gamma\sqrt{3}, \varrho\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \delta)$ bedeutet. Für $\mathfrak{g} = \gamma$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und $\mathfrak{d} = \frac{3\varrho\delta}{4\delta - 3\varrho}$ wird $l_{,,} = l_{,} = \frac{1}{\gamma}$,

$$m_{,,} = - m_{,} = -\left(3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right),$$

$$n_{,,} = n_{,} = 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

folglich

$$5) \quad \text{Cos. } x'' = -\left(\frac{l_{,}^2 - m_{,}^2 + n_{,}^2}{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\right),$$

welches die Gleichung ist für die 4- und 2ständige Kante dieses Körpers.

Wenn $\mathfrak{g} = \frac{\gamma\varrho}{2\gamma - \varrho}$ und $\mathfrak{r} = \varrho$ und $\mathfrak{d} = \delta$ ist, so wird

$$l_{,,} = 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) - \frac{1}{\gamma} = n_{,}, \; m_{,,} = 3\left(\frac{1}{\delta}\right) - 2\left(\frac{1}{\varrho}\right) = m_{,},$$

$$n_{,,} = \frac{1}{\gamma} = l_{,},$$

mithin

$$6)\ \text{Cos. } x''' = -\left(\frac{m_{,}^2 + 2 l_{,} n_{,}}{l_{,}^2 + m_{,}^2 + n_{,}^2}\right),$$

wodurch die 3- und 2ständige Kante bestimmt wird. Ist Cos. $x' = x_{,}$ und Cos. $x'' = x_{,,}$ und Cos. $x''' = x_{,,,}$, so hat man

$$7)\ \frac{1 + x_{,}}{1 + x_{,,}} = \frac{(n-m)^2}{2m^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{m} - 1\right)^2$$

folglich

$$8)\ \frac{n}{m} = 1 + \sqrt{\frac{2(1 + x_{,})}{1 + x_{,,}}},$$

$$9)\ \frac{x_{,,} + x_{,,,}}{1 + x_{,,}} = \frac{-(n+1)^2}{2m^2} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{n}{m} + \frac{1}{m}\right)^2,$$

$$10)\ \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{-2(x_{,,} + x_{,,,})}{1 + x_{,,}}} - \frac{n}{m}$$

$$= \sqrt{\frac{-2(x_{,,} + x_{,,,})}{1 + x_{,,}}} - \sqrt{\frac{2(1 + x_{,})}{1 + x_{,,}}} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{2(1 + x_{,})} - \sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{1 + x_{,,}}},$$

$$11)\ \frac{n}{l} = \frac{\sqrt{2(1 + x_{,})} + \sqrt{1 + x_{,,}}}{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{2(1 + x_{,})} - \sqrt{1 + x_{,,}}};$$

ferner ist

$$12)\ \frac{1 + x_{,,,}}{-(x_{,,} + x_{,,,})} = \frac{(1-n)^2}{(1+n)^2} = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2}{\left(\frac{1}{n} + 1\right)^2},$$

folglich

$$13)\ \frac{1}{n} = \frac{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} + \sqrt{1 + x_{,,,}}}{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}}}$$

und daher, wenn man beide Werthe von $\frac{1}{n}$ einander gleich setzt;

$$\frac{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})}}{\sqrt{2(1 + x_{,})} + \sqrt{1 + x_{,,}}} - 1 = \frac{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} + \sqrt{1 + x_{,,,}}}{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}}}$$

$$\frac{\sqrt{-2(x_{,,} + x_{,,,})}}{\sqrt{2(1 + x_{,})} + \sqrt{1 + x_{,,}}} = \frac{2\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})}}{\sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}}},$$

folglich

$$14)\ 2\sqrt{1 + x_{,}} + \sqrt{2(1 + x_{,,})} = \sqrt{-(x_{,,} + x_{,,,})} - \sqrt{1 + x_{,,,}};$$

Wenn man $\frac{1+x_{,}}{2} = (\text{Cos.}\,\frac{1}{2}x')^2 = c_{,}^2$ und $\frac{1+x_{,,}}{2} = c_{,,}^2$ und $\frac{1-x_{,,,}}{2} = (\text{Sin.}\,\frac{1}{2}x''')^2 = s_{,,,}^2$ und $\frac{1+x_{,,,}}{2} = c_{,,,}^2$ setzt, so wird

$$15)\quad \frac{n}{m} = \frac{2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2}}{c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$16)\quad \frac{l}{m} = \frac{2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} - (2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2})}{c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$17)\quad \frac{l}{n} = \frac{2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} - (2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2})}{2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2}},$$

$$18)\quad \frac{l}{n} = \frac{\sqrt{2(s_{,,,}^2 - c_{,,}^2)} + c_{,,,}\sqrt{2}}{\sqrt{2(s_{,,,}^2 - c_{,,}^2)} - c_{,,,}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} + c_{,,,}}{\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} - c_{,,,}}.$$

Daher ist

$$\frac{n+l}{n} = \frac{2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2}}{2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2}}{\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} - c_{,,,}},$$

$$\frac{m+n+l}{n} = \frac{c_{,,}\sqrt{2} + 2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2}}{2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2}},$$

folglich

$$19)\quad \frac{1}{\gamma} : \frac{1}{\varrho} : \frac{1}{\delta} = \left(2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} - (2c_{,} + c_{,,}\sqrt{2})\right) : \sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2} : \tfrac{1}{2}\left(c_{,,}\sqrt{2} + 2\sqrt{s_{,,,}^2 - c_{,,}^2}\right).$$

Die Gleichungen 8 bis 13 und 15 bis 18 dienen dazu, um die Werthe der Verhältnisse der Hülfsgröfsen m, n, l zu finden, wenn die Kanten eines 48wandigen Dreieckflächners als der allgemeinsten Gestalt in dem 3gliedrig 4axigen Gestaltensysteme gegeben sind.

Die Gleichung 19 drückt das Verhältnifs der Werthe γ, ϱ, δ in der Gestalt ($\gamma\sqrt{3}$, $\varrho\sqrt{\frac{1}{2}}$, δ) unmittelbar aus. Die Gleichung 14 giebt das Gesetz der Abhängigkeit der dreierlei Kanten eines derartigen Körpers von einander.

Da aus der Gleichung ♂ alle übrigen noch nicht entwickelten Formeln sich leicht ableiten lassen, so dürfte eine weitere Auseinandersetzung derselben hier wegbleiben können[1].

1 Die Gleichungen für die 3gliedrig 10axigen Gestalten müssen hier wegbleiben, weil diese Gestalten selbst, wie aus dem Folgenden

Bezeichnung von Strahlen.

Wenn in einer Ebene zwei von einem Puncte c ausgehende Strahlen B und D ihrer Gröfse und Richtung nach gegeben sind, so läfst sich, wenn man durch das freie Ende von jedem eine Linie parallel dem anderen Strahle zieht, ein Parallelogramm bilden. Ein 3ter Strahl S in dieser Ebene, welcher vom Anfangspuncte der Ausstrahlung anfängt und die Lage und Gröfse derjenigen Diagonale dieses Parallelogramms hat, für welche dieser Anfangspunct eins der beiden Enden ist, ist daher ein nach Lage und Gröfse vollkommen bestimmter Strahl. Man nenne den Strahl S den Gerenstrahl von B und D (Diagonalstrahl von B und D) und bezeichne ihn durch [B, D].

Geht von dem Puncte C ein Strahl A aus, welcher nicht in die Ebene BD fällt, und ist seine Lage und Länge gegeben, so ist zwischen S und A ein Strahl möglich, welcher der Gerenstrahl von A und S ist und durch [A, S] oder, wenn man statt S seinen Werth setzt, durch [A, B, D] bezeichnet werden kann.

Wenn die Richtungen von 3 Strahlen a, b, d gegeben sind, welche, nicht in einerlei Ebene liegend, vom Anfangspuncte ausgehen, und es ist von irgend einem vierten Strahle x, welcher von demselben Anfangspuncte ausgeht, die Richtung und Gröfse bekannt, so lassen sich stets die Längenwerthe A, B und D auffinden, welche den Strahlen a, b, d eigen seyn müssen, damit jener Strahl x in Beziehung auf die Strahlen a, b, d ausgedrückt sey durch [A, B, D].

Es sey $c\alpha'$ der Strahl a, $c\beta'$ der Strahl b, $c\delta'$ der Strahl d Fig. 329.
und $c\gamma'''$ der Strahl [A, B, D]. Die Richtungsverhältnisse dieser 4 Strahlen mögen durch irgend beliebige Winkelangaben gegeben seyn, so wird stets, wenn man

den Winkel $\alpha' c \beta'$ durch $\mathfrak{D}$ und $\alpha' c \delta' \parallel \beta' c \delta'$ durch $\mathfrak{d}$,
- - $\alpha' c \delta'$ - $\mathfrak{B}$ - $\alpha' c \beta' \parallel \delta' c \beta'$ - $\mathfrak{b}$,
- - $\beta' c \delta'$ - $\mathfrak{A}$ - $\alpha' c \beta' \parallel \alpha' c \delta'$ - $\mathfrak{a}$

bezeichnet, aus der Angabe selbst die Beschaffenheit dreier der sechs Stücke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ der Ecke $c, \alpha' \beta' \delta'$ so folgen müs-

erhellen wird, dem Gebiete der Krystallkunde fremd sind. Vergleiche übrigens Rothe: Ueber die regulären geometrischen Körper u. s. w. in Kastner's Archiv etc. 1825 ff. J.

sen, daſs aus ihnen sich nach den gewöhnlichen Gesetzen der Eckenlehre (von welcher die sogenannte sphärische Trigonometrie einen Theil ausmacht) die übrigen drei sich bestimmen lassen. Eben so muſs aus den Winkelangaben über den Strahl $c\gamma'''$ sich ableiten lassen die Gröſse des Winkels $\gamma''' c \beta' = \mathfrak{T}$ und des Winkels $\gamma''' c \delta' = \mathfrak{P}$ und aus $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ und dem Winkel $\mathfrak{A}$ jene der Neigungen $\gamma''' c \beta' \parallel \delta' c \beta' = p$ und $\gamma''' c \delta' \parallel \beta' c \delta' = t$ und dann läſst sich aus p und b die Gröſse der Neigung $\gamma''' c \beta' \parallel \gamma'' c \alpha' = P$ und aus t und $\mathfrak{d}$ die der Neigung $\gamma''' c \delta' \parallel \gamma' c \delta' = T$ finden, denn $p + P = b$ und $t + T = \mathfrak{d}$. Eine Linie, welche von α' aus senkrecht auf $c\beta'$, und eine andere, welche von δ' aus senkrecht auf $c\beta'$ gefällt würden, müſsten sich verhalten wie Sin. p : Sin. P; da nun jene sich ausdrücken läſst durch $c\alpha'$. Sin. $\mathfrak{D}$ und diese durch $c\delta'$. Sin. $\mathfrak{A}$, so ist:

$$c\alpha' \text{ Sin. } \mathfrak{D} : c\delta' \text{ Sin. } \mathfrak{A} = \text{Sin. } p : \text{Sin. } P$$

oder $$c\alpha' : c\delta' = \text{Sin. } \mathfrak{A} \,.\, \text{Sin. } p : \text{Sin. } \mathfrak{D} \,.\, \text{Sin. } P.$$

Eben so hat man:

$$c\alpha' : c\beta' = \text{Sin. } \mathfrak{A} \,.\, \text{Sin. } t : \text{Sin. } \mathfrak{B} \,.\, \text{Sin. } T,$$

mithin $$A : B : D = c\alpha' : c\beta' : c\delta' =$$

$$\text{Sin. } \mathfrak{A} \,.\, \text{Sin. } p \,.\, \text{Sin. } t : \text{Sin. } \mathfrak{B} \,.\, \text{Sin. } p \,.\, \text{Sin. } T : \text{Sin. } \mathfrak{D} \,.\, \text{Sin. } t \,.\, \text{Sin. } P.$$

Daſs der Werth A oder B oder D, welcher einem solchen Strahle a, b oder d für irgend eine gegebne Einheit zusteht, positiv oder negativ, unendlich groſs oder Null seyn, daſs er rational oder irrational seyn könne u. s. w., ist an sich klar.

Das Gerengesetz oder Gesetz vom Parallelogramme der Strahlen.

Es läſst sich in der Ebene zweier nach Länge und Lage gegebener Strahlen B und D, die nicht in einer und derselben geraden Linie liegen, stets ein neuer 3ter Strahl S′ denken, welcher der Gerenstrahl von B und D und daher nach Länge und Lage bestimmt ist. Zwischen S′ und B ist daher abermals ein neuer Strahl S″ möglich, welcher Gerenstrahl von S′ und B ist; ebenso entsteht auch ein Gerenstrahl S‴ von S′ und D. Durch Verbindung von S″ mit B oder D oder S′ entstehen abermals neue Strahlen und es läſst sich auf solche Weise eine unendliche Menge von Strahlen nach und nach aus zwei solchen gegebenen Strahlen B und D ableiten, von denen jeder neue immer wieder Gerenstrahl ist von zwei älteren, welche

schon als Gerenstrahlen von wieder andern bereits bestimmten Strahlen erkannt sind u. s. w. Ein Gesetz, welches diese Art der Abhängigkeit irgend einer Strahlenmenge von einander und von zwei ursprünglich gegebenen fordert, nennt man Gerenstrahlengesetz oder *Gerengesetz* oder auch das Gesetz von *Parallelogramme der Strahlen*[1].

Wird in der Ebene BD der Strahl S verbunden mit dem Strahle B und der Gerenstrahl von B und S betrachtet, so ist einleuchtend, dafs [B, S] = [2B, D] sey. Ist z.B. cb′ = B und cd′ = D, so ist cs′ = S und cs″ liegt als Gerenstrahl zwischen cs′ und cb′ und wieder als Gerenstrahl zwischen cd′ und cb″ d. h. zwischen D und 2B. Ebenso ist ferner der Gerenstrahl von cs″ und cb′ = [3B, D] u. s. w. Auf ähnliche Weise ist der Gerenstrahl zwischen cs′ und D = [B, 2D] und der von [B, 2D] und D wird [B, 3D]. Allgemein ist der Gerenstrahl von [mB, D] und B nichts anderes als der Strahl [(m + 1)B, D] und jener von [B, nD] und D ist [B, (n + 1)D]. Der Gerenstrahl von [3B, D] und D ist ebenso = [3B, 2D], wie es z. B. bei dem Strahle c″s‴ wohl ohne ausführlichen Beweis einleuchtet, dafs er sowohl Gerenstrahl von cd′ und cs″ als auch von cd″ = 2D und cb‴ = 3B seyn müsse.

Fig. 321.

Fig. 322.

Dafs man die beiden gegebenen Strahlen B und D auch darstellen könne durch [B, oD] den ersten und [oB, D] den zweiten, ist gleichfalls einleuchtend. Es ist daher jeder bisher aus den beiden gegebenen Strahlen B und D gerengesetzlich abgeleitete Strahl in der Ebene BD unter dem allgemeinen Zeichen [mB, nD] begriffen, so dafs jeder der Buchstaben B und D die ursprünglich gegebene Länge des seiner Richtung nach bekannten Strahles B oder D bedeutet, welche gleichsam als *Mafs* dient für die in der Richtung von B oder D liegende Linie, während jeder der Buchstaben m oder n eine *rationale* Zahl ist, welche angiebt, wie vielmal dieses Mafs zu nehmen sey, und die man daher den Mafszähler für B oder D nennen kann.

Sind nun irgend zwei Strahlen bezeichnet durch [m′B, n′D] und [m″B, n″D] in Beziehung zu den beiden gegebenen Strahlen B und D, so ist der Gerenstrahl von diesen beiden = [xB, yD], so dafs x und y rationale ganze Zahlen sind, wenn

1 Es gründet sich auf dieses Gesetz die Lehre vom Parallelogramme der Kräfte.

Fig. 323. m', n', m'', n'' rationale ganze Zahlen waren. Es sey nämlich $cb^{(m,)} = m'B$ und $cd^{(n,)} = n'D$ und $cb^{(m,,)} = m''B$ und $cd^{(n,,)} = n''D$, so ist $c\sigma = [m'B, n'D]$ und $cs = [m''B, n''D]$. Der Gerenstrahl $c\Sigma$ von $c\sigma$ und cs ist nun zugleich Gerenstrahl von $cb^{(x)}$ und $cd^{(y)}$. Aber $cb^{(x)} = cb^{(m,)} + b^{(m,)}b^{(x)} = cb^{(m,)} + cb^{(m,,)}$, denn $b^{(m,)}b^{(x)} = \sigma\tau = cb^{(m,,)}$, weil das Dreieck $\sigma\tau\Sigma \cong$ dem Dreieck $cb^{(m,,)}s$, wie leicht einzusehen ist; daher ist $cb^{(x)} = m'B + m''B = (m' + m'')B$ und ebenso $cd^{(y)} = n'D + n''D = (n' + n'')D$, folglich $c\Sigma = [(m' + m'')B, (n' + n'')D]$.

Es läſst sich daher jeder zu den beiden Strahlen B und D in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehende Strahl ausdrücken durch [mB, nD], so daſs B und D die gegebenen Werthe von B und D, die Gröſsen m und n aber rationale Maſszähler für B und D sind.

Daſs nun auch umgekehrt jeder Strahl, welcher auf solche Weise durch [mB, nD] ausgedrückt werden kann, in gerengesetzlicher Abhängigkeit von B und D stehen müsse, ist leicht einzusehen.

Wenn eine Gesammtheit von Strahlen gegeben ist, welche in gerengesetzlicher Abhängigkeit von zwei ursprünglich gegebenen Strahlen B und D stehen (d. h. eine Gesammtheit von Strahlen, deren jeder durch das allgemeine Zeichen [yB, zD] dargestellt ist, so daſs y und z rationale Maſszähler, B und D aber die Maſse der zwei ursprünglich gegebenen Strahlen sind), so ist jeder einzelne Strahl darunter in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je zwei beliebigen andern zu derselben Gesammtheit gehörigen Strahlen β und δ (d. h. läſst sich ausdrücken durch $[\psi\beta, \varrho\delta]$, so daſs ψ und ϱ rationale Maſszähler sind und β und δ die Werthe bedeuten, welche den Strahlen β und δ vermöge ihrer gegebenen Abhängigkeit von B und D zustehen).

Fig. 323. Denn es sey $cb^{(x)} = xB$ und $cd^{(y)} = yD$; ferner sey die Länge von $c\sigma = p.\pi$ und jene von $cs = t.\tau$, so daſs π ein Strahl in $c\sigma$ und τ ein solcher in cs liegender ist und $\pi = [m'B, n'D]$ und $\tau = [m''B, n''D]$, so ist $c\sigma = [p.m'B, p.n'D]$ und $cs = [t.m''B, t.n''D]$; ferner sey $c\sigma$ und cs so bestimmt, daſs $c\Sigma$ Gerenstrahl von cs und $c\sigma$ ist. Es muſs daher

$$(p.m' + t.m'')B = xB$$

und $$(p.n' + t.n'')D = yD$$

oder $$1)\ m'.p + m''.t = x$$

$$2)\ n'.p + n''.t = y \quad \text{seyn.}$$

Daraus folgt

$$3)\quad p = \frac{n''x - m''y}{m'n'' - m''n'}$$

$$4)\quad t = \frac{m'y - n'x}{m'n'' - m''n'},$$

so dafs also p und t rationale Zahlen sind, wenn m', n', m'', n'', x und y rationale Zahlen sind. Strahlen, welche in gerengesetzlicher Abhängigkeit von zweien unter ihnen stehen, sind daher auch in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je zweien unter ihnen.

Wenn 3 von einem Puncte c ausgehende Strahlen A, B, D gegeben sind, die so liegen, dafs nur je zwei in eine Ebene und nicht zwei in eine und dieselbe gerade Linie fallen, so ist

$$A = [A,\ oB,\ oD]$$
$$B = [oA,\ B,\ oD]$$
$$D = [oA,\ oB,\ D]$$

und aufser

$$[A, B] = [A, B, oD]$$
$$[B, D] = [oA, B, D]$$
$$[A, D] = [A, oB, D]$$

hat man hier noch den Strahl [A, B, D], so dafs jeder von diesen 7 Strahlen dem Zeichen [l A, m B, n D] entspricht, indem l, m und n rationale Zahlen bedeuten, weil Null und Eins rational sind, während A, B, D die einfachen Mafse der ihrer Lage nach gegebenen ersten drei Strahlen sind.

Fährt man fort durch Verbindung von je zwei bereits bestimmten Strahlen im Raume immer einen neuen Strahl zu bestimmen, welcher der Gerenstrahl dieser beiden ist, so erhält man eine unendliche Menge von Strahlen, die in gerengesetzlicher Abhängigkeit von den drei zuerst gegebenen Strahlen A, B, D stehen, von denen jeder daher sich ausdrücken läfst durch das allgemeine Zeichen [lA, m B, n D], so dafs l, m, n irgend drei rationale Mafszähler sind, wenn A, B, D die ursprünglich gegebenen Mafse der drei gegebenen Strahlen sind. Es ist nämlich auch hier, wie leicht einzusehen, der Gerenstrahl von $[l'A, m'B, n'D]$ und $[l''A, m''B, n''D]$ wieder

$$= [(l'+l'')A,\ (m'+m'')B,\ (n'+n'')D].$$

Ist z. B. $cv = [l'A, m'B, n'D]$, mithin $c\mathfrak{a} = l'A$ und $c\mathfrak{b} = m'B$ und $c\mathfrak{d} = n'D$, ferner $cw = [l''A, m''B, n''D] = [c\alpha, c\beta, c\delta]$ und $ct = [c\mathfrak{a}, c\mathfrak{b}, c\mathfrak{d}] = [xA, yB, zD]$, so ist $c\mathfrak{a} = c\alpha + \alpha\mathfrak{a}$, weil aber die Ebene $\mathfrak{a}t \# \alpha w \# av \# bd$ und die Linie $cv \# wt$ und $cv = wt$ ist und $\alpha\mathfrak{a}$ dieselbe Rich-

tung hat wie ca, so ist $\alpha\mathfrak{a} = ca$, folglich $c\mathfrak{a} = c\alpha + ca = (l' + l'')A$. Ebenso ist $c\mathfrak{b} = cb + c\beta = (m' + m'')B$ und $c\mathfrak{d} = cd + c\delta = (n' + n'')D$. Wenn also Strahlen im Raume in gerengesetzlicher Abhängigkeit von drei gegebenen nicht in einerlei Ebene liegenden Strahlen A, B, D sind, so lassen sie sich ausdrücken durch $[lA, mB, nD]$, so daſs l, m, n, A, B, D die bereits erwähnte Bedeutung haben.

Umgekehrt, läſst ein Strahl sich auf solche Weise ausdrücken durch $[lA, mB, nD]$, so ist er in gerengesetzlicher Abhängigkeit von A, B, D.

Ist eine Gesammtheit von Strahlen gegeben, deren jeder in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht von drei derselben A, B, D, die nicht in einerlei Ebene liegen, so ist jeder einzelne zu dieser Gesammtheit gehörige Strahl in gerengesetzlicher Abhängigkeit von je drei unter diesen gegebenen, die beliebig, jedoch so zu wählen sind, daſs nicht zwei in eine gerade Linie und nicht alle 3 in einerlei Ebene fallen. Es sey nämlich gegeben

ein Strahl $\alpha = [l'A, m'B, n'D]$
- - $\beta = [l''A, m''B, n''D]$
- - $\gamma = [l'''A, m'''B, n'''D]$
- - $\delta = [l^{iv}A, m^{iv}B, n^{iv}D]$,

so ist, wenn man $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$ setzt, ein Strahl möglich, so daſs

$$\varrho = [x\alpha, y\beta] = [(xl' + yl'')A, (xm' + ym'')B, (xn' + yn'')D].$$

Da nun $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$, so ist auch $\delta = [\varrho, z, \gamma]$ $= [(xl' + yl'' + zl''')A, (xm' + ym'' + zm''')B, (xn' + yn'' + zn''')D]$.

Man hat daher

$$1)\ l'x + l''y + l'''z = l^{iv}$$
$$2)\ m'x + m''y + m'''z = m^{iv}$$
$$3)\ n'x + n''y + n'''z = n^{iv}$$

$$x = \frac{-(l''m'''n^{iv} + m''n'''l^{iv} + n''l'''m^{iv}) + (n''m'''l^{iv} + m''l'''n^{iv} + l''n'''m^{iv})}{(l'm''n''' + m'n''l''' + n'l''m''') - (n'm''l''' + m'l''n''' + l'n''m''')}$$

$$y = \frac{-(l'''m'n^{iv} + m'''n'l^{iv} + n'''l'm^{iv}) + (n'''m'l^{iv} + m'''l'n^{iv} + l'''n'm^{iv})}{(l''m'''n' + m''n'''l' + n''l'''m') - (n''m'''l' + m''l'''n' + l''n'''m')}$$

$$z = \frac{-(l'm''n^{iv} + m'n''l^{iv} + n'l''m^{iv}) + (n'm''l^{iv} + m'l''n^{iv} + l'n''m^{iv})}{(l'''m'n'' + m'''n'l'' + n'''l'm'') - (n'''m'l'' + m'''l'n'' + l'''n'm'')}$$

so dafs also in dem Ausdrucke $\delta = [x\alpha, y\beta, z\gamma]$ die Werthe von x, y und z rational sind, mithin auch δ in gerengesetzlicher Abhängigkeit von α, β und γ steht, wenn α, β, γ und δ in gerengesetzlicher Abhängigkeit von A, B, D sind.

Wird $l^{IV} = 1$, $m^{IV} = n^{IV} = 0$ und der gemeinschaftliche Nenner in den drei Ausdrücken für x, y und z = N gesetzt, so wird

$$x = \frac{n''m''' - m''n'''}{N}$$

$$y = \frac{n'''m' - m'''n'}{N}$$

$$z = \frac{n'm'' - m'n''}{N}$$

und man hat

$$A = \left[\frac{n''m''' - m''n'''}{N}\alpha, \frac{n'''m' - m'''n'}{N}\beta, \frac{n'm'' - m'n''}{N}\gamma\right].$$

Auf ähnliche Weise erhält man für $m^{IV} = 1$ und $n^{IV} = l^{IV} = 0$ das Zeichen

$$B = \left[\frac{l''n''' - n''l'''}{N}\alpha, \frac{l'''n' - n'''l'}{N}\beta, \frac{l'n'' - n'l''}{N}\gamma\right]$$

und für $n^{IV} = 1$ und $l^{IV} = m^{IV} = 0$ das Zeichen

$$D = \left[\frac{m''l''' - l''m'''}{N}\alpha, \frac{m'''l' - l'''m'}{N}\beta, \frac{m'l'' - l'm''}{N}\gamma\right],$$

so dafs, wenn die Zeichen vieler Strahlen zu übersetzen sind aus einer Form wie $[l^{IV}A, m^{IV}B, n^{IV}D]$ in eine andere wie $[x\alpha, y\beta, z\gamma]$, man nur nöthig hat, den Ausdruck für A mit dem jedesmaligen Werthe von l^{IV} in allen Gliedern zu multipliciren, um $l^{IV}A$ zu erhalten, und ebenso $m^{IV}B$ und wieder $n^{IV}D$ zu bilden und die drei so gefundenen Ausdrücke gliedweise zu addiren, wonach dann

$$l^{IV}A =$$

$$\left[l^{IV}\left(\frac{n''m''' - m''n'''}{N}\right)\alpha, l^{IV}\left(\frac{n'''m' - m'''n'}{N}\right)\beta, l^{IV}\left(\frac{n'm'' - m'n''}{N}\right)\gamma\right]$$

$$m^{IV}B =$$

$$\left[m^{IV}\left(\frac{l''n''' - n''l'''}{N}\right)\alpha, m^{IV}\left(\frac{l'''n' - n'''l'}{N}\right)\beta, m^{IV}\left(\frac{l'n'' - n'l''}{N}\right)\gamma\right]$$

$$n^{IV}D =$$

$$\left[n^{IV}\left(\frac{m''l''' - l''m'''}{N}\right)\alpha, n^{IV}\left(\frac{m'''l' - l'''m'}{N}\right)\beta, n^{IV}\left(\frac{m'l'' - l'm''}{N}\right)\gamma\right]$$

$$[l^{IV}A,\ m^{IV}B,\ n^{IV}D] =$$

$$\left[\frac{l^{IV}(n''m'''-m''n''')+m^{IV}(l''n'''-n''l''')+n^{IV}(m''l'''-l''m''')}{N}\,\alpha,\right.$$

$$\frac{l^{IV}(n'''m'-m'''n')+m^{IV}(l'''n'-n'''l')+n^{IV}(m'''l'-l'''m')}{N}\,\beta,$$

$$\left.\frac{l^{IV}(n'm''-m'n'')+m^{IV}(l'n''-n'l'')+n^{IV}(m'l''-l'm'')}{N}\,\gamma\right].$$

Wenn bloſs von der gerengesetzlichen Richtung der Strahlen die Rede ist, so kann N vernachlässigt werden und es ist dann die Aufgabe, für sämmtliche Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins, welche in Beziehung zu drei ursprünglich gegebenen Strahlen A, B, D bezeichnet sind, die neue Bezeichnung zu finden, bei welcher drei andere von diesen Strahlen α, β, γ als die der Bezeichnung zum Grunde liegenden angenommen werden sollen, ungemein leicht aufzulösen.

Wenn eine Verbindung von mehreren Strahlen in einer Ebene, deren jeder von je zweien[1] derselben in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, mit einer zweiten solchen Verbindung von in derselben Ebene liegenden Strahlen, deren jeder von je zweien unter *diesen* in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, von einem und demselben Mittelpuncte ausgeht, und es sind unter der Verbindung dieser beiden Strahlengruppen zwei nicht in einerlei gerader Linie liegende Strahlen vorhanden, deren jeder sowohl von zwei Strahlen der einen Gruppe, als auch von zwei Strahlen der andern Gruppe in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, so verhält sich jeder Strahl des ganzen nunmehrigen Strahlenvereins gerengesetzlich zu je zwei Strahlen, die demselben angehören, d. h. beide Vereine bilden dann einen *einzigen gerengesetzlichen Strahlenverein in der Ebene*.

Von einer Gesammtheit von Strahlen im Raume (d. h. die nicht alle in einerlei Ebene liegen), deren jeder von je dreien derselben in gerengesetzlicher Abhängigkeit steht, kann man

1 Da es sich von selbst versteht, daſs zwei Strahlen, durch welche neue Strahlenrichtungen bestimmt werden sollen, nicht in eine gerade Linie fallen dürfen, so mag diese Bestimmung wegfallen. Ebenso versteht es sich von selbst, daſs, wenn durch 3 gegebene Strahlen neue Strahlen bestimmt werden sollen, die nicht alle in eine Ebene fallen, auch nicht mehr als zwei derselben in einerlei Ebene liegend gegeben seyn dürfen. Es kann daher auch dieser Beisatz vernachlässigt werden.

sagen, sie gehören zu *einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine im Raume.*

Wenn zwei gerengesetzliche Strahlenvereine im Raume mit einander verbunden werden, so dafs sie einen gemeinsamen Mittelpunct haben, und es sind dann unter der so verbundenen Strahlenmenge drei Strahlen vorhanden, deren jeder sich gerengesetzlich verhält zu drei Strahlen des einen der beiden Vereine sowohl, als zu drei Strahlen des andern Strahlenvereins, so bilden beide Vereine zusammen einen einzigen gröfseren gerengesetzlichen Strahlenverein.

Wenn zwei Strahlen b und d einen Winkel c bilden, dessen Cosinus = q ist, und die Länge von b durch B, die von d durch D ausgedrückt wird, so ist der Strahl [B, D] an Länge $= \sqrt{B^2 + D^2 + 2BD.q}$, und wenn sein Winkel mit b durch x und jener mit d durch y bezeichnet wird, so ist

$$\text{Sin. } x : \sqrt{1-q^2} = D : \sqrt{B^2+D^2+2BD.q}$$
$$\text{Sin. } y : \sqrt{1-q^2} = B : \sqrt{B^2+D^2+2BD.q}$$
$$\text{Cos. } (x+y) = q.$$

Wenn D = B ist, so wird die Länge des Strahls [B, D] oder

$$S = B\sqrt{2(1+q)}.$$

Der Werth von S wird daher nur dann rational, wenn $1 + q$ eine ungerade Potenz von 2 d. h. $= 2^{2n+1}$ ist; es wird dann $q = 2^{2n+1} - 1$ seyn. Von den Winkeln, welche bei pgliedrigen ebenen Strahlensystemen am Mittelpuncte die bezeichnenden Winkel für zwei ebenbildliche Strahlen sind, deren jeder $= \frac{360°}{p}$ ist, so dafs p eine ganze Zahl bedeutet, haben blofs folgende die fragliche Eigenschaft: 1) $\frac{360°}{1}$, dann ist $q = +1$ und $1 + q = 2^1$; ferner 2) $\frac{360°}{2} = 180°$, denn Cos. $180° = -1$, also $-1+1=0$, so dafs $S=0$ wird, und 3) $\frac{360°}{3} = 120°$, denn Cos. $120° = -\frac{1}{2}$, also $1+q = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$, also $S = B$. Jeder andere Winkel, welcher $= \frac{360}{p}$ Graden ist, hat einen irrationalen Cosinus. Es folgt hieraus, dafs bei 1- und mmafsigen Strahlensystemen, deren m gröfser als 3 ist, die Gesammtheit der ebenbildlichen Strahlen

einer Art *nicht zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören könne.*

Bei den 2fach 3gliedrig 8strahligen Axensystemen bilden die 4gliedrigen Strahlen einen gerengesetzlichen Strahlenverein im Raume, einen 2ten bilden die 2gliedrigen und einen 3ten die 3gliedrigen. Ob alle drei Arten von Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, hängt von dem Längenverhältnisse derselben ab. Ist $a : R : r = x\sqrt{3} : y\sqrt{\frac{1}{2}} : z$ und sind x, y und z rationale Maſszähler, so gehören sämmtliche Strahlen a, R, r zu einerlei gerengesetzlichem Strahlenvereine. Wie dieser Satz auf alle 3gliedrig 4axigen Strahlensysteme anzuwenden sey, bedarf keiner besondern Erläuterung.

In den 3gliedrig 20strahligen Systemen gehören weder alle 5gliedrigen Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine, noch alle 2gliedrigen, noch auch alle 3gliedrigen, daher ist es auch unmöglich, daſs die Gesammtheit der Strahlen aller dieser 3 Arten zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehöre. Wenn durch je zwei Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins eine Ebene gelegt wird, so liegt diese so, daſs jede ihr parallele Ebene je drei nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen des Vereins so schneidet, daſs das Verhältniſs derselben $= l\alpha : m\beta : n\delta$ ist, wenn α, β und δ die den drei fraglichen Strahlen zugehörigen einfachen gegebenen gerengesetzlichen Werthe und l, m, n *rationale* Maſszähler derselben sind.

Fig. 325. Es sey co die Richtung des Strahles α und cπ die des Strahles β und cτ die des Strahles δ. Die beiden Strahlen S' und S'', von denen man weiſs, daſs sie der fraglichen Ebene parallel liegen, seyen in Beziehung auf α, β und δ gegeben durch die gerengesetzlichen Formeln $[L'\alpha, M'\beta, N'\delta]$ der erste und $[L''\alpha, M''\beta, N''\delta]$ der andere. Da es hier bloſs auf die Richtung dieser beiden Strahlen ankommt, so kann

$$S' = [\alpha, \frac{M'}{L'}\beta, \frac{N'}{L'}\delta] \text{ und } S'' = [\alpha, \frac{M''}{L''}\beta, \frac{N''}{L''}\delta]$$

gesetzt werden. Ist nun $co = \alpha$ und $os = \frac{M'}{L'}\beta$ und $o\sigma = \frac{M''}{L''}\beta$ und $or = \frac{N'}{L'}\delta$ und $o\varrho = \frac{N''}{L''}\delta$, so ist $S' = c\xi$ und $S'' = c\psi$. Die durch cξ und cψ gelegte Ebene gehörig erweitert ist tcp. Ihr parallel sey die Ebene $\tau\gamma\pi$, so ist $c\gamma : c\pi : c\tau$

$= oc : op : ot$. Es ist nun $ot = or + rt = \frac{N'}{L'}\delta + rt$,
aber $rt : r\xi = \xi z : z\psi$ oder

$$rt : os = (o\tau - o\varrho) : (o\sigma - os)$$

$$rt : \frac{M'}{L'}\beta = \left(\frac{N'}{L'} - \frac{N''}{L''}\right)\delta : \left(\frac{M''}{L''} - \frac{M'}{L'}\right)\beta$$

$$rt = \frac{M'}{L'}\left(\frac{N'L'' - N''L'}{M''L' - M'L''}\right)\delta$$

$$ot = \left(\frac{N'}{L'} + \frac{M'}{L'}\left(\frac{N'L'' - N''L'}{M''L' - M'L''}\right)\right)\delta = \left(\frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\right)\delta$$

$$ot : op = (N'L'' - N''L')\delta : (M''L' - M'L'')\beta$$

$$op = \frac{(M''L' - M'L'')\beta}{(N'L'' - N''L')\delta}\left(\frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\right)\delta = \left(\frac{M''N' - M'N''}{N'L'' - N''L'}\right)\beta.$$

Daher ist

$$oc : op : ot = \alpha : \frac{M''N' - M'N''}{N'L'' - N''L'}\beta : \frac{M''N' - M'N''}{M''L' - M'L''}\delta$$

$$= \left(\frac{1}{M''N' - M'N''}\right)\alpha : \frac{1}{N'L'' - N''L'}\beta : \frac{1}{M''L' - M'L''}\delta.$$

Da nun $c\gamma$ in die über den Mittelpunct c hinaus gehende Verlängerung von α fällt, so ist $c\gamma$ negativ, wenn co positiv war; daher schneidet die Fläche $\tau\pi\gamma$ die drei Strahlen α, β und δ in dem Verhältnisse $l\,a : m\beta : n\delta =$

$$\left(\frac{1}{M'N'' - M''N'}\right)\alpha : \left(\frac{1}{N'L'' - N''L'}\right)\beta : \left(\frac{1}{L'M'' - L''M'}\right)\delta.$$

Daſs diese Gleichung diene, um das Zeichen ($l\alpha$, $m\beta$, $n\delta$) einer Fläche zu finden, wenn man die Lage von zwei in ihr liegenden Kanten kennt, so daſs die diesen Kanten parallelen Strahlen als durch [$L'\alpha$, $M'\beta$, $N'\delta$] und [$L''\alpha$, $M''\beta$, $N''\delta$] ausgedrückt betrachtet werden können, bedarf kaum erinnert zu werden.

Eine Gesammtheit von Flächen, deren jede zwei nicht in einerlei gerade Linie fallenden Strahlen eines gerengesetzlichen Strahlenvereins im Raume parallel liegt, oder, was dasselbe ist, deren jede sich in Beziehung zu drei nicht in einerlei Ebene liegenden Strahlen des Vereins ausdrücken oder bestimmen läſst

durch ein gerengesetzliches Zeichen $(l\alpha, m\beta, n\delta)$[1], heiſse ein gerengesetzlicher Flächenverein. Gleichwie zwei oder mehrere gerengesetzliche Strahlenvereine von einem gemeinsamen Mittelpuncte ausgehen können, ohne deshalb nothwendig zu einem und demselben gröſseren gerengesetzlichen Strahlenvereine zu gehören, so ist dieses auch bei den diesen Strahlenvereinen entsprechenden gerengesetzlichen Flächenvereinen der Fall.

Wenn 2 Ebenen in Beziehung zu drei gegebenen Strahlen sich durch gerengesetzliche Zeichen ausdrücken lassen, so ist ihre Durchschnittslinie einem Strahle parallel, welcher sich seiner Richtung nach in Beziehung zu denselben drei Strahlen durch ein gerengesetzliches Zeichen ausdrücken läſst.

Die Zeichen beider Flächen in Beziehung zu den darin nach Lage und Länge gegebenen Strahlen α, β, δ seyen

$$\left(\frac{1}{l'}\,\alpha,\ \frac{1}{m'}\,\beta,\ \frac{1}{n'}\,\delta\right) \text{ und } \left(\frac{1}{l''}\,\alpha,\ \frac{1}{m''}\,\beta,\ \frac{1}{n''}\,\delta\right).$$

Da es hier bloſs auf die Richtung der beiden Flächen ankommt, so kann die erste durch $\left(\alpha,\ \frac{l'}{m'}\,\beta,\ \frac{l'}{n'}\,\delta\right)$ und die zweite durch $\left(\alpha,\ \frac{l''}{m''}\,\beta,\ \frac{l''}{n''}\,\delta\right)$ ausgedrückt werden. Sind dann cA,
Fig. 326. cB, cD die Richtungen der 3 gegebenen Strahlen und $ca = \alpha$, $cb = \frac{l'}{m'}\,\beta$, $cb' = \frac{l''}{m''}\,\beta$, $cd = \frac{l'}{n'}\,\delta$ und $cd' = \frac{l''}{n''}\,\delta$, so ist abd die eine und a b′ d′ die andere Fläche und ax die Durchschnittskante beider. Wird xy parallel Dc und xz parallel Bc gezogen, so ist die Kante ax parallel einer Axe, in welcher die beiden Strahlen

$$[ca, (-cy), (-cz)] \text{ und } [(-ca), cy, cz]$$

liegen. Es ist aber $ca = \alpha$ und

einerseits	andererseits
$xy : yb' = cd' : cb'$	$xz : dz = cb : cd$
$cz : (cb' - cy) = cd' : cb'$	$cy : (cd - cz) = cb : cd$
$cz : \left(\frac{l''}{m''}\beta - cy\right) = \frac{l''}{n''}\delta : \frac{l''}{m''}\beta$	$cy : \left(\frac{l'}{n'}\delta - cz\right) = \frac{l'}{m'}\beta : \frac{l'}{n'}\delta$
$n''.\beta.cz + m''.\delta.cy = l''\beta\delta$	$n'.\beta.cz + m'.\delta.cy = l'\beta\delta$

1 Ein Zeichen $(l\alpha, m\beta, n\delta)$ ist *nicht gerengesetzlich*, wenn die Maſszähler l, m, n nicht rational sind.

Daraus

$$cz = \frac{-m''\delta . l'\beta\delta + m'\delta . l''\beta\delta}{n''\beta . m'\delta - n'\beta . m''\delta} = \left(\frac{l''m' - l'm''}{m'n'' - m''n'}\right)\delta$$

$$cy = \frac{-n'\beta . l''\beta\delta + n''\beta . l'\beta\delta}{m'\delta . n''\beta - m''\delta . n'\beta} = \left(\frac{l'n'' - l''n'}{m'n'' - m''n'}\right)\beta.$$

Daher ist $(-ca) : cy : cz$

$$= (-\alpha) : \left(\frac{l'n'' - l''n'}{m'n'' - m''n'}\right)\beta : \left(\frac{l''m' - l'm''}{m'n'' - m''n'}\right)\delta.$$

Es sind daher die beiden der Kante parallelen Strahlen bestimmt durch:

$$(-ca) : cy : cz = (m'n'' - m''n')\alpha : (n'l'' - n''l')\beta : (l'm'' - l''m')\delta$$
$$ca : (-cy) : (-cz) = (m''n' - m'n'')\alpha : (n''l' - n'l'')\beta : (l''m' - l'm'')\delta.$$

Die Kanten von Gestalten, deren Flächen zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, liegen demnach parallel mit Strahlen, die zu dem bestimmten gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, von welchem die Lage der Flächen des Flächenvereins abhängt. Wenn ein gerengesetzlicher Strahlenverein in der Ebene gegeben ist, so läſst sich zu jedem der Strahlen desselben ein senkrechter Strahl in derselben Ebene bilden. Die Gesammtheit dieser Strahlen bildet unter sich gleichfalls einen gerengesetzlichen Strahlenverein.

Ist nämlich cb ein Strahl des gegebenen Strahlenvereins Fig. 327.
$= x . b$ und cd ein zweiter $= y . d$, so liegt bd einem Strahle $[(-x . b), y . d]$ parallel. Wird $c\gamma$ senkrecht auf bd und $c\delta$ senkrecht auf cb und $c\beta$ senkrecht auf cd gezogen, dann z. B. durch δ die $\delta\gamma$ ‡ $c\beta$ und durch γ die $\gamma\beta$ ‡ $c\delta$ gelegt, so ist das Dreieck $c\delta d \sim c\beta b$, daher der Winkel $\delta c d = \beta c b = k$; auch ist das Dreieck $\delta i d \sim c i b \sim r i c$, daher der Winkel $i d \delta = i b c = i c r = q$, und weil das Dreieck $c r n \sim c r d$, so ist auch der Winkel $n c r = c d r = u$. Nun ist

$$cd : cb = \text{Sin. } q : \text{Sin. } u$$
$$c\beta : c\delta = \text{Sin. } q : \text{Sin. } u$$

$$c\beta : c\delta = cd : cb = \frac{1}{cb} : \frac{1}{cd} = \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{b}\right) : \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{d}\right).$$

Wenn also im gegebenen gerengesetzlichen Strahlenvereine jeder Strahl von den beiden Bestimmungsstrahlen b und d so abhängt, daſs er durch ein gerengesetzliches Verhältniſs $(-xb) : yd$ seiner Lage nach bestimmt werden kann, so wird der auf ihm

senkrechte von den auf b und d senkrechten Strahlen, wenn deren Maſse $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{d}$ sind, abhängig durch das gerengesetzliche Verhältniſs $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{b} : \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{d}$.

Fig. 328. Es seyen ca, cb, cd irgend 3 von c ausgehende, nicht in einerlei Ebene liegende Strahlen, deren Richtung bekannt und deren Längenverhältniſs durch xa : yb : zd gegeben ist. Man lege durch je 2 derselben eine Ebene und mit jeder von diesen Ebenen parallel eine 2te durch das Ende des Strahles, der nicht in jener Ebene liegt, so entsteht ein Parallelepiped ag[1]. Eine Ebene, welche senkrecht ist zu einem jener 3 Strahlen, ist auch senkrecht zu den 3 übrigen Kanten des Körpers, welche diesem Strahle parallel liegen, und auch senkrecht zu den vier Ebenen, deren Durchschnitte jene Kanten sind. So ist z. B. die durch c gelegte Ebene ciou, wenn sie senkrecht auf ca ist, auch senkrecht auf df, gh und be und auf die Ebenen cf, ce, dh und bh und auf jede Ebene, welche sich mit einer von diesen in einer Kante schneidet, die parallel mit ca ist; daher ist sie auch senkrecht auf die Ebene dfeb. Linien, welche von c aus senkrecht gefällt werden auf eine der Ebenen, denen der Strahl ca parallel[2] liegt, müssen daher in der Ebene ciou liegen und senkrecht seyn auf die Durchschnittslinien dieser Ebene mit ihnen. Die Durchschnittslinie von dh mit co ist aber uo, die von bh mit co ist ci und die von fb mit co ist ui. Es sey cδ senkrecht auf uo, so ist sie auch die einzige von c aus mög-

1 Zu ihm gehören die Flächen ah = (xa, ∞b, ∞d) und bh = (∞a, yb, ∞d) und dh = (∞a, ∞b, zd), weil jede derselben zweien der Strahlen a, b, d, welche als zu einem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehörig betrachtet werden können oder einerlei gerengesetzlichem Flächenvereine angehören, parallel liegt. Zu demselben Flächenvereine gehören auch Flächen, die als Schnittebenen durch je vier Ecken betrachtet werden können, wie febd = (∞a, yb, zd), daeg = (xa, ∞b, zd) und fabg = (xa, yb, ∞d) und ferner die Schnittfläche durch die drei Ecken a, b, d = (xa, yb, zd).

2 Ebenen, denen ein Strahl x parallel liegt, nennt man Säulenflächen der Axe x, weil sie die Bedeutung von Säulenflächen erhalten, wenn x die Bedeutung der Axe (d. h. der Hauptaxe) erhält. Die Gesammtheit der Säulenflächen von x bildet die *Säule* von x oder Zone von x (*zona*).

liche auf die Ebene d h senkrechte Linie; ihre Richtung bestimmt daher die Richtung der Ebene d h und umgekehrt. Man kann sie den *Träger* oder *die Normale der Ebene* d h nennen. Eben so ist dann cβ der Träger von b h und cγ der Träger von b f. Vergleicht man die Träger einer Gesammtheit von Flächen, die zu einem gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, mit einander und mit dem gerengesetzlichen Strahlenvereine, welchen die den Kanten des Flächenvereins parallelen Strahlen (*die kantenthümlichen Strahlen*) bilden, so findet man folgende Sätze:

1) Die Träger derjenigen unter diesen Flächen, welche Säulenflächen eines und desselben kantenthümlichen Strahles sind (einer und derselben Säule oder Zone angehören), bilden einen ebenen gerengesetzlichen Strahlenverein. Es seyen z. B. gegeben die Flächen f g = (∞ a, ∞ b, z d) und b h = (∞ a, y b, ∞ d) und f b = (∞ a, y b, z d) als Säulenflächen des Strahles a und die auf ihnen senkrechte Ebene durch c sey c i o u und cβ, cδ, cγ seyen die Träger. Es läſst sich nun cγ in Beziehung auf cβ und cδ ausdrücken durch [$\psi\beta$, $\varrho\delta$], so daſs $\psi\beta : \varrho\delta = \frac{1}{ci} : \frac{1}{cu}$ ist. Man hat aber ci = cb . Sin. cbi = y b . Sin. a c b, oder wenn man den Winkel a c b = D (und ebenso den Winkel a c d = B und den Winkel b c d = A) setzt, ci = y b . Sin. D. Eben so ist c u = z d . Sin. B, daher

$$\psi\beta : \varrho\delta = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{b\ \text{Sin. D}}\right) : \frac{1}{z}\left(\frac{1}{d\ \text{Sin. B}}\right),$$

so daſs, wenn die Winkel B, D und die Maſse b, d in den Strahlen c b und c d unveränderlich sind und nur die Maſszähler y und z als veränderlich gelten, wenn c b : c d = y' b : z' d wird, auch $\psi'\beta : \varrho\delta = \frac{1}{y'}\left(\frac{1}{b\ \text{Sin. D}}\right) : \frac{1}{z'}\left(\frac{1}{d\ \text{Sin. B}}\right)$ oder $\psi' : \varrho' = \frac{1}{y'} : \frac{1}{z'}$, folglich für die Richtung cβ und cδ unveränderliche Maſse βwδ, nämlich $\frac{1}{b\ \text{Sin. D}}$ und $\frac{1}{d\ \text{Sin. B}}$ vorhanden sind, während das Verhältniſs der Maſszähler von β und δ das umgekehrte ist von dem der Maſszähler von b und d.

2) Die Träger sämmtlicher Flächen eines gerengesetzlichen Flächenvereins bilden einen gerengesetzlichen Strahlenverein im *Raume*.

Fig. 328. Ist z. B. a d b eine Fläche = (x a, y b, z d), so weiſs man, daſs sie eine Säulenfläche des parallel mit d b oder f e liegenden kantenthümlichen Strahles sey, daſs also ihr Träger in einerlei Ebene fallen müsse mit denen aller übrigen Säulenflächen dieses kantenthümlichen Strahles, folglich in einerlei Ebene mit $c\alpha$, dem Träger von a f h e, und $c\gamma$, dem Träger von f e b d. Aus denselben Gründen muſs ihr Träger aber auch in einerlei Ebene fallen mit dem von a e g d und b e h g und wieder mit dem von a b g f und f h g d. Diese drei Ebenen, in denen er demnach liegt, müssen daher eine Linie gemeinschaftlich haben und er muſs in dieser Linie liegen.

Fig. 329. Es sey dargestellt die Richtung des Trägers 1) von a b d durch $c\gamma'''$; 2) von a h durch $c\alpha'$; 3) von b h durch $c\beta'$; 4) von d h durch $c\delta'$. Legt man durch $c\alpha'$, $c\beta'$ und durch $c\beta'$, $c\delta'$ und durch $c\delta'$, $c\alpha'$ Ebenen und durch einen in $c\gamma'''$ beliebig angenommenen Punct γ''' die Ebenen $\gamma'\gamma''$ ∦ $\delta'\beta'$ und $\gamma\gamma'$ ∦ $\alpha'\beta'$ und $\gamma\gamma''$ ∦ $\alpha'\delta'$ und zieht die Strahlen $c\gamma$, $c\gamma'$, $c\gamma''$, so müssen sie die Richtungen der Träger von f e b d, a e g d und a f g b seyn. Man hat nun

$$c\gamma''' = [c\alpha', c\gamma] = [c\beta', c\gamma'] = [c\delta', c\gamma''];$$

ferner ist:

$$\text{für } c\gamma = [c\beta', c\delta'] \text{ auch } c\beta' : c\delta' = \frac{1}{\text{yb Sin. D}} : \frac{1}{\text{zd Sin. B}}$$

und ebenso

$$\text{für } c\gamma' = [c\alpha', c\delta'] \text{ auch } c\alpha' : c\delta' = \frac{1}{\text{xa Sin. D}} : \frac{1}{\text{zd Sin. B}}$$

$$\text{für } c\gamma'' = [c\alpha', c\beta'] \text{ auch } c\alpha' : c\delta' = \frac{1}{\text{xa Sin. B}} : \frac{1}{\text{yb Sin. A}},$$

folglich für $c\gamma''' = [c\alpha', c\beta', c\gamma']$ auch $c\alpha' : c\beta' : c\gamma' =$

$$\frac{1}{\text{xa Sin. B . yb Sin. D}} : \frac{1}{\text{yb Sin. A . yb Sin. D}} : \frac{1}{\text{yb Sin. A . zd Sin. B}}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\text{a Sin. B . Sin. D}}\right) : \frac{1}{y}\left(\frac{1}{\text{b Sin. D . Sin A}}\right) : \frac{1}{z}\left(\frac{1}{\text{d Sin. A . Sin. B}}\right).$$

Es verhalten sich daher die Maſse $\alpha : \beta : \delta$ in den Trägern der drei Flächen a f h e, b e h g und f h g d wie

$$\frac{1}{\text{a Sin. B . Sin. D}} : \frac{1}{\text{b Sin. D . Sin. A}} : \frac{1}{\text{d Sin. A . Sin. B}}$$

und die Maſszahlen $\xi : \psi : \varrho$ in diesen Trägern wie $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$,

wenn a, b, d die Maſse in drei kantenthümlichen Strahlen und A, B, D die diesen Strahlen gegenüberliegenden Winkel bedeuten (so daſs A der Winkel von b und d u. s. w. ist) und x, y und z die Maſszähler in diesen kantenthümlichen Strahlen sind.

Jede Fläche (xa, yb, zd) fordert daher ihren Träger $\left[\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right]$ und umgekehrt. Daſs nun ebenso wieder jeder kantenthümliche Strahl [xa, yb, zd] eine Fläche $\left[\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right]$ eines von α, β, δ abhängigen neuen gerengesetzlichen Flächenvereins fordere, für die er Träger ist, ergiebt sich unmittelbar. Man hat daher diese Flächen, deren jeder zwei oder mehrere Träger parallel liegen, als *Trägerflächen* von den *Begrenzungsflächen* zu unterscheiden, deren jeder zwei oder mehrere kantenthümliche Strahlen parallel liegen. Daſs die Winkel, welche je zwei Träger mit einander bilden, den Neigungswinkel der beiden von ihnen getragenen Flächen zu 180° ergänzen, ist unmittelbar einleuchtend.

Aus dem eben Entwickelten leuchtet ein, daſs man aus dem Zeichen $\left[\frac{1}{x}\alpha, \frac{1}{y}\beta, \frac{1}{z}\delta\right]$ des Trägers einer Fläche sehr leicht das Zeichen (xa, yb, zd) der Fläche selbst entwickeln könne, ja daſs man auf gewisse Weise das erstere als Stellvertreter des letzteren anzusehen im Stande sey, sofern man den Träger, welcher die Fläche bedingt, nur zu bestimmen nöthig hat, damit auch die von ihm getragene Fläche bestimmt sey. Es ist daher zu zeigen, wie durch ein höchst einfaches geometrisches Bild die Zeichen vieler Träger sich aus einander ableiten und versinnlichen lassen.

Die Richtung jedes Trägers wird, wie die jeder geraden Linie, durch zwei darin liegende Puncte bestimmt. Ein Punct des Trägers ist sein Anfangspunct, der Mittelpunct des Strahlensystems, dessen Ort bekannt ist. Es kommt also noch auf einen 2ten Punct an. Auf den ersten Blick möchte es angemessen scheinen, um den Mittelpunct herum eine Kugelfläche zu beschreiben und den Punct auf derselben, welcher von jedem Trägerstrahl getroffen wird, als den zweiten bezeichnenden Punct desselben zu betrachten. Man sieht aber sogleich ein, daſs hierdurch zwar die Richtungsverschiedenheiten, nicht aber auch die gerengesetzlichen Längenmaſsverschiedenheiten ver-

Fig. 330. sinnlicht würden. Sind nun cA, cB, cD die Richtungen dreier ursprünglichen (d. h. ursprünglich gegebenen) unter beliebigen gegebenen Winkeln ausstrahlenden Träger α, β, δ und cA $= 1\alpha$ und cp $= 1\beta$ und cq $= 1\delta$ die einfachen Längenmaſse in diesen Trägern, so ist einleuchtend, daſs das natürliche Ende des abgeleiteten Trägers $[\alpha, \beta, o\delta]$ in g, das von $[\alpha, o\beta, \delta]$ in h, das von $[\alpha, \beta, \delta]$ in m, das von $[\alpha, 2\beta, \delta]$ in n u. s. w., überhaupt also das von $[\alpha, y\beta, z\delta]$ in einem Puncte der Trägerfläche A g h m (und deren Verlängerung), welche parallel der Ebene der beiden Strahlen B und D ist, liegt, und zwar in dieser bestimmt wird durch die Gröſse der beiden Maſse $y\beta$ in der Richtung von A aus parallel cB zu nehmen und $z\delta$ in der Richtung parallel dem Strahle cD. So z. B. ist das Ende des Strahles $[\alpha, 2\beta, 2\delta]$ in l so, daſs Af (= il) $= 2\beta$ und fl (= Ai) $= 2\delta$ und Af ∦ CB und fl ∦ CD ist. Für $[\alpha, \beta, 2\delta]$ liegt der Endpunct in k, so daſs ag $= \beta$ und gk $= 2\delta$ u. s. w. Man hat daher nur nöthig, diese Querträgerfläche darzustellen mit den in ihr liegenden Endpuncten der Träger, so kann man rückwärts aus dem Stande jedes Endpunctes in ihr wieder ganz einfach das Zeichen des Trägers, dem er angehört, ablesen.

Ist für irgend einen Träger der Maſszähler von α in dem allgemeinen Zeichen $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ desselben nicht gleich der Einheit, so ist doch der in der Richtung dieses Trägers liegende Strahl $[\alpha, \frac{y}{x}\beta, \frac{z}{x}\delta]$ ein solcher, von welchem $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ ein rationales Vielfaches (ein xfaches) ist, der also als ein kleineres gerengesetzliches Maſs in der fraglichen Richtung betrachtet werden kann, von dem alle übrigen gerengesetzlichen Maſse in dieser Richtung rationale Vielfache nach ganzen oder gebrochenen Zahlen seyn müssen. Man kann daher auch das in der durch das Ende von 1α gelegten Querträgerfläche liegende Ende als Ende eines gerengesetzlichen Maſses für die Richtung $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ ansehen und dieses durch $\frac{y}{x}\beta$ und $\frac{z}{x}\delta$ in der berührten Querträgerfläche bestimmen. So also ist z. B. der Endpunct des Maſses in der Richtung des Strahles $[2\alpha, 3\beta, 2\delta]$ in der Ebene Afli gefunden, wenn man in Af von A aus $\frac{3}{2}\beta$ nach f zu und dann parallel Ai oder cD noch um 1δ fortgeht. Man kann nun die Trägerfläche, in welcher die Enden der Trä-

ger betrachtet werden, die *Zeigerfläche (planum indicis)* nennen, sofern sie den Stand der einzelnen Träger anzeigt.

Wenn man die einfachen Maſse in den beiden Strahlen A f Fig. 330.
und A i der Zeigerfläche gleichfalls mit β und δ bezeichnet und von A aus ein in dieser Ebene liegendes gerengesetzliches Strahlensystem sich vorstellt, von welchem jeder Strahl nach Richtung und Länge durch $[y\beta, z\delta]$ bestimmt ist, so kann man demnach sagen, das Ende des Trägers $[\alpha, y\beta, z\delta]$ liege in dem Strahle $[y\beta, z\delta]$ der Zeigerfläche und zwar in dessen gerengesetzlichem Ende. Für einen Träger $[\alpha, ny\beta, nz\delta]$ fällt daher ebenso das Ende zusammen mit dem des Strahles der Zeigerfläche, welcher durch $[ny\beta, nz\delta]$ bestimmt ist. Dieser ist an Richtung gleich dem Strahle $[y\beta, z\delta]$, aber an Länge nmal so groſs; daher ist sein Zeichen $= n\,[y\beta, z\delta]$.

Träger, welche parallel der Zeigerfläche liegen, für welche also der Maſszähler in α zu Null geworden ist, deren Zeichen also $= [o\alpha, y\beta, z\delta]$ ist, schneiden sich mit dem Strahle $[y\beta, z\delta]$ der Zeigerfläche in unendlicher Entfernung (d. h. sie liegen ihm parallel), daher das Ende von $[o\alpha, y\beta, z\delta]$ in $\infty[y\beta, z\delta]$.

Träger, welche die Zeigerfläche erst schneiden, wenn sie nach rückwärts über den Mittelpunct hinaus verlängert werden, haben ihr eigentliches Ende in einer zweiten Zeigerfläche, die der ersten parallel ist und durch das Ende des Trägers -1α gelegt gedacht werden kann. Ihr uneigentliches läſst sich auf der ersten (oberen) Zeigerfläche darstellen. Man hat daher nur eine Zeigerfläche nöthig.

Da die Träger der Flächen einer und derselben Säule oder Zone in einer und derselben Ebene liegen, so müssen ihre Enden alle in einer und derselben geraden Linie, in der Zeigerfläche, liegen und zwar in der Durchschnittslinie jener Ebene (Zonenebene) mit der Zeigerfläche.

Wenn die Durchschnittslinie der Zonenebene der Säule einer kantenthümlichen Axe x mit der Zeigerfläche durch die Benennung *Zeigerlinie* oder *Zeiger* der Säule x *(index zonae* x) belegt wird, so kann man sagen, das Ende eines Trägers, der in zwei bekannten Zonenebenen liegt, sey der Durchschnittspunct der Zeigerlinie beider Zonen. Es giebt hierdurch die Zeigerfläche ein brauchbares Hülfsmittel ab, um das Zeichen eines Trägers $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ zu finden, wenn zwei Zonenebenen

gegeben sind, in denen er liegt, d. h. wenn zwei Träger, die in der einen Zonenebene liegen, und zwei solche, die in der 2ten liegen, gegeben sind.

Es sey z. B. gegeben eine Gestalt, begrenzt durch eine Gesammtheit von Flächen, von denen je zwei einander parallel liegende (ein Paar ausmachende) durch gleichnamige Buchstaben bezeichnet sind, jedoch die hintere dem Beobachter nicht zugekehrte durch den Accent (′) unterschieden wird, wie z. B. a und a′.

Von den an dieser Gestalt vorhandenen Zonen seyen gegeben: 1) die Zone (gebildet von den Flächen) BqmAns, 2) DrlAoh, 3) fkAb, 4) aiAg, 5) fquivh, 6) ftmow, 7) fplnx, 8) frzgys, 9) aqtkpr, 10) aumlz, 11) avony, 12) ahwlxs. Auch sey der Träger A der Fläche A und der Träger B der Fläche B und der Träger D der Fläche D nach seiner Richtung im Raume gegeben (z. B. durch das Gegebenseyn der 3 Winkel ACB, BCD, DCA und durch das Gegebenseyn der Stellung der Zelle A, B, D in Beziehung zu dem Beobachter); man soll diese als die 3 ursprünglichen Träger betrachten und in Beziehung auf deren Zelle A, B, D die übrigen Träger bezeichnen, wenn die Richtung von einem Träger k gegeben ist, der so liegt, dafs er in die Zelle A, B, D selbst, nicht aber in eine der Ebenen AB, BD oder DA fällt und dessen Zeichen $= [1\alpha, 1\beta, 1\delta]$ gesetzt werden soll. Seine Länge ist gegeben. Man legt durch das Ende von k eine Ebene parallel BD, eine zweite parallel der Ebene AB, eine dritte parallel der Ebene AD, so werden in den Trägern A, B, D Stücke abgeschnitten, deren Längen gleich den Mafsen α, β, δ sind.

Um nun die Zeigerfläche darzustellen, bilde man einen Fig. 331. Winkel BAD gleich dem Winkel, welchen die beiden Träger B und D mit einander bilden sollen, mache $Am = \beta$ und $Al = \delta$ und beschreibe das Parallelogramm Amkl. Es sey nun die Ebene Amkl die Ebene der Zeigerfläche; das Ende des Trägers A sey in A, das des Trägers B in der Richtung Am und zwar in $\infty\beta$, das des Trägers D in AD in $\infty\delta$, so ist auch das des Trägers k in dem Puncte k. Der Träger f liegt in einerlei Zonenebene mit B und D, schneidet daher die Zeigerfläche in unendlicher Entfernung von ihrem Anfangspuncte A. Er liegt aber auch in der Zonenebene Ak (d. h. die bestimmt wird dadurch, dafs die 2 bereits bestimmten Träger A und k in ihr liegen),

daher mufs sein Ende in der Zeigerlinie A k und zwar in ∞ A k $= \infty\,(\beta,\ \delta)$ liegen. Die Fläche l liegt in der Zone A D und in der Zone k B. Für die erste ist die Zeigerlinie die Linie A D in der Zeigerfläche, für die zweite mufs durch das Ende k des Trägers k nach dem in der Entfernung $\infty\beta$ in A B liegenden Ende des Trägers B eine Zeigerlinie $k\pi$ gezogen werden, welche, wie von selbst einleuchtet, mit A B parallel seyn mufs, weil sie die Linie A B in unendlicher Entfernung von A schneiden soll.

Man erhält so nach und nach folgende Entwickelung:

die Fläche	ist bestimmt dadurch, dafs sie liegt in den bekannten zwei Zonen		daher das Ende ihres Trägers in der Zeigerfläche bestimmt durch	folglich die Mafszähler in Zeichen des Trägers $[k\alpha,\ y\beta,\ z\delta]$
A	. .	. .		1 0 0
B	. .	. .		0 1 1
D	. .	. .		0 0 1
k	. .	. .		1 1 1
l	AD	kB	$[0Am, 1Al] = [0\beta, 1\delta]$	1 0 1
m	AB	kD	$[1Am, 0Al] = [1\beta, 0\delta]$	1 1 0
f	BD	Ak	$\infty\, Ak = \infty\, [1\beta, 1\delta]$	0 1 1
a	ml	BD	$\infty\, [1\beta, 1\delta']$	0 1 1′[1]
g	Aa	kl	$1\beta',\ 1\delta$	1 1′ 1
b	gD	Ak	$1\beta',\ 1\delta'$	1 1′ 1′
i	bB	kD	$1\beta,\ 1\delta'$	1 1 1′
o	bi	AD	$0\beta,\ 1\delta'$	1 0 1′
n	bg	AB	$1\beta',\ 0\delta$	1 1′ 0
q	ka	AB	$2\beta,\ 0\delta$	1 2 0
r	ka	AD	$0\beta,\ 2\delta$	1 0 2
s	ba	AB	$2\beta',\ 0\delta$	1 2′ 0
h	ba	AD	$0\beta,\ 2\delta'$	1 0 2′
t	mf	ka	$\frac{3}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta$	2 3 1
y	na	gf	$\frac{3}{2}\beta',\ \frac{1}{2}\delta$	2 3′ 1
x	nf	ba	$\frac{3}{2}\beta',\ \frac{1}{2}\delta'$	2 3′ 1′
u	if	ma	$\frac{3}{2}\beta,\ \frac{1}{2}\delta'$	2 3 1′
p	ka	lf	$\frac{1}{2}\beta,\ \frac{3}{2}\delta$	2 1 3
z	gf	la	$\frac{1}{2}\beta',\ \frac{3}{2}\delta$	2 1′ 3
w	ba	of	$\frac{1}{2}\beta',\ \frac{3}{2}\delta'$	2 1′ 3′
v	if	oa	$\frac{1}{2}\beta,\ \frac{3}{2}\delta'$	2 1 3′

1 Liest man hier das Zeichen des Accentes für ein Minuszeichen und drückt also den Träger a aus durch $[0\alpha,\ 1\beta,\ (-1\delta)]$, so

Man wird aus diesem Beispiele sehen, wie leicht es ist, die Zeichen der Trägerenden in der Zeigerfläche abzulesen.

Sollte ein Trägerende ϱ so liegen, daſs man sein Zeichen nicht sogleich abzulesen vermöchte, so hat man nur nöthig, durch die Zeigerfläche einige Parallellinien zu legen mit einer der beiden Zeigerlinien, deren Durchschnittspunct das fragliche Trägerende ist, und zwar so, daſs diese parallelen Linien gleich weit von einander abstehen und durch Puncte gezogen sind, die mit dem fraglichen Puncte ϱ hinsichtlich auf die Lage in einem der auf der Zeigerfläche bereits vorhandenen kleinen Parallelogramme so übereinstimmten, daſs, wenn ein solches Parallelogramm parallel mit seiner ersten Stellung bleibend fortbewegt würde, bis es mit dem Parallelogramme zusammenfiele, in welchem ϱ liegt, auch der erwähnte Punct mit ϱ zusammenträfe, damit hierdurch ein bekanntes gerengesetzliches Längenmaſs in der andern Zeigerlinie in mehrere gleiche Theile getheilt und die Entfernung des Punctes ϱ von einem solchen Theilpuncte oder sein Zusammenfallen damit leichter erkannt werden könne.

Fig. 332. Wenn z. B. der Punct ϱ der Durchschnittspunct wäre von der Zeigerlinie, welche durch n und k gelegt werden kann, mit der, welche durch z und t bestimmt ist, so reichen die vier mit tz parallelen punctirten Linien hin, um anschaulich zu machen, daſs $k\varrho = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} kn = \frac{1}{8} kn$ sey, daſs also auch $k\psi = \frac{1}{8} mk$, folglich $m\psi = \frac{7}{8} mk = \frac{7}{8}\delta$ sey, und wieder daſs $k\xi = \frac{1}{8} kg$, folglich $\xi g = \frac{7}{8} kg = \frac{7}{8} \times 2\beta = \frac{7}{4}\beta$, folglich $l\xi = (\frac{7}{4} - \frac{4}{4})\beta = \frac{3}{4}\beta$, daſs also das Zeichen für ϱ seyn müsse $[\frac{3}{4}\beta, \frac{7}{8}\delta]$, daſs diese punctirten Linien durch Puncte gehen müssen, die in einem der kleinen Parallelogramme A m k l u. s. w. so liegen, wie t in m q φ k, wenn in ihnen Puncte liegen sollen, die ihrer Lage in einem solchen Parallelogramme nach mit ϱ in dem seinigen übereinstimmen.

Allgemein ist folgende Auflösung einer solchen Aufgabe. Man zieht in der Zeigerfläche parallel mit jeder der beiden Zeigerlinien, deren Durchschnittspunct das fragliche Trägerende ist, eine Trägerlinie durch den Mittelpunct A der Zeigerfläche und liest in dieser neuen Linie das Zeichen des Trägerendes ab,

ist hierdurch sein Zeichen ausgedrückt durch die 1ste Zelle A, B, D, obgleich er nicht in ihr liegt, sondern in der Zelle A, B, D′. Aehnlich ist die Bedeutung des Accents in den übrigen Fällen.

welches in unendlicher Entfernung von A liegt, mithin hat man das Zeichen des Trägers, welches in der Ebene $\beta\delta$ liegt und in der Zonenebene, mit deren Zeigerebene er parallel liegt. Der so gefundene Träger, parallel der einen Zeigerlinie, heiſse $[o\alpha, n''\beta, p''\delta]$, der parallel der andern heiſse $[o\alpha, N''\beta, P''\delta]$. Der eine gegebene Träger, welcher mit dem gesuchten und $[o\alpha, n''\beta, p''\delta]$ in einerlei Zonenebene liegt, heiſse $[\alpha, n'\beta, p'\delta]$ und der ebenso zu $[o\alpha, N''\beta, P''\delta]$ und dem gesuchten gehörige heiſse $[\alpha, N'\beta, P'\delta]$, so ist, wenn x und y unbekannte Gröſsen bedeuten, der gesuchte Träger einmal gleich der Verbindung von $[\alpha, n'\beta, p'\delta]$ mit x $[o\alpha, n''\beta, p''\delta]$, also

$$= [\alpha, (n'+n''x)\beta, (p'+p''x)\delta],$$

das andere Mal gleich der Verbindung von $[\alpha, N'\beta, P'\delta]$ mit y $[o\alpha, N''\beta, P''\delta]$, also

$$= [\alpha, (N'+N''y)\beta, (P'+P''y)\delta],$$

so daſs also

$$1)\ n' + n''x = N' + N''y$$
$$2)\ p' + p''x = P' + P''y$$

$$3)\ n''x - N''y - (N' - n') = 0$$
$$4)\ p''x - P''y - (P' - p') = 0$$

$$x = \frac{N''(P'-p') - P''(N'-n')}{p''N'' - n''P''}$$

$$y = \frac{n''(P'-p') - p''(N'-n')}{p''N'' - n''P''}.$$

Wird dann der gefundene Werth von x in das erste für den gesuchten Träger aufgestellte Zeichen

$$[\alpha, (n'+n''x)\beta, (p'+p''x)\delta]$$

oder der von y in das andere Zeichen eingeführt, so ist das Zeichen des gesuchten Trägers und also auch das seines Endes durch bekannte Gröſsen ausgedrückt.

So kann man die Zone, deren Zeigerlinie nk ist, bestimmen durch den Träger n $= [1\alpha, (-1\beta), 0\delta]$ und durch den Träger $[0\alpha, 2\beta, 1\delta]$ und die Zone tz durch den Träger t $=$ $[1\alpha, \frac{4}{7}\beta, \frac{1}{2}\delta]$ und durch den Träger $[0\alpha, (-2\beta), 1\delta]$, so daſs $n' = -1$ und $p' = 0$ und $n'' = 2$ und $p'' = 1$, während $N' = \frac{4}{7}$ und $P' = \frac{1}{2}$ und $N'' = -2$ und $P'' = 1$ ist. Es wird daher $x = \frac{7}{8}$, folglich Fig. 332.

$$\varrho = \begin{bmatrix}[1\alpha, (-1\beta), 0\delta] \\ [0\alpha, \tfrac{7}{8} \times 2\beta, \tfrac{7}{8} \times 1\delta]\end{bmatrix}$$

$$\varrho = [1\alpha, (\tfrac{14}{8} - \tfrac{8}{8})\beta, \tfrac{7}{8}\delta]$$
$$= [1\alpha, \tfrac{3}{4}\beta, \tfrac{7}{8}\delta].$$

Was die beiden einander gerade entgegengesetzten Träger jeder Art anbetrifft, die in der Ebene $\beta\delta$ und zugleich in der Zonenebene von $[\alpha, x'\beta, y'\delta]$ und $[\alpha, x''\beta, y''\delta]$ liegen, deren unmittelbare Ablesung hier als möglich vorausgesetzt wird, so ist das Ende des einen in $\infty[(y''-y')\beta, (x''-x')\delta]$, das des andern in

$$\infty[(y'-y'')\beta, (x'-x'')\delta] = -\infty[(y''-y')\beta, (x''-x')\delta],$$

vom Mittelpuncte A der Zeigerfläche angenommen.

Bezeichnung der Zeigerlinien.

Jede Zeigerlinie ist entweder ein Strahl $[y\beta, z\delta]$ in der Zeigerfläche von deren Mittelpuncte A aus, oder sie liegt irgend einem solchen Strahle parallel, und dann geht sie entweder durch die Enden der in der Zeigerfläche liegenden Strahlen $+ny\beta$ und $-nz\delta$ oder durch jene der beiden Strahlen $-ny\beta$ und $+nz\delta$. Bezeichnet man die durch $+ny\beta$ und $-nz\delta$ gehende durch $\rceil\!\lfloor +ny\beta, -nz\delta \rceil\!\lfloor$, so wird die durch $-ny\beta$ und $+nz\delta$ gehende durch $\rceil\!\lfloor -ny\beta, +nz\delta \rceil\!\lfloor$ zu bezeichnen seyn. Den gemeinschaftlichen Factor n kann man absondern und hat dann im ersten Falle $\rceil\!\lfloor +y\beta, -z\delta \rceil\!\lfloor n$ und im zweiten $\rceil\!\lfloor -y\beta, +z\delta \rceil\!\lfloor n$. Für die mit dem Strahle $[y\beta, z\delta]$ zusammenfallende Zeigerlinie wird n = Null und ihr Zeichen $= \rceil\!\lfloor +y\beta, -z\delta \rceil\!\lfloor 0 = \rceil\!\lfloor -y\beta, +z\delta \rceil\!\lfloor 0$. Dafs die mit dem Strahle $[-y\beta, +z\delta]$ oder $[+y\beta, -z\delta]$ der Zeigerfläche parallele Zeigerlinie, wenn sie durch $+ny\beta$ und $+nz\delta$ geht, mit $\rceil\!\lfloor +ny\beta, +nz\delta \rceil\!\lfloor$ oder $\rceil\!\lfloor +y\beta, +z\delta \rceil\!\lfloor n$ und die durch $-ny\beta$ und $-nz\delta$ gehende mit $\rceil\!\lfloor -ny\beta, -nz\delta \rceil\!\lfloor$ oder $\rceil\!\lfloor -y\beta, -z\delta \rceil\!\lfloor n$ zu bezeichnen sey, ergiebt sich von selbst.

Die Zeigerlinie, welche durch die Enden der Träger $[\alpha, x'\beta, y'\delta]$ und $[\alpha, x''\beta, y''\delta]$ geht, ist

$$= \rceil\!\lfloor (x'-x'')\beta, (y''-y')\delta \rceil\!\lfloor \frac{x'y''-x''y'}{(x'-x'')(y''-y')}$$

und sie liegt parallel dem Träger $[0\alpha, (x'-x'')\beta, (y'-y'')\delta]$, was leicht einzusehen ist.

Maſse in den Zeigerlinien.

Für die Zeigerlinie $\rceil y\beta, z\delta \rceil_n$ ist die Länge des Strahles $[y\beta, - z\delta]$ das einfache gerengesetzliche Maſs und jede Entfernung zweier Trägerenden in ihr von einander muſs ein rationales Vielfaches von diesem Maſse seyn, wie dieses aus dem bisher Entwickelten ohne weiteren Beweis einleuchten wird. Parallele Zeigerlinien haben daher ein gemeinschaftliches solches Maſs.

Gesetz für die Neigung der in einerlei Zonenebene liegenden Träger.

Auf jede Zeigerlinie kann vom Mittelpuncte des *räumlichen* Strahlensystems aus eine Linie senkrecht gefällt werden, welche *Träger der Zeigerlinie* oder *Stütze* derselben heiſsen möge. Es seyen cm, cn, co, cp, cq, cr, ct einige in einerlei Zonenebene liegende Träger, mt sey die Zeigerlinie $\rceil y\beta, z\delta \rceil_\pi$ dieser Zone und cs die Stütze dieser Zeigerlinie. Jedes Stück der Zeigerlinie, welches zwischen zweien der Trägerenden m, n, o, p, q, r, t liegt, muſs ein rationales Vielfaches des Strahles $[y\beta, z\delta]$ seyn, dessen Gröſse Fig. 333.

$$= \sqrt{y^2\beta^2 + z^2\delta^2 - 2y\beta \,.\, z\delta \,.\, \text{Cos.}\, \delta \| \beta}$$

durch γ ausgedrückt werden möge. Es ist daher, wenn $mn = no = op = pq = qr = rt = \gamma$ ist,

$$\begin{aligned}
\text{Tang. } p \| s &= \quad sp : sc \\
\text{Tang. } q \| s &= (\gamma + sp) : sc \\
\text{Tang. } r \| s &= (2\gamma + sp) : sc \\
\text{Tang. } t \| s &= (3\gamma + sp) : sc \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\text{Tang. } o \| s &= -(\gamma - sp) : sc \\
\text{Tang. } n \| s &= -(2\gamma - sp) : sc \\
\text{Tang. } m \| s &= -(3\gamma - sp) : sc
\end{aligned}$$

d. h. in einer und derselben Zonenebene schreiten die Tangenten der Neigungen der Träger gegen die Stütze der Zeigerlinie fort nach einer arithmetischen Reihe, deren Differenz γ ist. Einschaltungen in diese Reihe können nur nach rationalen Bruchtheilen von γ statt finden.

Es sey $sc = \varrho$ und $sp = \sigma$, so wird für zwei verschiedene Träger in der Zone die Gröſse der Tangente der Neigung

derselben gegen die Stütze ausgedrückt werden können durch $(x\gamma + \sigma) : \varrho$ für den einen und durch $(y\gamma + \sigma) : \varrho$ für den anderen. Für die Differenz z beider Neigungen d. h. für die Neigung z der beiden fraglichen Träger gegen einander hat man daher

$$\text{Tang. } z = \frac{\frac{x\gamma + \sigma}{\varrho} - \frac{y\gamma + \sigma}{\varrho}}{1 + \frac{x\gamma + \sigma}{\varrho} \cdot \frac{y\gamma + \sigma}{\varrho}}$$

oder $$\text{Tang. } z = \frac{\varrho\,(x - y)\,\gamma}{\varrho^2 + (x\gamma + \sigma)(y\gamma + \sigma)}. \qquad (2$$

Gehört auch die Stütze mit den übrigen Trägern zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine, so muſs $\sigma : \gamma$ ein rationales Verhältniſs seyn und es kann dann $\sigma = f\gamma$ gesetzt werden, so daſs dann

$$\text{Tang. } z = \frac{\varrho\,(x - y)\,\gamma}{\varrho^2 + (x + f)\,(y + f)\,\gamma^2}$$

oder, wenn $x + f = \xi$ und $y + f = \psi$ gesetzt wird, auch

$$\text{Tang. } z = \frac{\varrho\,(\xi - \psi)\,\gamma}{\varrho^2 + \xi \cdot \psi \cdot \gamma^2}$$

gesetzt werden kann.

Umgekehrt kann aus der allgemeinen Gleichung 2 jede der Gröſsen ϱ, γ, σ, so wie auch jede der Gröſsen x und y leicht gefunden werden, indem diese Gleichung für ϱ oder γ oder σ eine solche des 2ten Grades, für x oder y aber eine des 1sten Grades ist. Es leuchtet aber ein, daſs die Bestimmung der rationalen Gröſsen x und y auf solche Weise im Allgemeinen nur als mehr oder weniger genügend zu betrachten sey, wenn Tang. z als eine vermittelst der gewöhnlichen Tafeln gefundene, von dem Werthe des Winkels z abhängige Gröſse in die Rechnung eingeführt werden muſs, weil Winkel, deren Tangenten einer gegebenen Gröſse gleich seyn sollen, nur in wenigen Fällen sich mit vollkommener Genauigkeit durch Grade, Minuten und Secunden angeben lassen. Dasselbe gilt, wenn aus der allgemeinen Gleichung (für die Neigung ϱ eines fraglichen Trägers gegen die Stütze ϱ der Zeigerlinie) Tang. $\varrho = \frac{x\gamma + \sigma}{\varrho}$ oder für den Fall, daſs $\sigma = 0$ ist, aus der Gleichung Tang. $\varrho = \frac{x\gamma}{\varrho}$ der rationale Werth von x gefunden werden soll.

Wären z. B. die Maſse α, β, δ in den drei ursprünglichen Trägern einander gleich und ihre Richtungen auf einander senkrecht, so würde für die Zeigerlinie AD der Träger α zugleich die Stütze ϱ seyn und man könnte hier $A1 = \gamma = \varrho = \alpha = 1$ setzen. Wüſste man nun, daſs in AD das Ende eines Trägers liege, welcher einer angestellten Messung zu Folge mit der Richtung α einen Winkel von $71\frac{1}{2}$ Graden bildet, so hätte man Fig. 331.

$$\text{Tang. } 71^\circ\,30' = \frac{x.1}{1} = x,$$

aber

$$\text{Tang. } 71^\circ\,34' = 3{,}0002820,$$

so daſs, wenn man hier $x=3$ setzen will, der gemessene Winkel um ungefähr 4 Minuten corrigirt werden muſs. Ob dieses angehe, hängt natürlich von dem Grade der Genauigkeit der Messung des Winkels ϱ ab und das Zeichen des fraglichen Trägers $[1\alpha,\ 0\beta,\ 3\delta]$, welches auf diese Weise gefunden wird, ist nicht als ein in aller geometrischen Schärfe richtiges zu betrachten.

Noch weniger Anspruch auf vollkommene Richtigkeit hat das Zeichen eines Trägers, wenn dasselbe bestimmt worden ist durch das Gegebenseyn der Neigung des gesuchten Trägers gegen zwei bekannte Träger, mit denen er nicht in eine und dieselbe Zonenebene fällt, und man weiſs, zu welcher der beiden Flächenseiten der Zonenebene, in welcher jene beiden liegen, er als aufstehende Linie sich verhält. Man setzt hier nämlich diesen Strahl als einen mittleren zwischen den beiden und einem dritten, gleichfalls bereits bestimmten, entwickelt die Werthe, welche diesen drei Strahlen zustehen, sofern der gesuchte zwischen ihnen der mittlere ist, wie dieses am Schlusse der Lehre von der Bezeichnung der Strahlen gezeigt worden ist, und erhält, wenn man die dort gebrauchte Bezeichnungsweise beibehält, die Gleichung $c\alpha' : c\beta' : c\delta' =$ Fig. 331.

$$\text{Sin.}\,\mathfrak{A}\ \text{Sin.p Sin.t} : \text{Sin.}\,\mathfrak{B}\ \text{Sin.p Sin.T} : \text{Sin.}\,\mathfrak{D}\ \text{Sin.t Sin.P},$$

so daſs hier $c\alpha' : c\beta' : c\delta' = x\alpha : y\beta : z\delta$ gesetzt werden kann und $x : y : z =$

$$\frac{1}{\alpha}\text{Sin.}\,\mathfrak{A}\ \text{Sin.p Sin.t} : \frac{1}{\beta}\text{Sin.}\,\mathfrak{B}\ \text{Sin.p Sin.T} : \frac{1}{\delta}\text{Sin.}\,\mathfrak{D}\ \text{Sin.t Sin.P}$$

gefunden wird. Sind hierbei α, β, δ die drei der Bezeichnung zum Grunde liegenden Strahlen, so ist die fragliche Aufgabe gelöst; sind sie nicht mehr diese ursprünglichen Strahlen, so

mufs das Zeichen des so bestimmten Strahles erst auf die bereits angegebene Weise übersetzt werden in dasjenige, bei welchem diese ursprünglich gegebenen Strahlen der Bezeichnung zum Grunde liegen.

Bedingungen für den Fall, wenn Träger und kantenthümliche Strahlen eines gerengesetzlichen Flächenvereins zu einerlei gerengesetzlichem Strahlenvereine gehören.

Es fragt sich nun, unter welchen Bedingungen gehören die beiden auf solche Weise von einander abhängigen gerengesetzlichen Strahlenvereine, nämlich der der Träger und der der kantenthümlichen Strahlen, zu einem und demselben gröfseren gerengesetzlichen Strahlenvereine?

Die nächste Antwort ist: wenn 3 nicht in einerlei Ebene liegende Träger in Beziehung auf Länge und Richtung in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehen von drei nicht in einerlei Ebene liegenden kantenthümlichen Strahlen. Ist dieses der Fall, so müssen sie, was zuerst ihre Richtung angeht, in gerengesetzlicher Abhängigkeit stehen von je drei beliebig zu wählenden nicht in einerlei Ebene liegenden kantenthümlichen Strahlen, folglich auch von jenen dreien, deren jeder auf zweien von ihnen senkrecht steht. Bezeichnet man die drei nicht in einerlei Ebene liegenden Träger, deren Richtung gegeben ist, durch α, β, δ und den auf β und δ senkrechten kantenthümlichen Strahl durch a, den auf α und δ senkrechten durch b und den auf α und β senkrechten durch d, so ist einleuchtend, dafs, da alle diese 6 Strahlen ihrer Richtung nach sowohl zu dem gerengesetzlichen Vereine der kantenthümlichen Strahlen, als auch zu dem der Träger gehören müssen, auch jeder Strahl, welcher senkrecht ist auf eine der Ebenen von α und a, α und b, α und d, β und a, β und b, β und d, δ und a, δ und b oder δ und d, gleichfalls seiner Richtung nach zu dem gemeinschaftlichen gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören müsse. Da nun z. B. a senkrecht ist auf β und δ, so werden, wenn man den auf a und β senkrechten Strahl mit 𝔡 bezeichnet, die Strahlen a, β, 𝔡 drei nicht in einerlei Ebene liegende auf einander senkrechte, dem gesamm-

ten gerengesetzlichen Strahlenvereine angehörige, Strahlenrichtungen seyn müssen, oder allgemeiner ausgedrückt, jeder beliebige kantenthümliche Strahl x wird mit dem auf ihm und einem beliebigen andern kantenthümlichen Strahle y senkrechten Träger ψ und dem auf ihm und ψ senkrechten Strahle $\mathfrak{z}$ in Beziehung auf Richtung zu dem gemeinsamen gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören.

Was zweitens die Länge betrifft, so folgt auf demselben Wege, dafs dann das Mafs, welches jedem der zur Vergleichung gezogenen Strahlen zusteht, sofern er Träger ist, mit dem Mafse, welches ihm zusteht, in sofern er kantenthümlicher Strahl ist, in rationalem Verhältnisse stehen müsse. Dieses mufs also auch der Fall seyn bei den drei gegen einander senkrechten Strahlen a, β und $\mathfrak{d}$.

Da nun im Allgemeinen die Mafse in den Trägern a, β, $\mathfrak{d}$, wenn diese nicht gegen einander senkrecht wären, von den Mafsen in den 3 kantenthümlichen Strahlen, deren erster auf β und $\mathfrak{d}$ senkrecht ist, während der zweite auf $\mathfrak{d}$ und a und der dritte auf a und β senkrecht ist, so abhängen würden, dafs, wenn diese durch $a_{,}$ und $b_{,}$ und $d_{,}$ bezeichnet werden und jene durch $a_{,,}$ und $b_{,,}$ und $d_{,,}$ und die Winkel von $a_{,}$ auf $b_{,}$ durch D, von $b_{,}$ auf $d_{,}$ durch A und von $d_{,}$ auf $a_{,}$ durch B,

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} =$$

$$\frac{1}{a_{,}\,\text{Sin. B Sin. D}} : \frac{1}{b_{,}\,\text{Sin. D Sin. A}} : \frac{1}{d_{,}\,\text{Sin. A Sin. B}},$$

so mufs hier, weil der Winkel $A = B = D = 90^\circ$ und $\text{Sin. } 90^\circ = 1$ ist,

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \frac{1}{a_{,}} : \frac{1}{b_{,}} : \frac{1}{d_{,}} \text{ seyn.}$$

Sollen nun die Mafse $a_{,,}$, $b_{,,}$, $d_{,,}$ rationale Vielfache von $a_{,}$, $b_{,}$, $d_{,}$ seyn, so kann man setzen:

$$x a_{,,} = a_{,} \text{ und } y b_{,,} = b_{,} \text{ und } z d_{,,} = d_{,}$$

oder

$$x \frac{1}{a_{,}} = a_{,} \text{ und } y \frac{1}{b_{,}} = b_{,} \text{ und } z \frac{1}{d_{,}} = d_{,},$$

also

$$a_{,}^2 : b_{,}^2 : d_{,}^2 = x : y : z,$$

d. h. die Quadrate der Mafse in den drei auf einander senkrechten Strahlen, sofern sie kantenthümliche sind, folglich auch

$\left(\text{da } \frac{1}{a_{,}^{2}} : \frac{1}{b_{,}^{2}} : \frac{1}{d_{,}^{2}} = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ sofern sie Träger sind, müssen durch rationale Zahlen sich ausdrücken lassen.

Wäre daher z. B. $a_{,} : b_{,} : d_{,} = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5}$, so würde $a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{3}} : \sqrt{\tfrac{1}{5}}$ seyn. Man hätte dann

$$2a_{,,} : 3b_{,,} : 5d_{,,} = \sqrt{4 \times \tfrac{1}{2}} : \sqrt{9 \times \tfrac{1}{3}} : \sqrt{25 \times \tfrac{1}{5}}$$
$$= \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{5} = a_{,} : b_{,} : d_{,}.$$

Wäre aber $a_{,} : b_{,} : d_{,} = \sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{7} : \sqrt[3]{6}$, so würde

$$a_{,,} : b_{,,} : d_{,,} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} : \frac{1}{\sqrt[3]{7}} : \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} : \sqrt[3]{\tfrac{1}{7}} : \sqrt[3]{\tfrac{1}{6}}$$ und $x : y : z = \sqrt[3]{4} : \sqrt[5]{49} : \sqrt[3]{36}$ seyn. Für $a_{,} = 1 + \sqrt{5}$ würde $x = a_{,}^{2} = (1 + \sqrt{5})^{2} = (6 + 2\sqrt{5})$, also irrational seyn u. s. w.

Anwendung der Lehre von der Zeigerfläche auf einen gerengesetzlichen Flächenverein, sofern dieser einem bestimmten bekannten Gestaltensysteme angehört [1].

Was die 1- und 1maſsigen Gestalten betrifft, so ist hier die Anwendung mit keinen Schwierigkeiten verbunden. Für die 1fach 1gliedrigen, als dem allgemeinsten Falle entsprechend, ist bereits durch ein Beispiel diese Lehre erläutert worden. Sind bei ihnen zwei der Bezeichnungsaxen auf einander senkrecht, so vereinfacht sich die Arbeit bei der Zeichnung der Zeigerfläche. Noch mehr ist dieses der Fall, wenn alle drei auf einander senkrecht sind. Eine gleiche Vereinfachung findet natürlich

1 Daſs die Möglichkeit, eine gegebene Strahlenmenge unter einen einzigen gerengesetzlichen Strahlenverein zusammenzufassen, nicht auch die Nothwendigkeit bedinge, es stets zu thun, ist unmittelbar einleuchtend. Bei Gestalten, welche in mehrere gleichwerthige Zellen oder Zellengruppen getheilt werden können, ist es vielmehr zweckmäſsig, den ganzen gerengesetzlichen Strahlenverein aus eben so vielen einzelnen kleineren dergleichen Vereinen bestehend zu denken, als gleichwerthige Zellen oder Zellengruppen vorhanden sind, weil man dann nur nöthig hat, den einen dieser kleineren Vereine besonders zu untersuchen, um dadurch zugleich die anderen, ihm gleichwerthigen, mittelbar kennen zu lernen.

statt bei den 1gliedrigen oder den 1fach 2gliedrigen Gestalten, bei denen eine Axe (die 2gliedrige) auf einer nothwendig als gerengesetzlich zu betrachtenden Ebene senkrecht ist. Ist z. B. Fig. 244
eine solche 1gliedrige oder 1fach 2gliedrige Gestalt, wie die A.B.
durch ein 1fach 2gliedriges Bild A und durch ein 2fach 1gliedriges Bild B versinnlichte, gegeben, so daſs Messung und Beobachtung des Zonenzusammenhangs möglich ist, und man soll diejenige Zeigerfläche bilden, welcher die Träger der Flächen r und M und l u. s. w. parallel liegen, so lehrt hier die Beschaffenheit der Gestalt, daſs die Träger von r und l auf einander senkrecht sind; man wird daher zwei auf einander senkrechte Zeigerlinien $l_1 l_2$ und $r_1 r_2$ ziehen. Messung giebt die Gröſse der Fig. 334.
Neigung der Träger M gegen die Träger r oder l; man zieht daher die Linien $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ so, daſs der Winkel $M_1 P_1 r_1$ = der gemessenen Neigung des Trägers M_1 gegen den Träger r_1 u. s. w. Nimmt man nun als die drei Bezeichnungsträger die Träger P, r und l an, so ist das Ende des Trägers P im Durchschnittspuncte P_1, das des Trägers t kann nunmehr in einem willkürlichen Puncte t_1 der Linie $r_1 r_2$, welcher zwischen P_1 und r_2 liegt, angenommen werden. Die Enden der Träger r, M und l liegen in den für sie dargestellten Zeigerlinien ($r_1 r_2$ und $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ und $l_1 l_2$) in unendlicher Entfernung von P_1. Die Beobachtung der parallelen Kanten der Gestalt ergiebt dann, daſs

der Träger	liegt zwischen den Trägern	und zwischen den Trägern
s_1	P_1 und l_1	t_1 und M_1
z_1	t_1 und l_1	s_1 und M_2
o_1	z_1 und r_1	s_1 und M_1

Setzt man daher das Maſs in $P_1 = \alpha$, das in $r_1 = \beta$ und das in

$\underset{1}{l} = \delta$ und nimmt die Linie $\underset{11}{Pt} = \beta' = -1\beta$, $\underset{11}{Ps} = 1\delta$ und bezeichnet man die Maſse in den kantenthümlichen Strahlen, welche die diesen dreien entsprechenden sind, durch a, b, d, so daſs a # der Kante r auf l und b # der Kante P auf l und d # der Kante P auf r, so ist:

für den Träger	das Ende in $\frac{y}{x}\beta,\ \frac{z}{x}\delta$	daher in seinem Zeichen $[x\alpha, y\beta, z\delta]$ die Maſszähler =			folglich in dem Zeichen $[\xi a, \psi b, \varrho d]$ der Fläche selbst die Maſszähler		
$\underset{1}{P}$	$[0\beta, 0\delta]$	1	0	0	1	∞	∞
$\underset{1}{r}$	$\infty[1\beta, 0\delta]$	0	1	0	∞	1	∞
$\underset{1}{l}$	$\infty[0\beta, 1\delta]$	0	0	1	∞	∞	1
$\underset{1}{M}$	$\infty[1\beta, 1\delta]$	0	1	1	∞	1	1
$\underset{1}{t}$	$[1\beta', 0\delta]$	1	1′	0	1	1′	∞
$\underset{1}{s}$	$[0\beta, 1\delta]$	1	0	1	1	∞	1
$\underset{1}{z}$	$[1\beta', 2\delta]$	1	1′	2	1	1′	½
$\underset{1}{o}$	$[1\beta, 2\delta]$	1	1	2	1	1	½

Daſs auch bei drei Bestimmungsaxen, die nicht alle drei auf einander senkrecht sind, für die in ihnen liegenden Bestimmungsstrahlen dieselben Permutationsgesetze gelten, hinsichtlich auf das positive und negative Verhalten jedes Strahles zu den Bestimmungszellen, denen er angehört, ergiebt sich von selbst. Es ist daher die Gesammtheit

der 2 Flächen P	bezeichnet durch	oder durch
	$(\pm 1a, \pm\infty b, \infty d)$	$\pm\frac{1}{\infty} \mid \pm 1$
— 2 — r	$(\pm\infty a, \pm 1b, \infty d)$	$\pm 1 \mid \pm\frac{1}{\infty}$
— 2 — l	$(\pm\infty a, \pm\infty b, 1d)$	$\pm\infty \mid \pm\infty$
— 4 — M	$(\pm\infty a, \pm 1b, 1d)$	$\pm\infty \mid \pm 1$
— 2 — t	$(\pm 1a, \mp 1b, \infty d)$	$\pm\frac{1}{\infty} \mid \mp\frac{1}{\infty}$
— 4 — s	$(\pm 1a, \pm\infty b, 1d)$	$\pm 1 \mid \pm\infty$
— 4 — z	$(\pm 1a, \mp 1b, \frac{1}{2}d)$	$\pm 2 \mid \mp 2$
— 4 — o	$(\pm 1a, \pm 1b, \frac{1}{2}d)$	$\pm 2 \mid \pm 2$

Will man die so gefundenen Zeichen für die Träger in dem eben abgehandelten Beispiele übersetzen in jene, welche man erhält, wenn man statt des Trägers von P jenen von t in der Bezeichnung mit zum Grunde legt und $= \alpha$ setzt, während $\underset{1}{M} = [1\beta, 1\delta]$ und $P = [1\alpha, 1\beta]$ ist, so dient dieselbe Zeigerfläche zur unmittelbaren Ablesung der Maſszähler von α, β und δ für jeden Träger. Diese sind dann

für $\underset{1}{t} = 1\ 0\ 0$	für $\underset{1}{P} = 1\ 1\ 0$
für $\underset{1}{r} = 0\ 1\ 0$	für $\underset{1}{s} = 1\ 1\ 1$
für $\underset{1}{l} = 0\ 0\ 1$	für $\underset{1}{z} = 1\ 0\ 2$
für $\underset{1}{M} = 0\ 1\ 1$	für $\underset{1}{o} = 1\ 2\ 2.$

Beachtet man, daſs P und t fast gleiche Neigung haben gegen eine kantenthümliche Axe, die den Flächen m und l parallel liegt, so erscheint es nicht unpassend, die beiden genannten Flächen so zu betrachten, daſs der Träger der einen P für irgend einen (statt $\underset{1}{P}$ oder $\underset{1}{t}$) $= \alpha$ gesetzten zwischen $\underset{1}{P}$ und $\underset{1}{t}$ liegenden Träger und für $\underset{1}{r} = \beta$ das Zeichen $[1\alpha, 1\beta]$ erhält, während $\underset{1}{t} = [1\alpha, 1\beta']$ gesetzt wird. Ist dabei $\underset{1}{l} = \delta$ und $\underset{1}{M} = [1\beta, 1\delta]$, so ist, wenn man die Linie $\underset{1}{P}\,\underset{1}{t}$ halbirt und durch den Halbirungspunct Linien parallel $\underset{1}{l}\,\underset{2}{l}$ und $\underset{1}{M}\,\underset{1}{M}$ und $\underset{2}{M}\,\underset{2}{M}$ zieht, auch hier die Ablesung der Maſszähler für alle Träger leicht zu bewerkstelligen. Sie sind nämlich

für $\underset{1}{r} = 0\ 1\ 0$	für $\underset{1}{t} = 1\ 1'\ 0$
für $\underset{1}{l} = 0\ 0\ 1$	für $\underset{1}{s} = 1\ 1\ 2$
für $\underset{1}{M} = 0\ 1\ 1$	für $\underset{1}{z} = 1\ 1'\ 4$
für $\underset{1}{P} = 1\ 1\ 0$	für $\underset{1}{o} = 1\ 3\ 4.$

Um für dieselbe Gestalt die 1fach 2gliedrige Zeigerfläche bilden zu können, müssen (durch Messung) bekannt seyn die

Fig. 335. Winkel der Träger $P_1 \| r_1$ und $t_1 \| r_1$. Diese Winkel werden als $P_1 l_1 r_1$ und $t_1 l_1 r_1$ aufgetragen, die Gröfse der Linie $l_1 M_1$ wird will-
Fig. 334. kürlich oder $= P_1 t_1$ der 2fach 1gliedrigen Zeigerfläche angenom-
335. men und als Mafseinheit in der Richtung r gebraucht, sofern $M_1 = [1 r_1, 1 l_1] = [1\beta, 1\delta]$ von vorhin bleiben soll. Die Enden der Träger l_1, M_1, P_1, t_1, r_1, von denen die drei letzten ∞ entfernt von l_1 liegen, ergeben sich dann von selbst. s_1 als zwischen M_1 und t_1 und zwischen l_1 und P_1 liegend ist wieder zuerst zu ermitteln; durch $s_1 M_2$ und $l_1 t_1$ bestimmt sich z_1 und durch $z_1 r_1$ und $M_1 s_1$ wird o_1 gefunden.

$$\text{Für } M_1 = [1l_1, 1r_1] \text{ wird } s_1 = [1l, 1P]$$
$$\text{und } t_1 = [1P_1, 1r'_1] \qquad z_1 = [1l, \tfrac{1}{2}r' \, \tfrac{1}{2}P]$$
$$= [1P_1, 1r_2] \qquad o_1 = [1l, \tfrac{1}{2}r, \tfrac{1}{2}P].$$

Es möge hier zugleich bemerklich gemacht werden, dafs die Zeigerflächen ein nicht unwichtiges Hülfsmittel bei der Zeichnung von Bildern gegebner ebenflächiger Gestalten namentlich dann abgeben, wenn die Ebene des Bildes eine der Zeigerfläche
Fig. 244. parallel zu denkende ist, wie dieses bei den Bildern der so eben
A.B. beispielsweise erwähnten Gestalt und bei den zwei für dieselbe
334. 335. dargestellten Zeigerflächen statt findet. Es ist nämlich dann das Bild einer Kante parallel mit einer senkrecht auf die Zeigerlinie, durch welche die Enden der Träger jener zwei Kantenflächen mit einander verbunden werden, gezogenen Linie, so dafs sich also die Richtungen der Bilder aller Kanten auf diese Weise aus der Zeigerfläche bestimmen lassen und nur der Ort, welchen das Bild der Kante einzunehmen hat, auf andere Weise bestimmt werden mufs.

Fig. 337. Um für die als Beispiel dienende 2fach 2gliedrige Gestalt die Zeigerfläche, welche senkrecht auf die Kante b | d ist, dar-
336. zustellen, kann man zwei auf einander senkrechte Linien b′b

und s s′, welche den Trägern der Flächen b und s parallel gedacht werden, unter dem Winkel $d_1 \alpha b$ (gleich der durch Messung oder Rechnung bekannten Neigung des Trägers von b und d), desgleichen die Linie $d_1 d_3$ und ihr analog die Linie $d_4 d_2$ ziehen, ferner in αb die αr_1 willkürlich annehmen und ihr gemäſs die αr_2 bestimmen. Werden dann die Puncte b, s, d in unendlicher Entfernung von α gedacht, so können die Puncte b, b′, d_1, d_2, d_3, d_4, s, s′, r_1, r_2 als bereits bestimmte Trägerenden der mit denselben Buchstaben bezeichneten Flächen, welche ebenso an der Gestalt vertheilt sind, wie die fraglichen Puncte in der Zeigerfläche, betrachtet werden. Es bestimmt sich dann n_1 als zwischen α und d_1 und zwischen r_1 und s liegend, weil 1) die Fläche d_1 an der Gestalt mit parallelen Kanten auftritt zwischen n_1 oben und n_3 unten, während 2) r_1 mit parallelen Kanten zwischen n_1 und n_4 liegt. Um das Trägerende von o_1 bestimmen zu können, ist Messung der Neigungen der Träger r_1 und o_1 gegen α (oder gegen b, woraus jene gegen α folgt) und Untersuchung des Verhältnisses Tg. $o_1 \| \alpha$: Tg. $r_1 \| \alpha$ nöthig.

Ist die Neigung der beiden oberen Flächen o gegen einander $= 128^\circ\, 31'$ und die der beiden oberen Flächen r gegen einander $= 92^\circ\, 4'$, so wird

$$\text{Tg.}\left(\frac{180^\circ - 128^\circ\,31'}{2}\right) : \text{Tg.}\left(\frac{180^\circ - 92^\circ\,4'}{2}\right)$$
$$= \text{Tg. } 25^\circ\,44' : \text{Tg. } 43^\circ\,58'$$
$$= 4819842 : 9651268 = 1 : 2{,}002\,..,$$

wofür 1 : 2 zu nehmen und deshalb in der Zeigerfläche $\alpha o_1 = \frac{1}{2} \alpha r_1$ zu machen ist. Dann ergiebt sich P_1 als zwischen o_1 und s und zwischen n_1 und n_2 liegend (n_2, durch n_1 zugleich mit bestimmt, ist als bereits bekannt zu betrachten).

Setzt man nun $P_1 = [1\alpha, 1\beta, 1\delta]$, so wird

	$\alpha\ \beta\ \delta$		a b d
der Träger b_1 =	0 1 0	also die Fläche desselben =	∞ 1 ∞
- - s_1 =	0 0 1		∞ ∞ 1
- - P_1 =	1 1 1		1 1 1
- - o_1 =	1 1 0		1 1 ∞
- - r_1 =	1 2 0		1 ½ ∞
- - d_1 =	0 2 1		∞ ½ 1

durch Ablesung aus der Zeigerfläche erkannt.

Wären die Flächen o nicht vorhanden gewesen, so hätte Messung oder Berechnung der Neigung der Flächen $n_1 \| n_2$ und wieder der Flächen $P_1 \| P_2$ ergeben, daſs für die Träger

$$Tg.\ \tfrac{1}{2} \left(P_1 \| P_2\right) = \tfrac{1}{2}\ Tg.\ \tfrac{1}{2} \left(n_1 \| n_2\right)$$

seyn müsse, und daraus hätte sich dann das Trägerende von P_1 in δn_1 und zwar $= \frac{1}{2} \delta n_1$ gefunden.

Für die 1- und 2maſsigen Gestalten kann man als horizontale Zeigerfläche ein Quadrat beschreiben, dieses durch Linien parallel den Seiten in kleinere einander gleich groſse Quadrate eintheilen, so daſs der Mittelpunct ein Theilungspunct ist, und durch die ganze Figur wieder Linien ziehen parallel den Diagonalen, welche jedes kleine Quadrat in 4 gleiche gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke zertheilen. Die übrigen Zeigerlinien hängen von der besondern Beschaffenheit der Gestalt ab, desgleichen die Menge der erforderlichen kleinen Quadrate, die in dem groſsen vereinigt sind.

Fig. 337. In der beigefügten Abbildung ist die horizontale Zeigerfläche der 4gliedrigen Gestalt, welche früher (in Fig. 239) schon als Beispiel diente, dargestellt. Nimmt man die Puncte s_1, s_2, s_3, s_4 als die Trägerenden der vier oberen Flächen s, so ergiebt sich

P_1 als zwischen s_1 und s_4 in der Mitte liegend (weil P sich gegen beide anliegende Flächen s auf gleiche Weise verhält), g_1 als in $\infty\alpha s$ liegend ist an sich einleuchtend. Durch Messung und Berechnung sey gefunden Cotg. $r_1 \| g_1 = \frac{2}{3}$ und deshalb sey in $\alpha\gamma$ die $\alpha u = 3.\alpha P_1$ und in uh die $u n = 2\alpha P$ genommen und dadurch αr_1 als der Richtung nach mit αn zusammenfallend bestimmt. Das Ende von r_1 liegt unendlich entfernt von α. Da der Träger z_1 in einerlei Zonenebene liegt mit $P_1 P_4$ und da die Fläche r_1 mit der Fläche z_1 in horizontaler Kante sich schneidet, also der Träger z_1 auch zwischen dem Träger α der Zeigerfläche und dem Träger r_1 liegt, so fällt z_1 mit dem Puncte n zusammen.

Ist nun in dem von den Flächen s gebildeten 8flächigen Ebenrandner das Verhältniſs der Hauptaxe zur Queraxe erster Art und zur Queraxe zweiter Art $= a : 1 : \sqrt{2} = 1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$, also das Zeichen einer Fläche desselben in Beziehung zu einer Zelle, die von drei einander nachbarlichen ungleichwerthigen Strahlen dieser Bestimmungsaxen gebildet wird, $= (1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\sqrt{2})$, so muſs das entsprechende Zeichen des Trägers dieser Fläche (weil Sin. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist) $= \left(1, \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{2}}}, \frac{1}{\frac{1}{a}\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) = [1, ak, a]$ seyn. Nimmt man $\alpha w = a\sqrt{2}$, so ist $\alpha s_4 = a$ und $\alpha s_1 = [\alpha w, \alpha s_4]$. Es sind daher die innerhalb des Winkels $\gamma\alpha h_1$ liegenden Trägerenden auf der Zeigerfläche auszudrücken durch die in den Richtungen $\alpha\gamma_2$ und αg_4 liegenden Maſseinheiten αw und αs_4, wie dieses auch daraus einleuchtet, daſs man, der

allgemeinen Regel gemäſs, die einer gegebnen durch kantenthümliche Strahlen A, B, D bestimmten Zelle entsprechende Trägerzelle erhält, wenn man die auf A und B, auf A und D und auf B und D senkrechten Träger aufsucht u. s. w. Hier nämlich ist $\underset{2}{\alpha g}$ senkrecht auf $\underset{1}{\alpha g}$ und auf die Hauptaxe und αv senkrecht auf αh und auf die Hauptaxe und die Hauptaxe (als Träger) senkrecht auf αg und αh.

Aus der Zeigerfläche sind nunmehr leicht ablesbar die Maſszähler in dem Zeichen

	der Träger						der Flächen			der Träger			der Flächen		
	welches ausgedrückt ist durch die Zelle, deren Bestimmungsstrahlen parallel liegen mit den Linien														
	a, $\underset{1}{\alpha g}$, $\underset{1}{\alpha\gamma}$			a, $\underset{2}{\alpha\gamma}$, $\underset{4}{\alpha g}$			a, $\underset{1}{\alpha g}$, $\underset{1}{\alpha\gamma}$			a, $\underset{1}{\alpha\gamma}$, $\underset{2}{\alpha\gamma}$					
	so, daſs die Maſse in diesen Bestimmungsstrahlen sich verhalten wie die Linien														
	$1 : \underset{1}{\alpha s} : \underset{1}{\alpha P}$ $= 1 : a : a\sqrt{\frac{1}{2}}$			$1 : \alpha w : \underset{4}{\alpha s}$[1] $= 1 : a\sqrt{2} : a$			$1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$			$1 : \underset{1}{\alpha P} : \underset{2}{\alpha P}$ $= 1 : a\sqrt{\frac{1}{2}} : a\sqrt{\frac{1}{2}}$			$1 : \frac{1}{a}\sqrt{2} : \frac{1}{a}\sqrt{2}$		
bei $\underset{1}{s}$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\underset{1}{P}$	1	0	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	2	1	1	1	0	1	1	∞
$\underset{1}{z}$	1	2	1	1	$\frac{5}{2}$	3	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	1	3	2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\underset{1}{g}$	0	1	0	0	1	1	∞	1	1	0	1	1	∞	1	1
$\underset{1}{r}$	0	2	1	0	$\frac{5}{2}$	3	∞	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	0	3	2	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

1 Als Hülfsmittel, die Maſse in $\underset{2}{\alpha g}$ und αv zu zählen, kann man benutzen, daſs $\underset{1}{\alpha P}$ in αw so oft enthalten ist als $\underset{4}{\alpha s}$ in αv und wieder $\underset{1}{\alpha s}$ zu αt gleichfalls sich verhält wie αw : vz u. s. w.

Was die 1- und 3mafsigen Gestalten betrifft, so ist hier die Entwerfung der Zeigerflächen so sehr derjenigen ähnlich, welehe bei 1- und 2mafsigen statt findet, dafs es nicht nöthig ist, darüber noch besonders zu reden. Es möge daher hier zuerst die tabellarische Zusammenstellung der aus der horizontalen Zeigerfläche einer 1fach 6gliedrigen Gestalt, welche früher (in Fig. 243) bereits beispielsweise erwähnt worden ist, abzulesenden wichtigsten Beziehungsarten mitgetheilt werden. Fig. 338.

	Es sind im Zeichen						
	des Trägers		der Fläche	des Trägers	der Fläche	des Trägers	der Fläche
	welches ausgedrückt ist durch die Zelle, deren Bestimmungsstrahlen sind: die Strahlen						
	$\underset{1}{P}, \underset{1}{M}, \underset{1}{e}$	$\underset{1}{P}, \underset{6}{M}, \underset{2}{e}$	$\underset{1}{P}, \underset{1}{M}, \underset{1}{e}$	$\underset{1}{P}, \underset{6}{M}, \underset{2}{M}$	$\underset{1}{P}, \underset{6}{e}, \underset{1}{e}$	$\underset{1}{P}, \underset{6}{M}, \underset{1}{e}$	$\underset{1}{P}, \underset{6}{M}, \underset{1}{e}$
	deren gerengesetzliches Mafsverhältnifs gesetzt wird						
	$=1 : \underset{11}{Px} : \underset{11}{Pa}$ $=1 : a : a\sqrt{\tfrac{3}{4}}$	$=1 : \underset{16}{Pz} : \underset{12}{Ps}$ $=1 : 2a : a\sqrt{3}$	$1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$	$=1 : \underset{16}{Px} : \underset{12}{Px}$ $=1 : a : a$	$1 : \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}} : \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$	$=1 : \underset{16}{Px} : \underset{11}{Pa}$ $=1 : a : a\sqrt{\tfrac{3}{4}}$	$=1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a}\sqrt{\tfrac{4}{3}}$
	die Mafszähler						
bei							
$\underset{1}{P}$	1 0 0	1 0 0	1 ∞ ∞	1 0 0	1 ∞ ∞	1 0 0	1 ∞ ∞
$\underset{1}{a}$	1 0 1	1 $\frac{3}{4}$ 1	1 $\frac{4}{3}$ 1	1 $\frac{1}{2}$ 1	1 2 1	1 0 1	1 ∞ 1
$\underset{1}{x}$	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 $\frac{1}{2}$ 1	1 2 1
$\underset{1}{s}$	1 0 2	1 $\frac{3}{2}$ 2	1 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	1 1 2	1 1 $\frac{1}{2}$	1 0 2	1 ∞ $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{z}$	1 2 0	1 2 2	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 2 2	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	1 1 2	1 1 $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{u}$	1 1 2	1 $\frac{5}{2}$ 3	1 $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$	1 2 3	1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$	1 $\frac{1}{2}$ 3	1 2 $\frac{1}{3}$
$\underset{1}{e}$	0 0 1	0 $\frac{3}{2}$ 2	∞ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$	0 1 2	∞ 2 1	0 0 1	∞ ∞ 1
$\underset{1}{M}$	0 1 0	0 1 1	∞ 1 1	0 1 1	∞ 1 1	0 1 2	∞ 1 $\frac{1}{2}$
$\underset{1}{c}$	0 1 2	0 $\frac{5}{2}$ 3	∞ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$	0 2 3	∞ 3 2	0 $\frac{1}{2}$ 3	∞ 2 $\frac{1}{3}$

Da hier rücksichtlich der Flächen u eine Halbzähligkeit vorhanden ist, so ist zu bemerken, dafs die oben entwickelten Permutationsgesetze sich auf jedes der entwickelten Zeichen von u anwenden lassen, welchem die dreierlei Mafsstrahlen P, M und e zum Grunde liegen (dafs also z. B. die Gesammtheit der 12 Träger u begriffen ist in dem Zeichen $[1, \pm 1, \pm 2]$[1]) während bei einer Bezeichnung, wie die durch P, M, M oder durch P, e, e ist, andere zusammengesetzte Hülfsmittel in Anwendung kommen müssen, z. B. $\frac{l}{r}\,\frac{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})}{2}$, wobei der Divisor 2 andeuten soll, dafs blofs die halbe Anzahl der 24 Flächen vorhanden ist, welche das Zeichen $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ fordern würde, während der oben stehende Buchstabe l andeutet, dafs die vorhandenen Flächen u am obern Ende die links von x liegenden sind, während die am unteren Ende vorhandenen als die rechts liegenden durch das unten befindliche r angedeutet werden. Das Zeichen, welches die 6 Träger c zusammenfafst, ist nach der ersteren Weise $= [0, \pm 1, \pm 2]$, während das Zeichen der 6 Flächen c nach der andern Methode $= \frac{l}{r}\,\frac{(\infty, 3, 2)}{2}$ seyn würde.

Dafs auch bei den 3gliedrig 4axigen Gestalten die Zeigerfläche das beste Hülfsmittel sey, den Zonenzusammenhang zu versinnlichen und eine unerschöpfliche Menge wichtiger Verhältnisse, welche sonst nur mühsam gefunden und deshalb nicht beachtet werden würden, so darzulegen, dafs sie gleichsam mit einem Blicke aufgefafst werden können, möge durch den Theil
Fig. 339. der der Würfelfläche parallelen Zeigerfläche dargethan werden, in welchem die Enden der Träger sich befinden, die diese Würfelfläche treffen, ohne dafs dieselbe verlängert zu werden braucht.

Der Punct W_1 ist das Ende des Trägers der als Zeigerfläche dienenden Würfelfläche; R_1, R_2, R_3, R_4 sind die Enden der Träger von eben so vielen Flächen des 12-Rautenflächners, A_1, A_2, A_3, A_4

1 Richtung und Gröfse der Mafse braucht als bekannt nicht besonders im Zeichen angedeutet zu werden.

jene von Trägern der Wände des 8flächners. Es sind ferner angedeutet die Trägerenden P, p, π von drei verschiedenen 6×4wandigen und H, h von zwei verschiedenen 8×3wandigen Keilflächnern, so wie L und l, welche zwei 24-Lanzenflächnern angehören, und endlich G_1, γ_1, g_1 als Trägerenden für eben so viele 48wandige Dreieckflächner. Namentlich sind es die Träger der sämmtlichen bestimmten Gestalten, von denen früher bereits angeführt wurde, dafs sie die wichtigsten an Krystallen vorkommenden hierher gehörigen einfachen Gestalten seyen. Bei Betrachtung dieser Zeigerfläche ist sogleich ersichtlich,

1) dafs die Linie W_1A_1 durch R_1R_2 in L_1 halbirt ist, dafs folglich auch $W_1p_1 = p_1L_1 = \frac{1}{2} W_1R_1$ ist;

2) dafs die Linie W_1A_1 durch R_1A_2 und H_1R_2 so getheilt wird, dafs $W_1l_1 = \frac{1}{3} W_1A_1$, dafs also auch $W_1P_1 = P_1l_1 = \frac{1}{3} W_1R_1$ und dafs $W_1\pi_1 = \frac{2}{3} W_1R_1$ ist;

3) dafs p_1L_1 durch jede der beiden Linien W_1H_1 und R_1A_2 in G_1 halbirt wird, so dafs $p_1G_1 = \frac{1}{4} W_1R_1$, dafs also auch die Entfernung des Punctes G_1 von der Linie $W_1A_1 = \frac{1}{4} R_1L_1$, von der Linie $W_1R_1 = \frac{1}{4} R_1A_1$ sey u. s. w.;

4) dafs R_4A_1 durch die Linien A_4R_3 und die dieser parallelen Linien in 5 gleiche Theile getheilt wird und dafs $P_1\gamma_1 = \frac{1}{5} p_1A_1$, mithin die Entfernung des Punctes γ_1 von der Linie $W_1R_1 = \frac{1}{5} R_1A_1$, von der Linie $R_1A_1 = \frac{4}{5} p_1 R_1 = \frac{2}{5} W_1R_1$ und von der Linie $W_1A_1 = \frac{4}{5} p_1l_1 = \frac{2}{5} R_1L_1$ sey;

5) dafs ferner $g_1L_1 = \frac{2}{3} p_1l_1$ (weil $g_1A_1 = \frac{2}{3} p_1A_1$), folglich $= \frac{1}{3} R_1L_1$ sey.

Will man nun die Zeichen sämmtlicher der Zelle $W_1 R_1 A_1$ angehöriger Träger mittelst der Zeigerfläche entwickeln, so kann dieses geschehen:

1) dadurch, daſs man dieselben ausdrückt durch die Bestimmungsträger oder Maſsstrahlen W_1, R_1, A_1 dieser Zelle selbst, wobei, wenn das Maſs in $W_1 = 1$ gesetzt wird, das in $R_1 = \sqrt{2}$ und das im Träger $A_1 = \sqrt{3}$ gesetzt werden kann, so daſs dieselben sich verhalten wie die 4gliedrige, 2gliedrige und 3gliedrige Axe des Würfels. Da nun die Strahlen W_1, R_1, A_1 nicht selbst in der Zeigerfläche vorhanden sind, so zählt man die Maſse in ihnen dadurch, daſs man die Entfernung des Endes eines Trägers, z. B. G_1, dessen Zeichen gesucht wird, von den Zeigerlinien R_1A_1, W_1A_1 und W_1R_1 vergleicht mit den ihnen parallel liegenden, die Entfernungen der Trägerenden W, R, A von eben diesen Zeigerlinien messenden Linien W_1R_1, R_1L_1 und R_1A_1, wodurch drei Verhältnisse oder Zahlen hervorgehen, welche sich zu einander verhalten, wie die Maſszähler in W_1, R_1 und A_1 für den Träger, dessen Zeichen gesucht wird[1]. So ist z. B. für den Punct G die Entfernung von $R_1A_1 = \frac{1}{2} W_1R_1$, daher der Maſszähler in $W_1 = \frac{1}{2}$, jene von W_1A_1 ist $= \frac{1}{4} R_1L_1$, also der Maſszähler in $R_1 = \frac{1}{4}$, und jene von W_1R_1 oder die Linie G_1p_1 ist $= \frac{1}{4} R_1A_1$, daher ist auch der Maſszähler in $A_1 = \frac{1}{4}$; es ist sonach in dem Zeichen des Trägers G_1 ausgedrückt durch die Zelle, deren Maſsstrahlen die Träger W_1, R_1, A_1 mit dem Maſs–

1 Eine Verfahrungsweise, die auch bei den übrigen Gestaltensystemen und bei jeder Zeigerfläche derselben von praktischem Werthe ist für die Uebersetzung einer Bezeichnungsart in eine andere.

verhältnisse $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ sind (welche Bezeichnungsart die I. heifsen möge), das Verhältnifs der Mafszähler $= \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4} = 2 : 1 : 1$.

2) dadurch, dafs man diejenige Zelle aufsucht, deren Messungsstrahlen senkrecht sind auf die drei Wände der Zelle $W_1 R_1 A_1$, deren Messungsstrahlen also die Strahlen $R_3 R_5 W_3$ sind, und durch diese das Zeichen des Trägers ausdrückt, indem man das Mafsverhältnifs $= \sqrt{2} : 2\sqrt{2} : 3$ setzt, damit die Umkehrung des Verhältnisses der Mafszähler für jeden Träger das Verhältnifs der Mafszähler gebe für das Zeichen der von ihm getragenen Fläche, ausgedrückt durch die Mafsstrahlen $W_1 R_1 A_1$, mit dem Mafsverhältnisse $1 : \sqrt{\frac{1}{2}} : \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{2}} : 1$. Es wird dann in der Zeigerfläche der Punct R_3 zum Anfangspuncte und die Richtungen $R_3\beta$ (als parallel dem Strahle R_5) und $R_3\delta$ (als parallel dem Strahle W_3) dienen dann, um durch sie die Trägerenden auszudrücken. Es liegt z. B. das Trägerende A_1 in $[1R_3\delta, 1R_3\beta]$ u. s. w. Dabei dient als Erleichterung, dafs die Linie $R_3\psi$ oder $L_3 A_1$ in demselben Verhältnisse durch die parallel $R_3\beta$ liegenden Linien getheilt wird, wie die Linie $R_3\delta$, und dafs ebenso die Eintheilungen der Linien $R_3 R_1$ und $R_3\beta$ durch die parallel $R_3\delta$ liegenden Linien einander entsprechen (II. Bezeichnungsart)...

3) dadurch, dafs man jeden Träger ausdrückt durch sein Verhältnifs zur 3fach rechtwinkligen Zelle W_1, W_2, W_3, das Mafsverhältnifs $= 1 : 1 : 1$ setzend. Dieser (III.) Bezeichnungsart entspricht die Bezeichnung der getragenen Fläche durch dieselben Mafsstrahlen mit demselben Mafsverhältnisse und mit umgekehrtem Verhältnisse der Mafszähler.

	der Maſsstrahlen	Es ist demnach in der Bezeichnung I. der Träger	II. der Träger	der Flächen	III. der Träger	der Flächen
die Richtung		W_1 R_1 A_1	R_3 R_5 W_3	W_1 R_1 A_1	W_1 W_2 W_3	W_1 W_2 W_3
das Maſsverhältniſs		$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$	$\sqrt{2}:2\sqrt{2}:3$	$\sqrt{3}:\sqrt{\frac{3}{2}}:1$	$1:1:1$	$1:1:1$
das Verhältniſs der Maſszähler für	W_1	$1:0:0=1:0:0$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}=3:\frac{3}{2}:1$	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:1$	$1:0:0=1:0:0$	$1:\infty:\infty=1:\infty:\infty$
	R_1	$0:1:0=0:1:0$	$1:1:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{2}{3}:1$	$1:1:0=1:1:0$	$1:1:\infty=1:1:\infty$
	A_1	$0:0:1=0:0:1$	$1:1:1=1:1:1$	$1:1:1$	$1:1:1=1:1:1$	$1:1:1=1:1:1$
	P_1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:0=1:1:0$	$1:\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=2:\frac{3}{2}:1$	$\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{1}{2}:0=2:1:0$	$\frac{1}{2}:1:\infty=1:2:\infty$
	P_1	$\frac{2}{3}:\frac{1}{3}:0=2:1:0$	$1:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{9}{4}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{1}{3}:0=3:1:0$	$\frac{1}{3}:1:\infty=1:3:\infty$
	π_1	$\frac{1}{3}:\frac{2}{3}:0=1:2:0$	$1:\frac{5}{6}:\frac{5}{9}=\frac{9}{5}:\frac{3}{2}:1$	$\frac{5}{9}:\frac{2}{3}:1$	$1:\frac{2}{3}:0=3:2:0$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\infty=2:3:\infty$
	L_1	$\frac{1}{2}:0:\frac{1}{2}=1:0:1$	$1:\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{9}{8}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{8}{9}:1$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=2:1:1$	$\frac{1}{2}:1:1=1:2:2$
	l_1	$\frac{2}{3}:0:\frac{1}{3}=2:0:1$	$1:\frac{2}{3}:\frac{5}{9}=\frac{9}{5}:\frac{6}{5}:1$	$\frac{5}{9}:\frac{5}{6}:1$	$1:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=3:1:1$	$\frac{1}{3}:1:1=1:3:3$
	H_1	$0:\frac{1}{2}:\frac{1}{2}=0:1:1$	$1:1:\frac{5}{6}=\frac{6}{5}:\frac{6}{5}:1$	$\frac{5}{6}:\frac{5}{6}:1$	$1:1:\frac{1}{2}=2:2:1$	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:1=1:1:2$
	h_1	$0:\frac{1}{3}:\frac{2}{3}=0:1:2$	$1:1:\frac{8}{9}=\frac{9}{8}:\frac{9}{8}:1$	$\frac{8}{9}:\frac{8}{9}:1$	$1:1:\frac{2}{3}=3:3:2$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=2:3:3$
	G_1	$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=2:1:1$	$1:\frac{3}{4}:\frac{7}{12}=\frac{12}{7}:\frac{9}{7}:1$	$\frac{7}{12}:\frac{7}{9}:1$	$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=4:2:1$	$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}:1=1:2:4$
	γ_1	$\frac{2}{5}:\frac{2}{5}:\frac{1}{5}=2:2:1$	$1:\frac{4}{5}:\frac{3}{5}=\frac{5}{3}:\frac{4}{3}:1$	$\frac{3}{5}:\frac{3}{4}:1$	$1:\frac{3}{5}:\frac{1}{5}=5:3:1$	$\frac{1}{5}:\frac{1}{3}:1=3:5:15$
	g_1	$\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}=1:1:1$	$1:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}=\frac{3}{2}:\frac{5}{4}:1$	$\frac{2}{3}:\frac{4}{5}:1$	$1:\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=3:2:1$	$\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:1=2:3:6$

Setzt man in der Bezeichnung II. der Träger das Verhältniſs der Maſse in den Maſsstrahlen $= R_3 R_5 W_3 = \sqrt{2}:\sqrt{2}:1$, so sind in der Zeigerfläche die Linien $R_3 R_4$ und $R_3 A_2$ als Maſse

zu gebrauchen und es wird dann das entsprechende Verhältnifs der Masse in den Strahlen $\underset{1}{\mathrm{W}}\,\underset{1}{\mathrm{R}}\,\underset{1}{\mathrm{A}}$ für die entsprechende Flächenbezeichnung $= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Man erhält dann folgende Verhältnisse der Maſszähler:

	für die Träger	für die Flächen
$\underset{1}{\mathrm{W}}$	$1 : 1 : 1$	$1 : 1 : 1$
$\underset{1}{\mathrm{R}}$	$1 : 2 : 2$	$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$
$\underset{1}{\mathrm{A}}$	$1 : 2 : 3$	$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$
$\underset{1}{\mathrm{p}}$	$1 : \frac{3}{2} : \frac{3}{2} = 2 : 3 : 3$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$
$\underset{1}{\mathrm{P}}$	$1 : \frac{4}{3} : \frac{4}{3} = 3 : 4 : 4$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{4}$
$\underset{1}{\pi}$	$1 : \frac{5}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 5 : 5$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{\mathrm{L}}$	$1 : \frac{3}{2} : 2 = 2 : 3 : 4$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$
$\underset{1}{\mathrm{l}}$	$1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3} = 3 : 4 : 5$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{\mathrm{H}}$	$1 : 2 : \frac{5}{2} = 2 : 4 : 5$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$
$\underset{1}{\mathrm{h}}$	$1 : 2 : \frac{8}{3} = 3 : 6 : 8$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}$
$\underset{1}{\mathrm{G}}$	$1 : \frac{3}{2} : \frac{7}{4} = 4 : 6 : 7$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}$
$\underset{1}{\gamma}$	$1 : \frac{8}{5} : \frac{9}{5} = 5 : 8 : 9$	$\frac{1}{5} : \frac{1}{8} : \frac{1}{9}$
$\underset{1}{\mathrm{g}}$	$1 : \frac{5}{3} : 2 = 3 : 5 : 6$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$

Die Lösung der Aufgabe, den Theil einer 4gliedrigen oder 2gliedrigen Zeigerfläche für die hier angegebenen Träger und Flächen zu zeichnen, welcher der Zelle $\underset{1}{\mathrm{W}}\,\underset{1}{\mathrm{R}}\,\underset{1}{\mathrm{A}}$ entspricht, so dafs aus ihm, auf gewöhnliche Weise, Ablesung der Maſszählerverhältnisse u. s. w. für die I. Bezeichnungsart statt finden kann, so wie auch die Darstellung und Vergleichung der vollständigen 4gliedrigen, 2gliedrigen und 3gliedrigen, einiger 2fach 1glie-

drigen und 1fach 1gliedrigen Zeigerflächen für diese merkwürdige Gestaltengruppe, möge dem Leser selbst überlassen bleiben.

Bei den 1- und 2maſsigen und bei den 1- und 3maſsigen hauptaxigen, so wie bei den 3gliedrig 4axigen Gestalten sind demnach die Bezeichnungsarten der Träger sowohl, als auch die der Flächen durch die einfachen Zellen (deren jede nur einen Strahl jeder Art oder nur eine Fläche jeder Art umfaſst) wohl zu unterscheiden von den Bezeichnungsarten, welche sich auf zusammengesetzte Zellen (deren jede aus zwei oder mehreren, ganzen oder zertheilten, einfachen Zellen bestehend gedacht werden kann) beziehen. Obwohl nun jede dieser Bezeichnungsarten von vielfachem Nutzen ist bei der Untersuchung der Eigenschaften eines gerengesetzlichen Flächenvereins oder des ihm entsprechenden Trägervereins u. s. w., so ist doch wohl von selbst einleuchtend, daſs, wenn bloſs von einer möglichst gedrängten Darstellung der einzeln oder zu mehreren an bestimmten Gestalten verbunden auftretenden Flächen- oder Trägerarten eines Vereins die Rede ist, die Bezeichnung durch einfache Zellen die zu wählende sey. Auch ergiebt sich von selbst, daſs die Trägerbezeichnung durch die einfachen Zellen am einfachsten eine Uebersicht sämmtlicher auf gerengesetzlichen Zusammenhang hinweisender Verhältnisse gestattet und darum den Vorzug verdient vor den sämmtlichen übrigen Bezeichnungsweisen, wenn es bloſs um eine möglichst kurze und einfache Darlegung dieses Zusammenhangs zu thun ist.

Gestalten der Krystalle.

Man kann sich vorstellen, als sey das Wachsen und Entstehen der Krystalle abhängig von Kräften, deren Richtungen senkrecht sind auf die Krystallflächen, gleichviel, ob wirklich physische Kräfte in diesen Richtungen unmittelbar gewirkt haben oder in andern Richtungen, für welche eine solche als mittlere erscheint. Es ist nicht unwahrscheinlich, daſs die so vereinten Kräfte in irgend einem gesetzlichen Zusammenhange stehen. Zerlegt man eine derartige Kraft in zwei oder mehrere andere, nach der Lehre vom Parallelogramme der Kräfte, so daſs man sucht, sie durch 2 oder 3 solche auszudrücken, deren Richtungen gleichfalls auf vorhandene Krystallflächen senkrecht sind, so ist es wahrscheinlich, daſs die Gröſse der Kraft, welche

in einer jeden von diesen Richtungen an sich wirkt, mit der Gröſse der Kraft, welche man ihr beilegen muſs, sofern durch ihr Zusammenwirken mit der andern (oder den andern) jene mittlere entstehen soll, in einem gesetzmäſsigen Verhältnisse stehe. Eine Vergleichung der bis jetzt bekannten Krystallgestalten führt dann zur Annahme folgender Erfahrungssätze.

1) *Die sämmtlichen Flächen an einem und demselben Krystalle gehören zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine*, so daſs also auch deren Träger zu einem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören und die Kanten des Krystalls parallel liegen mit Strahlen eines gerengesetzlichen Vereins kantenthümlicher Strahlen.

Daraus folgt dann unmittelbar, 2) daſs unter den bekannten Krystallgestalten sich keine finden könne, die einem Gestaltensysteme angehört, in welchem nicht einmal die Bestimmungsstrahlen jeder einzelnen Art unter sich (obgleich sie in Axen liegen, welche eine von den 3 wichtigsten Arten von Axen ausmachen) zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören, so daſs also 1- und mmaſsige Gestalten, bei denen m gröſser als 3 ist, und hauptaxenlose 3gliedrig 10axige Gestalten als Krystallgestalten nicht möglich sind. Man hat daher folgende Hauptabtheilungen von Krystallgestalten:

I. Klasse hauptaxenloser Krystallgestalten. Sie umfaſst nur *eine* Ordnung, nämlich die Ordnung der (3gliedrig) 4axigen Gestalten.

II. Klasse hauptaxiger Krystallgestalten. Sie hat zwei Ordnungen:

1) Ordnung der 1fach 1axigen,
 a) Familie der 1- und 3maſsigen,
 b) Familie der 1- und 2maſsigen;

2) Ordnung der mehrfach 1axigen oder 1- und 1maſsigen.

Mit dieser Eintheilungsart stimmt auf eine merkwürdige Weise das Verhalten der durchsichtigen Krystalle gegen das Licht überein. Krystalle der Klasse I besitzen keine doppelte Strahlenbrechung[1], während diese Eigenschaft denen der Klasse II zusteht. Die der ersten Ordnung II. Klasse haben eine Axe doppelter Strahlenbrechung, welche mit der einzigen einheitlichen

1 Mit Ausnahme des Boracits.

Axe, der Hauptaxe, zusammenfällt; jene der zweiten Ordnung besitzen zwei Axen doppelter Brechung.

Bei flächenvollzähligen 1- und 1maſsigen Gestalten liegen diese 2 Lichtbrechungsaxen so, daſs sie mit irgend 2 gleichwerthigen 2fach 1gliedrigen Axen zusammenfallen, folglich so, daſs jeder der vier Winkel, welche entstehen, indem sich diese beiden Lichtbrechungsaxen durchschneiden, halbirt wird von einem 2fach 2gliedrigen Strahle, d. h. zwei der drei einheitlichen 2fach 2gliedrigen Axen fallen in die Ebene der beiden gleichwerthigen Lichtbrechungsaxen, die 3te ist auf dieser Ebene senkrecht.

Aber nicht bloſs diese Lichtbrechungsverhältnisse der Krystalle, sondern alle diejenigen ihrer physikalischen Eigenschaften, die in verschiedenen Richtungen verschieden sich äuſsern können, stehen mit dieser Abtheilung im Zusammenhange. Dahin gehört vorzüglich Glanz, Elektricität, Härte und endlich Zusammenhang der Theile, in sofern er sich durch Zerschlagen, Zerspalten u. s. w. zu erkennen giebt (wovon später noch ausführlicher die Rede seyn wird). Krystalle aus der Klasse I haben nie bloſs *eine* Flächenrichtung, welche durch vorzüglichen Glanz sich auszeichnet, sondern stets mehr als 2 solcher Richtungen, die einander in dieser Beziehung gleich sind; solche aus der ersten Ordnung II. Klasse zeigen auf der Horizontalfläche öfters andern Glanz als auf Seitenflächen; besitzen sie Perlmutterglanz, so gehören sie den Tafelflächen an u. s. w. Wenn Krystalle der I. Klasse durch Erwärmen polarisch elektrisch werden, so erhalten sie nicht *eine* elektrische Axe, sondern mehrere, die beim Boracit z. B. mit den vier 3gliedrigen Axen zusammenfallen, während bei hauptaxigen Gestalten stets nur *eine* elektrische Axe sich zeigt, die bei solchen in der 1sten Ordnung II. Klasse mit der Hauptaxe zusammenfällt (wie beim Turmalin) und bei solchen der 2ten Ordnung mit der aus andern Gründen als Hauptaxe angenommenen Axe übereinstimmt.

Jeder Gypskrystall ist in einer Richtung leichter spaltbar und weicher, als in jeder andern, in einer zweiten Richtung biegsam, in jeder andern zeigt er einen höheren Grad von Zerbrechlichkeit u. s. w., so daſs man schon daraus zu schlieſsen im Stande ist, es werde ihm eine hauptaxige Krystallform und zwar eine solche eigen seyn, in welcher mehr als eine einheitliche Axe möglich ist, d. h. eine 1- und 1maſsige.

3) Vergleicht man die Flächenarten, die in einer und derselben Gestaltenfamilie möglich sind, hinsichtlich auf die Häufigkeit ihres Vorkommens als Krystallflächen mit einander, so findet man, daſs 3gliedrig 4axige Gestalten, deren Flächen senkrecht sind auf 4gliedrige oder 3gliedrige oder 2gliedrige Träger, häufig als Krystallgestalten ausgebildet sind, während solche, deren Flächen 2fach 1gliedrige oder 1fach 1gliedrige Träger haben, weit seltener sind. Hauptaxige Krystallgestalten, welche 1- und 2maſsig oder 1- und 3maſsig sind, zeigen häufig Flächen senkrecht auf die Hauptaxe oder auf 2fach 2gliedrige Queraxen 1ster und 2ter Art; etwas seltener schon solche, welche senkrecht auf 2fach 1gliedrige Queraxen oder auf 2fach 1gliedrige Strebeaxen, am seltensten aber solche, deren Träger 1fach 1gliedrige Strahlen sind.

Aus diesem Grunde ergiebt sich von selbst, daſs gewisse Arten von Gestalten, welche früher als flächenhalbzählige, viertels- und achtelszählige aufgeführt worden sind, als Krystalle selten beobachtet werden können, nicht zu gedenken des Umstandes, daſs es meistens nur Bruchstücke oder Theile von Krystallen sind, welche dem Beobachter vorliegen, indem die ringsum mit Ebenen begrenzten Krystalle (die eingeschlossen oder eingewachsen gewesenen) bei weitem seltener sind, als die nur an ihrem freien Ende regelmäſsig ausgebildeten, an dem andern aufgewachsenen Ende nicht krystallartig begrenzten, wodurch mancher Krystall zu einem flächenvollzähligen mag ergänzt worden seyn, der es nicht wirklich war. Dessen ungeachtet bleiben auch diese niedrigeren Grade von Regelmäſsigkeit, da wo sie deutlich beobachtbar sind, für das tiefere Naturstudium von Wichtigkeit. Es möge daher hier die Aufzählung der weiteren Unterabtheilungen für die Ordnungen und Familien von Gestalten, welche als Krystalle möglich sind, statt finden mit beispielsweiser Angabe des Namens von wenigstens einer Substanz, deren Krystalle solche Gestalten besitzen, und mit Angabe der synonymen Benennungen, welche von den Krystallographen Weiss und Mohs gebraucht werden zur Bezeichnung des allgemeinen Charakters solcher Formen.

Krystallgestalten können seyn:

A. 3gliedrig 4axig

	Weissische Benennung	Mohsische Benennung	Beispiel
1) 8strahlig	sphäroedrisch	tessularisch	Flufsspath
2) 1fach 3gliedrig 8strahlig			
3) 4strahlig	hemisphäroedrisch tetraedrisch	semitessularisch von geneigten Flächen	Fahlerz
4) 1fach 3gliedrig 4strahlig			
5) 2 × 4strahlig	hemisphäroedrisch pyritoedrisch	semitessularisch von parallelen Flächen	Eisenkies

B. 1- und 3mafsig

1) 6gliedrig	6gliedrig	dirhomboedrisch	Smaragd. Fig. 240.
2) 1fach 6gliedrig		semidirhomboedrisch von parallelen Flächen	Apatit. Fig. 243.
3) ebenbildlich gleichendig 6gliedrig			
4) ungleichendig 6gliedrig			
5) ungleichendig 1fach 6gliedrig			
6) 3gliedrig	3- und 3gliedrig oder rhomboedrisch	rhomboedrisch	Kalkspath. Fig. 246 A. B. C.
7) 1fach 3gliedrig		semirhomboedrisch von parallelen Flächen	Apotomes Eisen. Fig. 248.
8) ebenbildlich gleichendig 3gliedrig		semirhomboedrisch und semidirhomboedrisch von zum Theil geneigten, zum Theil parallelen Flächen	Quarz. Fig. 249.
9) gleichstellig 2endig 3gliedrig			1
10) gleichstellig 2endig 1fach 3gliedrig			
11) ungleichendig 3gliedrig		semirhomboedrisch von verschiedener Bildung an beiden Enden	Turmalin. Fig. 251.
12) ungleichendig 1fach 3gliedrig			Turmalin z. Theil.

1) Dafs gleichstellig 2endig 3gliedrige Gestalten, so wie mehrere von den übrigen, für welche hier keine Beispiele aufgeführt wurden,

C. 1- und 2mafsig

1) 4gliedrig	4gliedrig	pyramidal	Zinnstein. Fig. 313.
2) 1fach 4gliedrig		semipyramidal von parallelen Flächen	Scheelerz. Fig. 242.
3) ebenbildlich gleichendig 4gliedrig			
4) ungleichendig 4gliedrig			
5) ungleichendig 1fach 4gliedrig			
6) gerenstellig 2endig 2gliedrig	tetraedrisch 4gliedrig	semipyramidal von geneigten Flächen	Kupferkies. Fig. 245.
7) gerenstellig 2endig 1fach 2gliedrig			vielleicht dürfte der Kupferkies eher hier als bei Nr. 6. beispielsweise erwähnt werden müssen.

dem Gebiete der Krystallkunde nicht ganz fremd sind, wird später bei der Lehre von den gesetzmäfsigen Zusammenwachsungen zweier oder mehrerer Krystalle (den Zwillingen, Drillingen u. s. w.) einleuchten.

D. 1- und 1maſsig

1) 2gliedrig	2- und 2gliedrig	prismatisch	Chrysolith. Serpentin. Fig. 237.
2) 1fach 2gliedrig	1- und 2gliedrig	semiprismatisch	Epidot (kann auch als 1gliedrig betrachtet werden).
3) ebenbildlich 2endig 2gliedrig			Bittersalz. Fig. 249 A.
4) ungleichendig 2gliedrig		prismatisch mit verschiedenen Flächen an entgegengesetzten Enden	Topas. Galmei. Fig. 250.
5) ungleichendig 1fach 2gliedrig			
6) 1gliedrig [1]	2- und 1gliedrig	semiprismatisch	Augit. Fig. 244 A. B.
7) 1fach 1gliedrig [1]	1- und 1gliedrig	tetartoprismatisch	Albit. Fig. 247.
8) ebenbildlich gleichendig 1gliedrig			kann als ungleichendig 1fach 2gliedrig betrachtet werden
9) gleichstellig 2endig 1gliedrig			kann als ungleichendig 2-gliedrig betrachtet werden
10) gleichstellig 2endig 1fach 1gliedrig			kann auch als ungleichendig 1gliedrig erscheinen
11) ungleichendig 1gliedrig			? Hornblende zum Theil
12) ungleichendig 1fach 1gliedrig			Elektrischer Axinit ? (Haüy.)

1 Daſs unsere Abtheilungen der 1gliedrigen und der 1fach 1gliedrigen Gestalten unabhängig sind von jeder Beziehung auf Gerengesetzlichkeit der ihnen zum Grunde liegenden Strahlensysteme, ist aus

4) Wenn man die Gesammtheit verschiedener einzelnen Krystallformen aus einer und derselben Unterabtheilung von Krystallgestalten, welche so beschaffen sind, dafs, wenn sie in übereinstimmender Stellung sich befinden, die Flächen aller zu einem und demselben gerengesetzlichen Flächenvereine gehören, zusammenfafst als zu einer und derselben *Krystallreihe* gehörig, so dafs die Classen, Ordnungen, Familien und Unterabtheilungen von Krystallgestalten zugleich als den Classen, Ordnungen, Familien und Arten von Krystallreihen entsprechend erscheinen, so hat man folgende Erfahrungssätze:

a) Krystalle, welche zu verschiedenen Krystallreihen gehören, zeigen sich auch in mehreren von den wesentlichsten ihrer physikalischen und chemischen Eigenschaften verschieden. Dafs zwei Krystalle, welche in verschiedene Classen, Ordnungen und Familien von Krystallreihen gehören, auch andere, nicht blofs die Gestalt angehende, Verschiedenheiten besitzen, ist oben bereits erwähnt worden, dafs aber auch die Artenverschiedenheit der Krystallreihen auf andere Verschiedenheit zu schliefsen berechtige, ungeachtet etwaiger sonstiger Uebereinstimmungen, dafür mögen folgende Beispiele sprechen. Zwischen den beiden bekanntesten Kobalterzen ist die wichtigste äufsere Verschiedenheit gerade darin begründet, dafs die Krystalle des einen (1fach 3gliedrig) 2⨯4strahlige sind, während die des andern nur als (2fach 3gliedrig) 8strahlige erscheinen; die wichtigste innere Verschiedenheit, welche dieser äufseren entspricht, liegt

der Art, wie der Begriff derselben gewonnen wurde, einleuchtend. Es kann daher, in gerengesetzlicher Hinsicht, bei manchen 1gliedrigen Gestalten zweckmäfsig seyn, in der Bezeichnung auszugehen von Zellen mit 2 rechten und einem schiefen Winkel (2fach rechtwinklige oder monoklinometrische Zellen), während bei andern gleichfalls 1gliedrigen Gestalten ihrer Eingliedrigkeit unbeschadet zweckmäfsiger von 3fach rechtwinkligen (orthometrischen) Zellen ausgegangen wird. Ebenso ändert sich der allgemeine Charakter der 1fach 1gliedrigen Gestalten, als solcher, nicht, obgleich für die gerengesetzliche Bezeichnung möglicher Weise bei den einen von 3fach rechtwinkligen, bei den andern von 2fach rechtwinkligen, bei den 3ten von 1fach rechtwinkligen (diklinometrischen), bei den 4ten von 3fach schiefwinkligen (triklinometrischen), und zwar hier wieder entweder von 1fach rechtkantigen (diklinoedrischen) oder von 3fach schiefkantigen (triklinoedrischen) Zellen ausgegangen wird, wenn man die einfachste Darstellung des Zonenzusammenhangs erhalten will.

darin, daſs jene aus Schwefel, Arsenik und Kobalt, diese bloſs aus Arsenik und Kobalt bestehen. Bei 1- und 3maſsigen gerenstellig 2endig 2fach 3gliedrigen Krystallen finden andere Verhältnisse des Zusammenhaltes und der Theilbarkeit statt, als bei gleichstellig 2endigen 2fach 6gliedrigen u. s. w. Noch auffallender sind die Verschiedenheiten bei 1- und 1maſsigen Krystallen, je nachdem sie zu Krystallreihen gehören, welche 2gliedrig oder 1gliedrig oder 1fach 1gliedrig sind. So ist der wasserfreie schwefelsaure Kalk 2gliedrig, der wasserhaltige aber 2fach 1gliedrig u. s. w. Als ganz vorzüglich wichtig muſs es aber gelten, daſs bei Krystallreihen einer Art, die nur in Beziehung auf das ursprüngliche gerengesetzliche Maſsverhältniſs verschieden sind, stets wesentliche Verschiedenheit hinsichtlich auf chemische und physikalische Eigenschaften vorhanden ist.

b) Umgekehrt, wenn Krystalle zu einerlei Krystallreihe gehören, so besitzen sie auch (sofern sie nicht in die Classe der hauptaxenlosen Krystalle zu zählen sind, welche in physikalischer und chemischer Hinsicht sehr verschieden seyn können, obgleich sie Glieder einer und derselben Krystallreihe sind[1], in der Regel eine unverkennbare Uebereinstimmung hinsichtlich auf ihre physikalischen und chemischen Eigenschaften, selbst dann, wenn ihre äuſsere Form verschieden ist. Es dürfte diese Regel zwar nicht ohne Ausnahme seyn, wahre Ausnahmen aber möchten doch wohl zu den Seltenheiten gehören. Als solche scheinbare Ausnahme ist anzuführen, daſs z. B. die Krystalle der Verbindungen von Kohlensäure mit Kalk, mit Bittererde, mit Manganoxydul, mit Eisenoxydul, so wie die der genannten Säure mit mehreren der genannten Basen zugleich, scheinbar zu einer und derselben Krystallreihe gehören oder daſs andererseits die Verbindung des Bleioxyds mit Phosphorsäure und die derselben Basis mit Arseniksäure eben so als scheinbar gleich gestaltet auftreten. Allein erstens hat die genauere Beobachtung nachgewiesen, daſs hier bloſs scheinbare Gleichheit der Form mit wirklicher Gleichheit verwechselt worden ist[2], und zweitens

1 Bleiglanz und Fluſsspath sind beide in ganz gleichen 8strahligen Gestalten krystallisirt; Fahlerz und Boracit erscheinen beide in 4strahligen, Eisenkies und Glanzkobalt in 2×4strahligen Gestalten.

2 Der 6flächige Kronrandner des kohlensauren Kalks hat Scheitelkanten von 105° 5′, der der kohlensauern Bittererde solche von

findet hier auch wirklich sowohl in physikalischer als in chemischer Hinsicht ein gewisser Grad von Gleichartigkeit der zusammengestellten fast gleichgestalteten Substanzen statt, welcher diese formelle Gleichartigkeit minder auffallend macht. Weit auffallender dagegen ist es, dafs Substanzen von oft sehr verschiedenem Charakter *fast* gleichgestaltet (oder, wie man es auch sonst nennt, isomorph) sind, wie z. B. salpetersaures Natron und kohlensaurer Bittererdekalk u. s. w.

c) Wenn Krystalle in allen ihren wesentlichen physikalischen und chemischen Eigenschaften vollkommene Uebereinstimmung zeigen, so gehören sie auch zu einer und derselben Krystallreihe, ihre Form sey scheinbar noch so verschieden. Kohlensaurer Kalk erscheint z. B. als Kalkspath in vielen hundert verschiedenen Krystallformen, welche alle einer und derselben Krystallreihe angehören. Es können zwar Krystalle in chemischer Hinsicht keine wesentliche Verschiedenheit zeigen (wie dieses z. B. zwischen Arragon und Kalkspath[1], zwischen Strahlkies und Eisenkies der Fall ist) und dennoch verschiedenen Krystallreihen angehören, aber dann ist stets mehr oder weniger beträchtliche Verschiedenheit hinsichtlich der physikalischen Eigenschaften vorhanden. Bestimmt man daher den Begriff für die Species der festen homogenen Körper dahin, dafs man sagt, zu einer solchen Species gehöre alles, was in Beziehung auf sämmtliche wesentliche physikalische und chemische Eigenschaften Uebereinstimmung zeigt, so kann man sagen, die Krystalle einer und derselben solchen Species gehören zu einer und derselben Krystallreihe in einer und derselben Classe, Ordnung, Familie und Unterabtheilung von Krystallgestalten; es liege jedem einzelnen ein Axen- oder Strahlensystem zum Grunde, welches

107° 25′, der der Verbindung von 1 Atom (oder Mischungsgewicht) kohlensauren Kalkes mit 1 Atom kohlensaurer Bittererde hat solche von $\frac{1}{2}$ (105° 5′ + 107° 25′) = 106° 15′ u. s. w.; ein Gesetz, auf welches zuerst Beudant aufmerksam gemacht hat, das aber noch durch vielfach wiederholte Beobachtungen an andern Substanzen seine vollständige Begründung erhalten mufs.

1 Wenigstens ist ein dem kohlensauren Kalke beigemischter Antheil kohlensauren Strontians, der dadurch, dafs er von 3 bis 0 Procent variirt, zu erkennen giebt, dafs er im Arragon nicht wesentlich sey, ungenügend, die Verschiedenheit beider Substanzen zu erklären.

mit dem aller übrigen Krystalle derselben Species nicht nur hinsichtlich auf die allgemeinen Eigenschaften jeder einzelnen Axenart (Beschaffenheit der Flügel und Enden einer Axe) übereinstimmt, sondern auch in jeder Richtung dasselbe Urmafs besitzt, das dieser Richtung in jenem Systeme eigen ist, wenn das Urmafs in einer bestimmten Richtung (z. B. in der Richtung der Hauptaxe) jedesmal $=1$ gesetzt wird, dasselbe Urmafs nämlich, von welchem jede gesetzliche Länge in dieser Richtung ein blofses Vielfaches nach rationalen Mafszählern ist.

5) Wenn bei den Krystallen einer und derselben Species von Substanz hinsichtlich auf die Menge der Flächenarten eine so grofse Mannigfaltigkeit statt fände, dafs, wenn man ausgeht von den Trägern der Flächen, die sich am wichtigsten machen, und durch sie die Träger der übrigen Flächen nach und nach entwickelt in einer solchen Ordnung, wie sie der gerengesetzlichen Entwickelung nach der Auffassung zunächst liegen, man bis zu sehr entfernt liegenden Gliedern fortschreiten müfste, d. h. zu solchen, für welche die Verhältnisse der Mafszähler durch immer gröfsere und gröfsere Zahlen ausgedrückt werden müfsten, so würde die Nachweisung der Gerengesetzlichkeit in der Krystallenwelt an das Unmögliche grenzen; es ist daher eine nicht unwichtige Erfahrung, dafs nur die ersten ursprünglichen und die ihnen zunächst liegenden, durch die einfachsten und leichtesten Entwickelungsoperationen bestimmbaren, Glieder eines gerengesetzlichen Trägervereins den Gegenstand der Untersuchung ausmachen, wenn von den Krystallen einer und derselben Species von Substanz die Rede ist, so dafs bei nicht ganz unzweckmäfsiger Wahl[1] der als ursprünglich gegeben zu betrachtenden Träger und deren Mafse das Verhältnifs der Mafszähler für die zu ihnen gehörigen abgeleiteten Träger, sofern sie durch ein gerengesetzliches Zeichen in Beziehung zu jenen ausgedrückt werden, ein solches ist, dessen Glieder sich in sehr einfachen kleinen ganzen Zahlen ausdrücken lassen, welche selten die Gröfse der Zahl 6 erreichen, noch seltener über diese Grenze hinaus sich erstrecken. So ist, um nur ein Beispiel anzuführen, aus dem Vorhergehenden erinnerlich, dafs in dem Verhältnisse der Mafszähler für die I. Trägerbezeichnung bei den wichtigsten der in der Natur vorkommenden 4axigen 1fachen Gestalten kein

1 Da nämlich, wo eine solche statt findet.

Mafzähler gröfser als 2 war, obgleich die Anzahl der aufgeführten Flächenarten als Trägerarten nicht kleiner als 13 ist.

Es soll jedoch hierdurch keineswegs behauptet werden, dafs höhere Mafszähler gar nicht vorkämen; vielmehr scheint es, als ob die Natur sich hierin keine bestimmte Grenze gesteckt habe, aber Fälle, in welchen ein Mafszähler als eine der höheren zweizifferigen Zahlen oder wohl gar als eine dreizifferige Zahl nothwendig ausgedrückt werden mufs, sind äufserst selten und zum Theil durch so unvollkommene Messungen bestimmt, dafs hieraus keine Einwendung gegen das der Gesammtheit der bekannten Erfahrungen entsprechende Gesetz der Einfachheit der Mafszähler entnommen werden kann.

6) Was die Frage betrifft, ob bei den Krystallen stets der Verein der Träger mit dem der kantenthümlichen Strahlen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehöre oder nicht, so ist es zwar nicht gerade unwahrscheinlich, dafs das fragliche Zusammengehören stets statt finde; aber die Nachweisung, dafs es wirklich so sey, ist in manchen Fällen mit Schwierigkeiten verknüpft, die davon abhängen, dafs bei der gerengesetzlichen Bezeichnung der Träger durch kantenthümliche Strahlen, so wie umgekehrt bei der Bezeichnung dieser durch jene, die Mafszähler mitunter sehr beträchtlich von jener hohen Einfachheit abweichen, welche ihnen sonst gewöhnlich eigen zu seyn pflegt.

Wichtig ist die in Rede befindliche Frage besonders deshalb, weil von ihrer Bejahung oder Verneinung es abhängt, ob bei den in der Krystallkunde besonders häufig vorkommenden 1gliedrigen und 1fach 1gliedrigen Gestalten die gerengesetzliche Bezeichnungsweise von 3fach rechtwinkligen Zellen ausgehen dürfe (wodurch alle mathematischen Untersuchungen solcher Gestalten, besonders aber die mehr trigonometrisch rechnenden, um ein Bedeutendes vereinfacht und erleichtert werden würden), oder nicht. Da nun aber die mehr geometrische Untersuchung gerade um so einfacher wird, je kleiner die Mafszähler sind, welche in Betracht kommen, und da ferner auf dem geometrischen Wege, besonders mit Hülfe der Vortheile, welche eine geschickte, durch vielfältige Uebung an Beispielen praktisch erlernte, Benutzung der Zeigerflächen gewährt, auch die Auflösung aller trigonometrischen dann noch zu lösenden Aufgaben in der Art vorbereitet wird, dafs sie nur noch eine sehr geringe Mühe

verursacht und, wie gezeigt worden, äufserst einfach ist, so möchte es nicht zweckmäfsig seyn, die Bezeichnung durch nicht 3fach rechtwinklige Zellen, welche jedoch einfache kleine Mafszähler giebt, zu vertauschen mit jener, welche von 3fach rechtwinkligen Zellen auch bei den 1gliedrigen und 1fach 1gliedrigen Gestalten ausgeht, aber Mafszähler liefert, welche durch so grofse Zahlen ausgedrückt werden müssen, dafs es zweifelhaft werden kann, ob nicht das so ausgedrückte Verhältnifs derselben blofs ein annähernder Ausdruck für ein hier etwa statt findendes irrationales Verhältnifs sey, ja selbst dann nicht, wenn im letztern Falle die Mafszähler zwar nicht so grofs, wie eben angedeutet worden, aber doch bedeutend gröfser werden, als bei nicht 3fach rechtwinkligen Zellen.

Von der andern Seite scheint gerade die Abwesenheit des Vorkommens dreier auf einander senkrechter Kanten in solchen Gestaltenreihen darauf hinzudeuten, dafs es nicht naturgemäfs sey, von drei auf einander senkrechten, als kantenthümlich geltenden Strahlen bei der naturwissenschaftlichen Betrachtung dieser Gestaltenreihen auszugehen.

Es gründet sich ferner auf die erwähnte Frage und auf deren Beantwortung eine andere Frage, nämlich die, ob nicht, wenn man von dem Gesetze der einfachen Mafszähler absieht, die Strahlensysteme aller verschiedenen Krystallreihen zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine gehören und also zuletzt zu betrachten seyen als blofse *Abweichungen* von dem gerengesetzlichen Strahlenvereine, welcher den 3gliedrig 4axigen Krystallgestalten zum Grunde liegt *hinsichtlich auf den eigenthümlichen Classencharakter der Hauptaxenlosigkeit*, indem eine oder die andere der Axen der hauptaxenlosen Krystallreihe den Charakter der Hauptaxe annimmt und zwar noch das Urmafs, das ihr und den ihr gleichwerthig gewesenen eigen war, beibehält, jedoch vervielfältigt durch einen rationalen Mafszähler. So leitet namentlich Breithaupt[1] in der neuesten Zeit aus dem 8flächner, der dabei als 8flächiger Ebenrandner mit dem Axenverhältnisse $1a : 1R : 1r = 1 : 1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$ betrachtet wird, oder aus dem dazu gehörigen 8flächigen Ebenrandner 2ter Stellung $(1a : 1R : 2r) = (1 : 1 : 2\sqrt{\frac{1}{2}})$ andere 8flächige Ebenrandner dadurch ab, dafs er das Mafs der 4gliedrigen, nun als

1 Schweigger's J. d. Ch. 1828 und 1829.

Hauptaxe geltenden, Axe desselben mit einem Bruche multiplicirt, dessen Nenner die Zahl 720 (= dem Producte $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ der gewöhnlich vorkommenden Maſszähler) und dessen Zähler irgend eine ganze (nicht allzu sehr von 720 verschiedene) Zahl ist, und nun das Verhältniſs der so erhaltenen Hauptaxe zu den unveränderten Queraxen 1ster (und 2ter) Art als das Axenverhältniſs des neuen 8flächigen Ebenrandners und somit auch als das primäre kantenthümliche Maſsverhältniſs einer bestimmten 1- und 2maſsigen Krystallreihe betrachtet. Auf ähnliche Weise entstehen dann natürlich auch, wenn solche Veränderungen bei einer einzelnen der vier 3gliedrigen Axen statt haben, Axenverhältnisse für 1- und 3maſsige Gestalten u. s. w. Es läſst sich über diese, wenigstens in Beziehung auf die etwas willkürlich erscheinende Zahl 720, neue Lehre ein gründliches Urtheil erst dann fällen, wenn sie durch alle Krystallreihen, namentlich auch durch die 1- und 1maſsigen, hindurch geführt seyn wird; denn es ist dabei gar sehr zu berücksichtigen, daſs die dem Anfangsgliede $\frac{1}{1}$ oder $\frac{720}{720}$ zunächst liegenden Glieder der Reihe

$$\ldots \frac{718}{720}, \frac{719}{720}, \frac{720}{720}, \frac{721}{720}, \frac{722}{720} \ldots,$$

wenn sie als Tangenten von Winkeln angesehen werden, Winkel bestimmen, die nur sehr kleine Differenzen besitzen, und daſs diese Differenzen noch bedeutend kleiner werden, wenn man zwischen die Glieder dieser Reihe einschaltet die Glieder der Reihe

$$\ldots \frac{513}{720}\sqrt{2}, \frac{514}{720}\sqrt{2}, \frac{515}{720}\sqrt{2}, \frac{516}{720}\sqrt{2} \ldots,$$

welche den Vervielfältigungen der Hauptaxe bei dem 8flächigen Ebenrandner (a, R, 2r) entsprechen, während jene denen der Hauptaxe des zum 8flächigen Ebenrandner (a, R, r) gewordenen 8flächners angehören, und daſs solche kleine Differenzen nicht mehr mit der nöthigen Schärfe beobachtet werden können. Es ist nämlich z. B. $\frac{719}{720} = \text{Tg. } 44° 58'$ und $\frac{514}{720}\sqrt{2} = \text{Tg. } 44° 59'$, und $\frac{720}{720} = \text{Tang. } 45°$ u. s. w.

7) Bei Vergleichung zweier auf gleichwerthigen Trägern senkrechten Flächen eines und desselben Krystalls, so wie ihn die

Natur unmittelbar durch den Act der Krystallisirung liefert, findet man, dafs häufig die eine derselben dem Mittelpuncte des Körpers näher liegt, als die andere, folglich gröfser ist als diese u. s. w., und der Krystallkundige mufs daher z. B. einen von 8 Flächen begrenzten Körper für einen 8flächner (im engern Sinne) halten, wenn nur seine Flächen senkrecht sind auf die 4 Paare von Trägern, welche 4 Axen bilden, die so gegen einander geneigt sind, wie die 3gliedrigen Axen im 4axigen Strahlensysteme, gleichviel ob auch wirklich die 8 Flächen gleich weit vom Mittelpuncte des Strahlensystems entfernt sind oder nicht, vorausgesetzt, dafs nicht andere Gründe vorhanden sind, durch welche die Ungleichwerthigkeit der 8 Flächen sich ausspricht. Es geht daraus hervor, dafs bei einer Krystallgestalt das Gesetzliche für jede Fläche zunächst nur in dem Senkrechtseyn auf einen Träger von (im Verhältnisse zu den Trägern der übrigen Flächen desselben) bestimmter Richtung zu suchen sey, nicht aber in dem bestimmten Orte, in welchem sie sich befindet. Am zweckmäfsigsten ist es daher, wenn man bei Untersuchung der allgemeinen Beschaffenheit eines gegebenen Krystalls

a) eine Gestalt sich vorstellt, welche entsteht, wenn man in gleicher Entfernung von einem als Mittelpunct dienenden Puncte sämmtlichen Flächen des Krystalls parallele Ebenen sich denkt, um an dieser Gestalt das Gleichwerthige als gleichwerthig zu erkennen, und dafs man

b) auf das etwa Gesetzmäfsige in der ungleichen Vertheilung solcher Flächen des wirklichen Krystalls achtet, welche mit in jenem Bilde als gleichwerthig erscheinenden parallel liegen, und zugleich die etwaigen anderweitigen Verschiedenheiten solcher scheinbar gleichwerthigen Flächen berücksichtigt, um Verschiedenwerthiges nicht für gleichwerthig anzusehen. Als solche Verschiedenheiten ungleichwerthiger Flächen treten auf: ungleiche Stärke und Art des Glanzes, ungleiche Vollkommenheit des Ebenseyns (Glätte und Rauhheit und ganz besonders Streifen, die auf gleichwerthigen Flächen eine gleichwerthige Lage haben, nur bei einer oder der andern Flächenart als kleinere oder gröfsere Unvollkommenheit in der Bildung einer solchen Fläche auftreten und namentlich als Andeutungen der Bildung anderer Flächen anzusehen sind, die mit diesen sich in Kanten schneiden, deren Kantenlinien mit solchen Streifen parallel liegen würden), häufig auch ungleiche Theilbarkeit und

Härte des Krystalls in verschiedenen bestimmten Richtungen u. s. w.

c) den gegebenen Krystall mit andern Krystallen derselben Substanz vergleicht, um den wahren allgemeinen Charakter der Krystallreihe (d. h. den des ihr zum Grunde liegenden Strahlensystems) derselben zu ergründen, wenn er nicht bereits bekannt ist und bei Bestimmung des gegebenen, in Untersuchung befindlichen, Krystalls benutzt werden kann.

8) Merkwürdig ist es, dafs Krystallreihen, in deren Axensysteme ungleichendige Axen vorkommen, im Allgemeinen selten sind und dafs daher fast stets jeder Krystallfläche eine zweite, ihr parallele, an demselben Krystalle gegenübersteht, welches um so merkwürdiger ist, da ungleichendige Axen meistens nur den Krystallen eigen sind, welche durch Erwärmung polarisch elektrisch werden (Turmalin, Boracit, Topas, Galmei u. s. w.), wie dieses bereits oben angedeutet worden ist. Daraus geht aber hervor, dafs jene Unterabtheilungen der Krystallgestalten, welche sich auf parallelflächige Formen beziehen, bei weitem die wichtigsten sind für die Krystallkunde, ja auch unter diesen steht einigen ein bedeutend häufigeres Vorkommen zu, als den andern. So z. B. ist unter den 4axigen die Abtheilung der 8strahligen Gestalten die vorherrschende und unter den hauptaxigen sind als vorzüglich häufig zu bezeichnen die 3gliedrigen, die 2gliedrigen, die 1gliedrigen und die 1fach 1gliedrigen, weit seltner sind die 4gliedrigen und die 6gliedrigen Krystallreihen.

9) Nicht blofs äufserlich auf der Oberfläche des Krystalls sind ebene, gesetzmäfsig liegende Flächenrichtungen zu suchen, sondern auch im Innern. Ein Krystall von Kalkspath z. B. zerfällt beim Zerschlagen mit dem Hammer in eine Menge von Theilungsstücken, deren jedes, wenn es von lauter Theilungsflächen begrenzt ist, ein Parallelepiped darstellt, das, wenn seine 6 Flächen in gleichem Abstande von einem Mittelpuncte sich befinden, ein 6flächiger Kronrandner mit Scheitelkanten von 105° 5′ ist. Jedes solches Theilungsstück läfst dieselbe Theilung noch weiter zu und so kann man fortfahren in dieser Zertheilung, so weit als unsere Sinne und unsere Theilungswerkzeuge reichen, denn es ist von selbst einleuchtend, dafs, wenn man sich einmal überzeugt hat, die ebene Beschaffenheit der Theilungsflächen rühre nicht von der Beschaffenheit des

Theilungswerkzeugs her und von der Art, wie es angewandt wird, sondern sey im innern Baue des Krystalls gegründet, man mit gröfserer Behutsamkeit, als die ist, welche die rohe Anwendung des Hammers gestattet, verfahren wird, um die Richtung und Beschaffenheit der durch Spaltung zu erhaltenden Theilungsebenen zu erforschen, und dafs man daher Messer und Meifsel als Zwischenmittel anwendet, um die Wirkung des Hammerschlags vorzüglich nach derjenigen Richtung hin zu leiten, in welcher man vermuthet oder weifs, dafs die Spaltung möglich sey. Bei Substanzen, welche leicht spaltbar und nicht sehr hart sind, kann man den Hammer entbehren, bei sehr harten wendet man zweckmäfsig eine Beifs- oder Kneipzange mit scharfem Maule an, deren Wirkung dann oft noch durch den Hammerschlag befördert wird. Verfolgt man bei der Spaltung blofs eine der Spaltungsrichtungen, so zertheilt man den Krystall in eine beliebige Menge Blätter von beliebig kleiner Dicke. Die Eigenschaft eines Krystalls, sich nach einer Richtung in solche Blätter theilen zu lassen, heifst ein Blätterdurchgang desselben. Ein und derselbe Krystall besitzt daher mehrere Blätterdurchgänge, wenn er nach mehreren Richtungen hin ein Zerspalten in Blätter zuläfst. Zuweilen sind in Krystallen mehr oder minder deutlich sichtbare einzelne Spalten oder Risse vorhanden, welche (durch zufälligen Schlag, Stofs u. s. w. entstanden) mit Durchgängen parallel liegen und dadurch deren Richtungen verrathen. Die Spaltung in der Richtung eines und desselben Durchgangs findet an allen Stellen und Theilen des Krystalls mit gleicher Leichtigkeit statt und nur ein zufällig schon vorhandener Rifs in einer solchen Richtung macht die Trennung in der Ebene dieses Risses leichter, als in einer andern ihr parallelen, also derselben Durchgangsrichtung entsprechenden, Ebene. Solche meist sichtbare Spalten sind daher gewissermafsen bereits halb entblöfste Durchgänge.

Senkrecht auf gleichwerthige Axenrichtungen eines Krystalls sind gleich leicht entblöfsbare Durchgänge vorhanden, welche, unter übrigens gleichen Umständen, gleich vollkommen ebene Theilungsflächen liefern. Verschiedenwerthigen Axenrichtungen entsprechen ebenso, mehr oder minder auffallend, verschiedenwerthige Durchgänge. So besitzt z. B. der Gyps drei Arten von zunächst ins Auge fallenden Durchgängen, die einen sind höchst leicht spaltbar und liefern spiegelnde Spaltungsflächen, die an-

dern beiden Arten sind weit minder deutlich und werden durch das Zerbrechen dünner Gypsblättchen beobachtet; in der einen dieser beiden Richtungen erfolgt das Zerbrechen leicht und liefert glatte glasartig glänzende Flächen, die durch muscheligen Bruch unterbrochen sind, in der zweiten ist das Zerbrechen durch die Biegsamkeit des Blättchens etwas erschwert und die gewonnene Fläche hat ein gestreiftes, gleichsam faseriges Ansehen.

Spaltungsflächen, die zuweilen ziemlich gleich vollkommenes Ansehen haben, unterscheiden sich oft auffallend, wenn man sie sehr nahe an das Auge bringt und entfernte Gegenstände darauf abgespiegelt beobachtet. So sind die Bilder, welche die eine der beiden deutlichsten Durchgangsrichtungen, z. B. beim Kalifeldspath, liefert, weit deutlicher als jene, welche die andere giebt. Die Träger der Durchgangsebenen gehören mit den Trägern der Flächen des Krystalls, folglich auch mit denen aller Flächen derselben Krystallreihe, zu einem und demselben gerengesetzlichen Strahlenvereine; daher liegen die Durchgänge häufig mit Flächen parallel, welche als Begrenzungstheile des Krystalls wirklich vorhanden sind. So ist ein Würfelkrystall von Bleiglanz spaltbar, parallel den Würfelflächen, in kleine rechtwinklige Parallelepipede, welche bei gleicher Gröfse ihrer Flächen wieder Würfel sind; ein 8flächner von Flufsspath ist spaltbar parallel seinen Flächen u. s. w.

Alle Krystalle einer und derselben Substanz[1] zeigen, wenn alle übrigen Umstände (namentlich der Grad von Reinheit der Masse und der Grad von Vollkommenheit der Ausbildung und Ebenheit der Krystallflächen) dieselben sind, selbst bei verschiedener äufserer Gestalt dennoch dieselben Durchgangsrichtungen in demselben Grade der Vollkommenheit. 8flächner von Bleiglanz sind spaltbar in auf ihre 4gliedrigen Axen senkrechten Richtungen und die von Theilungsflächen ringsum in gleichem Abstande begrenzten Theilungsstücke sind Würfel, eben so wie jene, die aus einem Bleiglanzwürfel erhalten wurden.

1 Dafs hier nicht Dinge für einerlei Substanz gelten, welche nur einander höchst nahe verwandt, nicht aber wirklich gleich sind, versteht sich von selbst; aber auch auf solche erstreckt sich diese Regel in vielen Fällen, z. B. bei Kalifeldspath und Natronfeldspath, bei kohlensaurem Kalk und kohlensaurer Bittererde u. s. w.

Störung beim Werden eines Krystalls hat öfters Unebenheit von sonst ebenen Spaltungsflächen zur Folge. So zeigt mancher Flufsspath deutlichere Durchgänge, als mancher andere reinere von ebeneren Krystallflächen begrenzte u. s. w.

Bei mancher Substanz besitzen die Krystalle nur Durchgänge parallel mit Krystallflächen einer Art (Bleiglanz, Zinkblende, Glimmer u. s. w.), bei mancher andern aber mit solchen zweier oder mehrerer Arten (Anhydrit, Gyps, Antimonglanz u. s. w.). Minder deutliche Durchgänge werden in besonders reinen Krystallen oft erst bemerkbar, während sie in minder reinen nicht wahrgenommen werden können und die deutlicheren auch an jenen, wiewohl minder vollkommen, beobachtbar sind. So sind beim Kalkspath die Durchgänge parallel den Flächen des (6flächigen) Kronrandners, dessen Scheitelkanten 105° 5′ messen. Allen Kalkspathkrystallen eigen, aber nur in besonders reinen Stücken, zeigen sich noch Durchgänge parallel den Flächen anderer, zu der in Rede stehenden Krystallreihe gehöriger, einfacher Gestalten. Die Krystalle mancher Substanzen lassen nur sehr unvollkommene Durchgänge erkennen, in denen anderer ist Wahrnehmung von Spaltbarkeit nicht möglich. Die hypothetische Annahme, dafs, parallel mit jeder Krystallfläche, Durchgänge vorhanden seyen, welche blofs wegen ihres geringeren Grades der Deutlichkeit durch unsere Sinne und unsere Spaltungswerkzeuge sich nicht wahrnehmen lassen, hat, wenn sie auch nicht gerade bewiesen werden kann, doch auch nicht viel gegen sich.

Bei Krystallreihen, in welchen schiefwandige Gestalten vorherrschen, in denen die Länge der Hauptaxe besonders überwiegend hervortritt, kommt Spaltbarkeit senkrecht auf die Hauptaxe, bei solchen, in welchen die kurzaxigen Gestalten häufiger sind, kommt jene senkrecht auf die Queraxen gewöhnlicher vor. Bei Substanzen, deren Krystalle deutliche Durchgänge besitzen, tritt oft der Fall ein, dafs gröfsere oder kleinere einzelne (sogenannte krystallinisch blätterige) Massen derselben, welche scheinbar verhindert waren, sich nach aufsen hin mit Krystallflächen zu begrenzen, dennoch die Durchgänge eben so vollkommen zeigen, als die Krystalle selbst. Bei sonst gleichem Grade der Vollkommenheit der Durchgänge wird die Spaltung oft besonders erleichtert 1) durch elastische Biegsamkeit der Blättchen, wie beim Glimmer; 2) durch gemeine Biegsamkeit,

wie beim Talk; 3) durch geringere Härte, wie z. B. bei den Kalkspathdurchgängen oder den Durchgängen bei krystallisirtem Rohrzucker, in Vergleich mit den eben so vollkommenen Durchgängen beim Topas. Wieder in andern Fällen bewirkt das Vorhandenseyn von sehr deutlichen Durchgängen einen sehr hohen Grad von Zerbrechlichkeit bei sonst nicht unbedeutender Härte, wie z. B. beim Euklas.

Erschwerung des Spaltens oder Verminderung der Ebenheit und Reinheit der Spaltungsflächen oder Abweichung vom Parallelismus derselben findet statt

a) beim Vorhandenseyn von Einschlüssen fremder Substanz. Dahin gehören α) Einschlüsse fester Körper in Krystallen oder krystallinischen Massen, z. B. Quarz in Kalifeldspath oder Natronfeldspath eingeschlossen, wie im sogenannten Schriftgranit, Sand in Kalkspathkrystallen enthalten, wie im sogenannten krystallisirten Sandstein von Fontainebleau u. s. w. β) Einschlüsse tropfbar flüssiger Körper, die zum Theil Ueberreste von der Mutterlauge sind, aus welcher die Krystalle bei ihrer Bildung sich ausgeschieden haben, indem Beispiele bekannt sind, daſs solche Flüssigkeiten gleich nach dem Zerschlagen ihrer Umgebung oder auch durch andere Einflüsse erhärteten, ja selbst krystallisirten, während andere dergleichen Einschlüsse sich als reines Wasser verhalten u. s. w.[1]. γ) Einschlüsse gas- oder luftförmiger Flüssigkeiten. Hierher z. B. das bei manchen schwarzen Hornblendekrystallen vorkommende schwammartig Blasige, gleichsam Bimssteinartige, der Masse, welches ungeachtet der regelmäſsigen äuſseren Gestalt und ungeachtet des vorhandenen Blättergefüges zuweilen in hohem Grade statt hat, dann die auch in andern Krystallen nicht seltenen einzelnen gröſseren oder kleineren eingeschlossenen blasenartigen Räume.

b) beim regelmäſsigen oder unregelmäſsigen Verwachsenseyn eines Krystalls u. s. w. mit Krystallen oder krystallinischen Theilen derselben Masse, aber von einer abweichenden Stellung,

1 Ueberhaupt ist die Beschaffenheit der in Krystallen u. s. w. eingeschlossen vorkommenden Flüssigkeiten, wie es scheint, eine sehr verschiedenartige. Sie sind besonders in neuern Zeiten ein Gegenstand sorgfältigerer Aufmerksamkeit geworden und daher in den Zeitschriften, welche vorzüglich für Physik, Chemie und Mineralogie bestimmt sind, ein im Verhältniſs zur Seltenheit der Erscheinung häufig zur Sprache kommender Gegenstand.

wenn hierbei die Spaltungsebene im einen Theile der Masse nicht auch in derselben Richtung im andern Theile fortsetzt, wie z. B. bei manchen sonst sehr leicht spaltbaren krystallinischen Stücken von Zinkblende u. s. w.

c) in manchen Fällen, in welchen der einzelne Krystall oder das krystallartige Individuum eine mehr oder weniger von der ebenflächigen abweichende äufsere Gestalt besitzt, so dafs dann äufsere und innere Unregelmäfsigkeit des Baues von einer gemeinsamen Ursache herzurühren scheinen. Wenn nämlich Abweichungen von der Ebenflächigkeit bei Krystallen vorkommen, so findet theils keine Störung in der Regelmäfsigkeit und Ebenflächigkeit des Blättergefüges derselben statt, so z. B. bei Kalkspathkrystallen, deren Ecken und Kanten in der Art abgerundet sind, dafs sie das Ansehen haben, als hätte eine oberflächliche Schmelzung sie in diesen gleichsam geflossenen Zustand versetzt, ferner bei Diamantkrystallen mit, wie es scheint, auf eine nicht ganz regellose Weise gekrümmten Flächen, bei Gypskrystallen, von denen man namentlich sagen kann, es habe bei ihrer Bildung in der Regel ein die krystallbildende Thätigkeit beschränkendes Bestreben statt gefunden, dergleichen Krümmungen von gewissen Stellen der Krystalloberfläche aus mehr oder weniger weit, ja selbst über den ganzen Krystall hin zu verbreiten, um ihn zu einer linsenförmig krummflächigen Gestalt umzuwandeln, ohne dafs dabei, selbst wenn er keinen ebenen Oberflächentheil mehr zeigt, die Ebenflächigkeit der Durchgänge beeinträchtigt würde u. s. w. Theils aber ist mit solchen Unregelmäfsigkeiten in der Form auch Störung in der Lage und Ebenflächigkeit der Blätterdurchgänge verbunden, indem dann Durchgangsrichtungen, die sonst einander parallel seyn würden, oft mehr oder weniger fächerartig divergiren, so dafs an nicht sehr weit von einander entfernten Stellen parallel seyn sollende Blätter einen Winkel von 90 und mehr, ja selbst von 180 Graden mit einander bilden; so z. B. bei solchen Turmalinkrystallen, deren Hauptaxe, statt eine gerade Linie zu seyn, hufeisenförmig gekrümmt ist, bei Prehnitkrystallen, welche ihrer Form nach mehr oder weniger derjenigen Hälfte eines Doppelkegels (∞flächigen Ebenrandners) gleichen, welche entsteht, wenn eine durch die Hauptaxe gelegte Ebene die Theilung dieser Gestalt bewirkt u. s. w. Oft wird auch gleichzeitig mit der aufsen statt findenden Krümmung eine ähnliche, nicht selten

ziemlich regelmäſsige, Krümmung der Spaltungsflächen beobachtet, wie z. B. bei manchen Spatheisensteinkrystallen, bei den sogenannten sattelförmigen Linsen (stumpfe 6flächige Kronrandner mit concav gekrümmten flachen zugerundeten Scheitelkanten und fast verschwindendem Scheitel) von Braunspath u. s. w.[1]. Als merkwürdig sind in dieser Hinsicht ferner zu erwähnen gewisse in Finnland vorkommende Glimmerkrystalle, bei denen die den Glimmern eignen ungemein deutlichen und leicht entblöſsbaren Spaltungsflächen so gekrümmt sind, daſs sie einer halben Kugeloberfläche gleichen.

Durch solches allmäliges Verschwinden der Ebenflächigkeit der Gestalt und der parallelen Stellung der einzelnen Theilchen, in welche ein einzelner Krystall zerlegt werden kann, findet natürlich ein eben so allmäliger Uebergang statt in solche Massen gleichartiger fester Substanzen, deren äuſsere Gestalt mehr von äuſserlichen Zufälligkeiten (Beschaffenheit und Gestalt des gegebenen Raumes, den sie zu erfüllen gezwungen waren, u. s. w.) und von allgemeinen Cohäsions- und Adhäsionsgesetzen abhängt, als von dem ihnen inwohnenden Bestreben, sich regelmäſsig zu gestalten (kugelförmige, traubige, tropfsteinartige und andere gerundete Gestalten, plattenförmige Ausfüllungen von blasenartigen Räumen u. s. w.), während ihr Gefüge aus dem divergirend Blätterigen in das divergirend Strahlige und Faserige und wieder in das parallel Faserige übergeht. Findet ein solches unregelmäſsiges Werden in der Stellung der einzelnen Theile bei solchen Massen statt, welche schon in ihrem regelmäſsigen Zustande als Zusammensetzungen, Verwachsungen u. s. w. zweier oder mehrerer, oft unendlich vieler Krystalle angesehen werden müssen[2], und betrifft dabei die allmälige Abweichung von der Regelmäſsigkeit auch die Art der Zusammen-

1 Auch solche Enkrinitenstielglieder, welche einen Cylinder mit einwärts gekrümmter Seitenfläche oder mit bedeutend concaven, gleichsam trichterförmigen, Enden darstellen, besonders die letzteren, zeigen ein Blättergefüge der sie versteinernden Kalkspathmasse, welches so beschaffen ist, daſs die durch Spaltung erzeugten Kronrandner regelmäſsig krummflächige sind.

2 Die Gesetze, denen solche Verwachsungen unterworfen sind, werden in der Folge dieses Artikels noch ausführlicher erläutert werden.

setzung mittelbar oder unmittelbar und vorzugsweise [1], so stellt eine solche Mineralmasse sich als eine stängelig oder körnig abgesonderte (oder krystallinisch körnige) dar, an welcher die Absonderungsflächen theils eine besonders leichte Trennung gestatten, wie bei mancher derartigen Kalkspathmasse, bei manchem Amethyst, theils nicht, wie bei sogenanntem carrarischen Marmor, bei manchem krystallinisch stängeligen Quarze, der Gangklüfte im Gebirgsgestein erfüllt u. s. w. Auf dieser verhältnifsmäfsig leichtern Trennbarkeit beruht vorzüglich der Unterschied zwischen der Art der Zusammensetzung, welche man gewöhnlich körnig abgesondert nennt, und jener, welche man als ein krystallinisch körniges Gefüge zu unterscheiden pflegt.

Dafs auch durch stängelige Zusammensetzung mehrerer Individuen zu einer gröfseren Masse fester Substanz ein sehr allmäliger Uebergang in solche Massen statt findet, die aus geraden oder gekrümmten, divergirenden oder parallelen Fasern bestehen, zeigt sich unter andern sehr deutlich an den hierher gehörigen Arten des Vorkommens von Arragon.

Mit dem krystallinisch grofskörnigen Gefüge ist verwandt die Art des Gefüges, welches gröfsere geschmolzene Metallmassen nach der Abkühlung annehmen, wie dieses am leichtesten bei Zink, Wismuth u. s. w. beobachtet werden kann, indem auch hier gewöhnlich gröfsere Theile der Masse sich neben einander befinden, die, wenn sie einander in ihrer Ausbildung nach Aufsen hin nicht beschränkt hätten, zu einzelnen gröfseren Krystallen geworden seyn würden, wie sie dieses durch ihr Gefüge beurkunden. Aus dem krystallinisch kleinkörnigen Gefüge zeigt sich ein ununterbrochener Uebergang in das Dichte, wobei die einzelnen Körner oder Theilchen unmefsbar klein werden. Findet hierbei eine leichte Trennbarkeit, ein deutlicheres Abgesondertseyn der einzelnen pulverförmigen Theile statt, so ist das Gefüge erdig (wie bei Kreide, Bergmilch u. s. w.) Dem erdigen Gefüge zunächst steht endlich die Pulverform.

1 Dann behält das einzelne, eine unregelmäfsige stängelige oder plattenförmige Gestalt oder auch ein gröfseres oder kleineres, scheinbar gesetzlos gestaltetes, Korn darstellende Krystallindividuum in seinem Innern noch den regelmäfsigen Bau und ist in ebenen Richtungen auf gewöhnliche Weise spaltbar, wie z. B. stängeliger Kalkspath.

Auf eine sehr augenfällige Weise giebt sich oft das Daseyn von Durchgängen sowohl, als auch von Zusammensetzung aus ungleichartig gestellten Theilen zu erkennen beim schwächeren oder stärkeren Erhitzen, beim Einwirken von Säuren, von Wasser und andern Auflösungsmitteln. So zeigt z. B. der Apophyllit ein Entblättern oder Zerblättern, gemäſs der sehr deutlich in ihm vorhandenen Durchgangsrichtung, sowohl bei schwachem Erhitzen vor dem Löthrohre, als auch beim Zusammenbringen mit solchen Säuren, die sein Pulver zu zersetzen im Stande sind. Der Bergkrystall und andere harte Körper werden geglüht und zum Theil in Wasser gelöscht, um die Spaltung zu erleichtern oder zu befördern. Dasselbe geschieht bei dem Klüben oder Cliven (*cliver*) des Diamants durch die Diamantschleifer, wenn sie unreine Theile desselben abspalten wollen. Bleiglanz, Kochsalz und andere krystallisirte Substanzen zerknistern häufig, wenn man sie rasch erhitzt, und zerspringen in der Richtung ihrer Durchgänge u. s. w.

Bereits halbentblöſste, aber noch nicht sichtbare, den Durchgängen parallele Spalten in durchsichtigen Krystallen (besonders in Edelsteinen) entdeckt man öfters dadurch, daſs man sie erwärmt in eine Flüssigkeit legt, deren lichtbrechende Eigenschaft beträchtlich verschieden ist von der des Krystalls. Einsaugung der Flüssigkeit macht die Spalte sichtbar[1]. Oft giebt sich die Lage vorhandener Durchgangsrichtungen sowohl, als auch jene vorhandener Zusammensetzungsrichtungen zu erkennen durch oberflächliche erhabene und vertiefte Streifung auf den Krystallflächen oder Bruchflächen u. s. w. Oft auch werden solche Streifen, die von der Beschaffenheit des innern Baues Kunde geben, erzeugt durch oberflächliche Einwirkung von Auflösungsmitteln, indem auch gegen chemisch oder mechanisch wirkende Auflösungsmittel die geometrisch verschiedenwerthigen Theile der Krystalloberfläche einen verschieden groſsen Widerstand ausüben. So z. B. zeigt Quarz, der schmale Gebirgsklüfte ausfüllt, durch bloſses Zerbrechen oder Zerschlagen sein im hohen Grade krystallinisches, stängeliges Gefüge meistens nicht, wohl aber läſst er es wahrnehmen, wenn er während einer geraumen Zeit der

1 Auf solcher Einsaugung beruht, wenigstens zum Theil, auch die durch Kunst hervorgebrachte Färbung mancher Edelsteine, Zoolithe u. s. w. durch Juwelen- und Mineralienhändler.

Einwirkung einer Dachtraufe ausgesetzt war oder wenn er, in einem Kieselschiefer oder Grauwackenschiefergeschiebe enthalten, mit diesem die Einwirkung des Flufswassers erlitten hat. Eben so zeigen geschmolzne Metalle aufsen eine glatte Oberfläche, aber wenn sie in ganzen Stücken der Einwirkung einer Säure ausgesetzt werden, welche sie auflösen kann, und man unterbricht die Einwirkung der Säure, so erscheinen meistens Streifen von verschiedener Richtung, so dafs verschiedene Winkel dadurch gebildet werden, während in vielen Fällen parallel jeder solchen Richtung mehrere, oft sehr viele Streifen liegen. Da nun diese Streifen in der Regel als mit Kanten von Krystallgestalten, vorzüglich aber von Theilungsgestalten, parallel liegend betrachtet werden können[1], so wird durch sie und durch die von ihnen gebildeten Winkel in manchen Fällen eine Muthmafsung begründet über die Beschaffenheit der von Durchgangsebenen eingeschlossenen Theilungsgestalten des Metalls, selbst wenn die Theilung auf mechanischem Wege nicht möglich seyn sollte. Als die interessantesten hierher gehörigen Beispiele sind aufzuführen die Ergebnisse der von v. Widmanstädten[2] angestellten Aetzversuche auf Meteoreisenmassen mittelst Salpetersäure. Die bei diesen Versuchen erzeugten Streifen deuteten auf den 8flächner als die entsprechende Theilungsgestalt. Das krystallinische Gefüge der Verzinnung des weifsen Eisenbleches, welches ähnlich ist dem des Fenstereises[3], wird gleichfalls durch solches Aetzen kenntlich gemacht und auf diese Weise der (wegen einiger Aehnlichkeit mit dem Seidenzeug, welches Mohr genannt wird) sogenannte Metallmohr (moirée metallique) erzeugt.

Ganz besonders grofs scheint ferner der Einflufs der Lage der Durchgänge auf die Art, wie die Elasticität in krystallisirten Körpern sich äufsert, indem von der Lage der Durchgänge

1 Man kann gewissermafsen sagen, die Kanten des Krystalls, welche beim Entstehen desselben im Allgemeinen sich früher auszubilden scheinen, als die von ihnen eingeschlossenen Flächen, werden durch Einwirkung von Auflösungsmitteln auch später zerstört, als die Flächen.

2 v. Schreiber's Beiträge zur Geschichte und Kenntnifs meteorischer Stein- und Metallmassen. S. 70.

3 Vergl. Hessel über Eiskrystalle und über die Natur des Fenstereises in Kastner's Archiv.

die Lage der verschiedenwerthigen Elasticitätsaxen abhängt. Savart[1] nämlich hat dadurch, daſs er kreisförmige Platten aus Holz, die in verschiedenen zweckmäſsig gewählten Richtungen in Beziehung zur Lage der Jahrringe zum Theil aus dünneren Aesten und zum Theil aus dicken Stämmen nahe an der Rinde (wo für kleine Stücke die Jahrringe fast eben und parallel sind) geschnitten waren, in tönende Schwingungen versetzte und Klangfiguren auf ihnen erzeugte, die Veränderungen kennen zu lernen gesucht, welche gewisse zusammengehörige Klangfiguren erleiden, je nachdem die Kreisfläche der schwingenden Platte als eine, zu den verschiedenen in dem Holze unter den gewählten Bedingungen leicht erkennbaren, von der Lage der Fasern abhängigen Axen der gröſsten, mittlern und kleinsten Elasticität auf verschiedene Art geneigte, Schnittebene sich verhielt, wobei er zugleich die Höhe und Tiefe der entsprechenden Töne als vorzüglich wichtig berücksichtigte, und hat dann, nachdem er hierbei zu wichtigen Ergebnissen gelangt war, seine Methode angewandt auf kreisförmige, aus gröſseren Krystallen auf gleichfalls zweckmäſsig bestimmte Weise geschnittene, ihrer Lage nach in Beziehung zum Axensysteme genau bekannte Platten von Mineralien. Es ergab sich, daſs auf diesem Wege die wichtigsten Elasticitätsaxen eines Krystalls (von Quarz, Spatheisenstein u. s. w.) sich als ihrer Zahl und Lage nach von dem Familien- und Artencharakter der Krystallreihe, die der Substanz eigen ist, *vorzüglich aber von der Lage der Durchgangsrichtungen* bedingt, leicht erkennen lassen, indem sie ihrer Richtung nach mit vorzüglich wichtigen geometrischen Axen des Krystalls zusammenfallen, daſs also umgekehrt durch die in Rede stehenden Untersuchungen über die Lage der Elasticitätsaxen Aufschluſs erhalten wird über den Familien- und Artencharakter der Krystallreihe und über die Lage der Durchgangsrichtungen.

10) Wenn man diejenigen Fälle ausnimmt, in denen bei dem Zusammengewachsenseyn zweier oder mehrerer vollständig oder unvollständig ausgebildeter Krystalle an einzelnen Stellen, da

1 Es möge hier genügen, durch die wenigen im Text gegebenen Andeutungen der Savartschen Lehre auf die Wichtigkeit derselben für die Krystallkunde aufmerksam gemacht zu haben. Vollständig ist sie wiedergegeben in Poggendorff's Annalen XVI. 206 und 248.

wo die Oberfläche des einen Krystalls mit der des andern zusammentrifft, einspringende, rinnenartige Kanten entstehen, so gehören bei Krystallen die einspringenden Kanten und folglich auch die trichterartig vertieften Ecken zu den Seltenheiten, ja man kann, den bisherigen Erfahrungen zu Folge, dergleichen Krystalle stets für solche ansehen, die in ihrer Ausbildung gestört wurden und darum unvollkommene Krystallgebilde genannt werden können. Hierher die Würfel mit trichterartig vertieften Flächen (6×4wandige Keilflächner mit einem Axenverhältnisse, in welchem die 4gliedrige Axe kleiner als $R . \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, wenn R die 2gliedrige Axe bedeutet) beim Kochsalz, beim Wismuth, das nach dem Schmelzen krystallisirt, u. s. w. Wenn daher eine einzelne Krystallgestalt Flächen verschiedener Arten d. h. verschiedenen Werthes hat, also eine zusammengesetzte Krystallgestalt (Combinationsgestalt) ist, an welcher die Flächen zweier oder mehrerer einfacher Gestalten (sie seyen ringsum endlich begrenzt oder nicht) vorhanden sind, so können die Flächen jeder einzelnen nur so weit Theile der Begrenzung des Krystalls seyn, bis sie mit den ihnen zunächst liegenden Flächen anderer Arten in Kanten oder Ecken zusammentreffen. Wenn man daher zwei Krystalle hat, welche mit einander in Beziehung auf ihre Form so weit übereinstimmen, daſs alle Flächenarten des ersten auch am zweiten in denselben entsprechenden Abständen vom Mittelpuncte vorhanden sind, während der 2te noch eine Flächenart mehr besitzt als der erste, so wird, wenn man beide mit einander vergleicht, der letztere das Ansehen haben, als ob er aus dem ersten dadurch entstanden wäre, daſs an diesem gewisse Theile hinweggeschnitten (abgestumpft) scheinen. Es ist daher, in manchen Fällen wenigstens, nicht unvortheilhaft, von der eben angedeuteten Vorstellungsweise Gebrauch zu machen, aus einer Gestalt durch solches Hinwegschneiden von Theilen andere Gestalten sich zu bilden und die so von einander abgeleiteten Gestalten zu vergleichen mit den ihnen entsprechenden Krystallgestalten. Die gebräuchlichen Ausdrücke Abstumpfung, Zuschärfung und Zuspitzung, wovon der 2te sich auf zwei, der dritte auf mehr als zwei Schnittflächen bezieht, deren jede allein den fraglichen Theil abstumpfen würde, sind deshalb nicht unpassend, um eine mehr oder weniger genügende Vorstellung von der Verwandtschaft zweier Krystallgestalten zu geben, besonders dann, wenn die Theile, an welchen, und die Art, wie

die Abstumpfung statt finden mufs, auf mathematisch bestimmte Weise angegeben wird. Die verschiedenen Mittelkrystalle zwischen dem Würfel und dem 12-Rautenflächner können z. B. auf diese Weise angesehen werden, als seyen sie ihrer Form nach gleich mit Gestalten, welche man erhalten würde, wenn man an einem Würfel die Kanten oder an einem 12-Rautenflächner die 4gliedrigen Ecken regelmäfsig, d. h. so, dafs man das Gleichwerthige als gleichwerthig berücksichtigt, mehr oder weniger tief, abstumpfte u. s. w.

11) Beim Zusammengewachsenseyn zweier oder mehrerer Krystalle einer und derselben Substanz von einer und derselben Form findet meistens eine eigenthümliche Gesetzmäfsigkeit statt und solche Zwillings-, Drillings-, Vierlings- u. s. w. Bildungen sind in der Regel keineswegs blofs zufällige Erscheinungen. Nur selten findet ein blofses Aneinandergewachsenseyn zweier Krystalle statt, ohne dafs der eine Krystall, eben durch die Berührung, den andern in seiner Ausbildung gehindert hätte. Meistens hat bei dem Wachsthume der beiden Krystalle der eine nur diesseit der Berührungsfläche und der andere nur jenseit derselben sich vergröfsern und ausbilden können; daher ist die Erscheinung oft so, als ob blofs 2 Krystallhälften oder überhaupt Theile von Krystallen zusammengewachsen wären. Man unterscheidet Zwillinge, bei denen die Zusammensetzungsfläche eine einzige Ebene ist (Nebenzwillinge), und solche, an welchen sich beide Krystalle in mehr als einer Ebene oder auch in einer unregelmäfsigen Fläche berühren (Durchwachsungen). Fällt bei Durchwachsungen der Mittelpunct des einen Krystalls mit dem des andern zusammen, so nennt man sie am füglichsten Kreuzzwillinge.

Man erkennt Zwillinge u. s. w. theils daran, dafs die Spaltungsrichtungen der einen Zwillingshälfte, wenn sie geneigt sind gegen die Zusammensetzungsfläche, oft nicht in der andern Zwillingshälfte fortsetzen, theils daran, dafs sie meistens einspringende Kanten zeigen, theils an der deutlich sichtbaren Zusammensetzungsfläche u. s. w. Jede Zwillingsbildung läfst sich (wie Mohs zuerst folgerichtig durchgeführt hat) so darstellen, dafs man zwei gleiche Krystalle zuerst in paralleler Stellung mit dem einen der im Zwillinge verbundenen Krystalle sich denkt und dann den einen um eine bestimmt anzugebende, von der Beschaffenheit des Zwillings abhängende Axe dreht, so weit, bis

jeder aufserhalb dieser Axe liegende Punct desselben einen Bogen von 180 Graden beschrieben hat; jeder der beiden einzelnen Krystalle erhält dadurch die Stellung des ihm entsprechenden Zwillingstheiles. Man hat daher die Nebenzwillinge, bei denen dieses Gesetz der Halbumdrehung am augenfälligsten war, mit dem Namen *Hemitropieen* belegt. Da aber, besonders bei dem Nebeneinandergewachsenseyn, die Art der Zusammenfügung in Betracht kommt, so ist noch die Zusammensetzungsfläche anzugeben.

Da der Zwilling ein aus zwei einzelnen Theilen bestehendes neues Ganze, eine neue Gestalt ist, so kommt auch die Beschaffenheit des Strahlen- oder Axensystems in Betrachtung, welches dieser Gestalt eigen ist. Bei Nebenzwillingen hat jeder der beiden verbundenen Theile die Bedeutung einer Hälfte der ganzen Zwillingsgestalt, hat gleichsam aufgehört, eine Einheit für sich zu seyn; daher hat die auf die Zusammensetzungsfläche senkrechte Axe für jeden der beiden einzelnen Theile die Bedeutung einer ungleichendigen Axe. Für den ganzen Zwilling aber ist diese Axe, den bisherigen Erfahrungen zufolge, stets eine gleichendige. Sie heifse Nebenzwillingsaxe. Bei weitem am häufigsten ist die Nebenzwillingsaxe im ganzen Zwillinge eine gleichstellig 2endige Axe. So ist der beim Magneteisen z. B. vorkommende Nebenzwilling, welcher aus zwei (unvollständigen) 8flächnern besteht, eine gleichstellig 2endige 2fach 3gliedrige hauptaxige Gestalt. Eine der gerenstellig 2endigen 2fach 3gliedrigen Axen des 8flächners, wenn er einzeln ist, hat für ihn, als Zwillingshälfte, die Bedeutung einer ungleichendigen 2fach 3gliedrigen Hauptaxe erhalten; die Vereinigung beider Zwillingshälften bewirkt, dafs diese auf die Zusammensetzungsebene a b c d senkrechte Axe für den Zwilling selbst eine gleichstellig 2endige 2fach 3gliedrige wird. Ganz ähnlich verhält sich der erste dargestellte Kalkspathzwilling; die für den einzelnen 2×6flächigen Kronrandner als gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Axe zu betrachtende Hauptaxe ist in jeder Zwillingshälfte ungleichendig geworden, der Zwilling selbst aber ist eine gleichstellig 2endige 2fach 3gliedrige Gestalt, weil seine Nebenzwillingsaxe, welche die Puncte a und b verbindet, diesen erlangten Charakter auf ihn überträgt. Für den zweiten abgebildeten Kalkspathzwilling fällt die Nebenzwillingsaxe in jeder der beiden Zwillingshälften zusammen mit einer Axe, welche im voll-

Fig. 340. Fig. 341. Fig. 342.

Oooo 2

ständigen einzelnen Krystalle eine gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige Queraxe seyn würde, und ist eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe. Parallel mit der Linie, welche für den einzelnen vollständigen Krystall die gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Hauptaxe ist, liegt die (in der Zusammensezzungsebene a b c d e durch d nach dem Halbirungspuncte von a b gehende) ungleichendige 2fach 2gliedrige Axe des Zwillings. Die andere gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige Axe liegt parallel der Linie, die von ε nach e gehen würde. Jede Zwillingshälfte ist gröfser, als die Hälfte des 6flächigen Kronrandners, von welchem sie ein Theil ist.

Fig. 343. Als 4tes Beispiel möge ein Malachit-Zwilling dienen. Denkt man sich die hinter der Zusammensetzungsfläche $\alpha\beta\gamma\delta$ liegende Zwillingshälfte ruhig bleibend, die vordere aber um die auf die Ebene s (oder $\alpha\beta\gamma\delta$) senkrechte Nebenzwillingsaxe gedreht, und zwar so weit, bis jeder bewegliche Punct einen Bogen von 180° durchlaufen hat, so bilden beide Zwillingshälften in ihrer nunmehrigen Verbindung eine Gestalt, ähnlich dem einzelnen entsprechenden Malachitkrystalle, dessen parallel mit $\alpha\delta$ liegende Hauptaxe eine gerenstellig 2endige 2fach 1gliedrige ist und bei welchem auch die auf s senkrechte Queraxe denselben allgemeinen Charakter besitzt; im Zwillinge aber ist die auf s senkrechte Nebenzwillingsaxe eine gleichstellig 2endige 2fach 1gliedrige und die parallel mit $\alpha\delta$ liegende Axe ist die ungleichendige 2fach 2gliedrige u. s. w.

Fig. 344 Die Abbildung eines der beim Albit vorkommenden Zwillinge stellt den Fall dar, in welchem die auf die Zusammensezzungsfläche $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ senkrechte Nebenzwillingsaxe eine gleichstellig 2endige 1fach 1gliedrige ist, wobei also jede in $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ liegende Axe (folglich auch die mit $\beta\gamma$ parallele) eine ungleichendige 1fach 1gliedrige ist, während bei dem einzelnen vollständigen Krystalle jede denkbare Axe eine gerenstellig 2endige 1fach 1gliedrige ist. Fig 247.

Sehr selten dürfte bei Nebenzwillingen der Fall vorkommen, dafs die Nebenzwillingsaxe eine ebenbildlich gleichendige 1fach pgliedrige ist, denn er setzt voraus, dafs die Zusammensetzungsebene, als ebene Figur an sich betrachtet, eine 2fach pgliedrige sey[1],

1 Oder allgemeiner: eine 2fach x $\times$ pgliedrige, wenn x eine ganze Zahl bedeutet. Es setzt dieses Gleichheit von Winkeln voraus,

während die auf sie senkrechte Axe eine bloſse 1fach pgliedrige Axe ist. Mohs[1] führt einen hierher gehörigen Periklinzwilling an. Als eine besondere Merkwürdigkeit ist es daher zu betrachten, daſs bei den durch Kalkspathmasse versteinerten Enkriniten-Stielgliedern je zwei an einander sitzende Glieder in Beziehung auf die Durchgänge der Kalkspathmasse zu betrachten sind als Nebenzwillinge, bei denen fast jedesmal die Nebenzwillingsaxe eine ebenbildlich 2endige 1fach 3gliedrige ist[2].

Oft zeigt sich wiederholt die Zusammensetzungsart nach dem Gesetze der Nebenzwillingsbildung so, daſs an dem 2ten Krystalle ein 3ter u. s. w. anliegt. Dabei sind entweder die Zusammensetzungsflächen einander parallel oder nicht. Sind sie parallel, so besteht das Ganze aus plattenförmigen Theilen, welche, was die Stellung angeht, ausgedrückt werden können durch a.b.a.b.a.b.a.b..., wenn die Verbindung der beiden Buchstaben a.b oder b.a einen Nebenzwilling bedeutet. Zuweilen sind die Platten der einen Stellung dicker als die der andern, welche letztere zuweilen so dünn sind, daſs das Ganze auf den ersten Blick das Ansehen eines einzelnen, vollständig ausgebildeten Krystalls hat, bei näherer Betrachtung aber ergiebt sich, daſs er in Platten zerschnitten ist, welche von einander getrennt sind durch zuweilen fast unmeſsbar dünne Lamellen von derselben Substanz, aber von anderer Stellung u. s. w. Dadurch erhält der scheinbar einzelne Krystall auf einigen seiner Flächen ein gewissermaſsen gestreiftes Ansehen, was oft seine wahre Beschaffenheit erst verräth. Man beobachtet Gebilde solcher Art, wie sie dieser Zusammensetzung entsprechen, besonders häufig bei Albit, Periklin, Oligoklas, Labrador, Arragon u. s. w. Sind die Zusammensetzungsflächen nicht alle parallel, so entstehen oft Krystallgruppen, welchen, wenn man sie als Ganze für sich betrachtet, gleichfalls Strahlensysteme entsprechen, die von denen des einzelnen Krystalls oft sehr beträchtlich verschieden sind, oft aber auch denselben allgemeinen Charakter besitzen.

die auſserdem ungleich seyn könnten, ohne daſs der Charakter der einzelnen Gestalten ein anderer wäre.

1 Grundriſs der Mineralogie II. S. 295. Fig. 90.

2 Vergleiche über diese, auch in anderer Beziehung höchst interessante, Erscheinung die Schrift: Einfluſs des organischen Körpers auf den unorganischen, nachgewiesen an Encriniten, Pentacriniten und anderen Thierversteinerungen von Hessel.

Bei den Durchwachsungen zweier Krystalle, besonders aber bei den Kreuzzwillingen, findet eine weit gröfsere Mannigfaltigkeit statt hinsichtlich des Strahlen- oder Axensystems, das einer solchen Zwillingsgestalt zusteht. Durchwachsungen zweier 4strahligen Gestalten liefern 8strahlige Zwillingsgestalten, solche zweier 2 × 4strahligen Gestalten bilden gleichfalls 8strahlige Zwillingsformen, 3gliedrige Gestalten liefern häufig 6gliedrige
Fig. 256. Zwillinge u. s. w. So stellt die Abbildung einen Kreuzzwilling dar, in welchem zwei gleiche 6flächige Kronrandner so mit einander verbunden sind, dafs, wenn der eine in erster Stellung sich befindet, der andere die zweite Stellung hat. Die gerenstellig 2endige 2fach 3gliedrige Hauptaxe des einen Kronrandners fällt zusammen mit der des andern und die ihrer Richtung entsprechende Axe ap des Zwillings ist gleichstellig 2endig 2fach 6gliedrig.

Fig. 257. Der Staurolith zeigt Kreuzzwillinge verschiedener Art; die der einen Art angehörigen sind, wenn beide Krystalle gleiche Gröfse und einen gemeinsamen Mittelpunct haben, gleichstellig 2endige 2fach 4gliedrige Gestalten, deren Hauptaxe der Linie von d nach i entspricht, jeder einzelne Staurolithkrystall aber ist eine gleichstellig 2endige 2fach 2gliedrige Gestalt.

Krystallbeschreibung.

Jede Beschreibung eines räumlichen Gegenstandes mufs, wenn sie auf den Grad von Vollkommenheit Anspruch machen will, der ihr möglicher Weise zustehen kann, den mit den nöthigen Hülfsmitteln und Kenntnissen ausgerüsteten Leser in den Stand setzen, ein dem fraglichen Gegenstande entsprechendes räumliches oder ebenes Abbild (Modell, Zeichnung) beliebig darstellen zu können; denn erreicht sie dieses Ziel nicht, so erzeugt sie auch nur eine unvollkommene Vorstellung von dem Gegenstande. Sie hat aber auch ihr Ziel auf dem kürzesten Wege zu erreichen und mufs nicht verwechselt werden mit der ausführlichen Lehre über den Gegenstand. Ist daher bei einem Krystalle die Richtung seiner Flächen in Beziehung zu einem in ihm vorhandenen bestimmten charakteristischen Axen- oder Strahlensysteme das Beständige, das seinen Charakter Ausmachende, und wird es als Grundsatz anerkannt, dafs die sämmtlichen Flächen eines Krystalls und einer ganzen Krystallreihe

einen gerengesetzlichen Flächenverein bilden, so wird bei der Beschreibung eines Krystalls oder einer Krystallreihe diejenige Methode die zweckmäfsigste seyn, welche diese Verhältnisse, auf die es vorzüglich ankommt, am schnellsten aufzufassen verstattet.

Es dürfte daher bei der Beschreibung eines Krystalls (oder einer Krystallreihe) eine Angabe, aus welcher die Classe, Ordnung, Familie und Art der Krystallreihe erkannt werden kann, in welche er gehört, das erste Erfordernifs seyn. Ist dann ausgemacht, dafs der gerengesetzliche Zusammenhang der verschiedenen Flächenarten einer Krystallreihe, das Ineinandergreifen der verschiedenen Zonen u. s. w. sich am einfachsten aus dem Systeme der Träger dieser Flächenarten erkennen und entwikkeln lasse, so mufs es am zweckmäfsigsten seyn, die Bestimmung des gerengesetzlichen Zusammenhangs der Träger bei der Krystallbeschreibung zum Grunde zu legen, damit aus dem unmittelbar zu Gebenden das vom Leser selbst zu Findende möglichst leicht gefunden werden könne. Auch ist es von selbst einleuchtend, dafs man in dieser Bestimmung von den *einfachen* Zellen auszugehen habe, wenn von 1- und 2mafsigen oder 1- und 3mafsigen oder von 4axigen Gestalten die Rede ist.

Eine zweckmäfsige und kurzgefafste Beschreibung einer Krystallreihe hat daher folgende Angaben (von denen einige, wenn sie sich von selbst aus den andern bestimmen, weggelassen werden können) zu enthalten:

1) den Namen der Art der Krystallreihe;

2) die Stellung der Mafsstrahlen a, R, r in der als erste betrachteten Zelle, angedeutet durch Zusammenstellung der Buchstaben $\overset{a}{Rr}$ oder $\overset{a}{rR}$, welche dem Bilde der äufseren Flächenseite einer 1fach 1gliedrigen Fläche in dieser Zelle entspricht;

3) die ebenen Winkel (und als nützliche Zugabe die Neigungswinkel) der Wände der 1sten Trägerzelle (a ‖ R, a ‖ r, R ‖ r, aR ‖ ar, aR ‖ Rr, ar ‖ Rr);

4) das Verhältnifs der ursprünglichen Mafse für die 3 Messungsträger a, R, r in Zahlen ausgedrückt, welche rational oder irrational seyn können, je nachdem sie aus der Beschaffenheit der Gestalt sich ergeben[1];

1 Für die 1- und 3mafsigen Gestalten ist R : r = $\sqrt{3}$: 2 oder = 2 : $\sqrt{3}$, für die 1- und 2mafsigen Gestalten R : r = 1 : $\sqrt{2}$ oder

5) die tabellarische Aufzählung der Maſszählerverhältnisse in den Zeichen der den beobachteten Flächenarten entsprechenden Trägerarten. Findet der Fall statt, daſs nicht alle Zellen sich gleichwerthig verhalten, so ist bei dieser Aufzählung die Unterabtheilung nach den Zellenarten zu wahren, so daſs die Maſszählerverhältnisse für die einer und derselben Zellenart angehörigen Träger zusammengestellt werden in einer Columne, welche als Ueberschrift das besondere Zeichen der Zelle erhält, in welcher jene Träger auftreten. Dabei ist es bequem, nebenher jede Trägerart mit einem besondern einzelnen Buchstaben zu bezeichnen (der sich leichter, als jedes noch so einfache aus mehreren einzelnen Theilen zusammengesetzte Zeichen, in etwaigen Abbildungen auf das Bild der getragenen Flächen einschreiben läſst) und diesen als Stellvertreter für eine nicht ausführbare wörtliche Benennung der einzelnen ihrer Richtung nach durch das gegebene Zeichen bestimmten Träger- oder Flächenart zu betrachten. Dieser dient zugleich, um auf etwa vorhandene beigefügte oder in anzuführenden Werken befindliche Abbildungen zu verweisen, wenn auf diesen die Flächen durch solche Buchstaben bezeichnet sind.

Eine solche tabellarische Zusammenstellung würde daher bei einer 3gliedrigen Krystallreihe[1] z. B. folgende Form haben:

	a, R, r		
o	1	0	0
c	0	1	0
u	0	0	1

	± a, ± R, r		
P	1	1	0
m	1	4	0
λ	1	1	1
r	1	1	2
y	1	1	4

	± a, ∓ R, r		
g	2	1	0
f	1	2	0
x	2	4	3

Daran kann sich füglich reihen die Angabe von einem oder mehreren der 6 Winkel, welche jeder fragliche solche Träger

$= \sqrt{2} : 1$, nur bei den 1- und 1maſsigen findet mannigfache Verschiedenheit hinsichtlich auf das Verhältniſs R : r statt. Daſs eine Angabe von Winkeln, aus welchen mittelbar der Werth des Verhältnisses a : R : r erkannt werden kann, gleichfalls genügt, bedarf der Erinnerung nicht.

1 Die Tabelle bezieht sich auf mehrere der wichtigsten Kalkspathkrystalle, deren einige auch durch die Abbildungen Fig. 246 A, B, C versinnlicht sind. Es ist nämlich A = m o und B = c P und C = y . *r* . P . c . m.

bildet mit a, mit R, mit r, mit der Ebene aR, mit ar und mit Rr, der Zelle, in der er liegt[1].

6) Angabe etwaiger besonderer Eigenthümlichkeiten und Kennzeichen einzelner Flächenarten. Dahin gehört Art und Grad der Spaltbarkeit, Verschiedenheit an Härte, Gestreiftseyn, Rauhigkeit, Glätte, Stärke und Art des Glanzes u. s. w.

7) Aufzählung der beobachteten Verbindungen von Flächenarten (der Combinationsgestalten) durch Zusammenstellungen der vollständigen Zeichen ihrer Träger oder der die Stelle des Namens vertretenden Buchstaben in solcher Ordnung, dafs der Träger der gewöhnlich den gröfsten Theil der Krystalloberfläche einnehmenden Flächenart vor dem der minder ausgedehnten aufgeführt wird, oder auch in solcher Ordnung, dafs man von den bei senkrechter Hauptaxe steileren zu den flächeren, oder umgekehrt, fortschreitet.

8) Angabe etwa beobachteter Zwillingsbildungen u. s. w.

9) Angabe anderweitiger physikalischer und chemischer Eigenschaften und Verhältnisse der beobachteten Krystalle (besonders Härte, Gewicht, Verhalten gegen das Licht, gegen chemische Prüfungsmittel, Ergebnifs der chemischen Zerlegung u. s. w.), sofern dieselben dienen, den Leser die Einerleiheit der beschriebenen Krystalle mit solchen, die er selbst zu beobachten Gelegenheit hat (in materieller Hinsicht), erkennen zu lassen, und ihn daher in den Stand setzen, die Richtigkeit der mitgetheilten Angaben zu prüfen. Es ist deshalb oft manche unbedeutend scheinende geschichtliche Angabe (über Bereitungsart, Vorkommen u. s. w.) von nicht geringer Wichtigkeit.

Das Wichtigste aus der Geschichte der Krystallkunde.

Die sorgfältigere Beachtung der Krystallformen begann erst mit Werner und Romé de l'Isle. Der erstere besonders suchte den Zusammenhang der Krystallformen einer und derselben krystallisirten Substanz dadurch auszudrücken, dafs er die einen

1 Statt dieser Winkelangaben kann, da wo die Flächenart eine ringsum endlich begrenzte Gestalt bildet, die Angabe der Gröfsen der Kanten dieser Gestalt stehen. Jene Angabe ersetzt diese stets, diese aber ist nicht überall anwendbar.

ansah als ähnlich solchen Gestalten, welche durch Abstumpfungen, Zuschärfungen oder Zuspitzungen einzelner Theile anderer Gestalten entstehen, während die andern mit den dieser Bearbeitung unterworfenen Gestalten selbst übereinstimmten. Einige einfache oder nicht sehr zusammengesetzte Gestalten wurden nämlich bei dieser Ableitung zum Grunde gelegt und hieſsen Grundgestalten. Als solche Grundgestalten wurden betrachtet: 1) das *Hexaeder,* 2) die *Pyramide,* 3) die *Säule,* 4) die *Tafel,* 5) die *Linse.* Die Pyramiden, die Säulen und Tafeln wurden wieder unterschieden in dreiseitige, vierseitige u. s. w. Aus einer bereits abgeleiteten Gestalt wurden durch neue Abstumpfungen abermals andere Gestalten hergeleitet u. s. f., während wieder mehrere verschiedene Grundgestalten bei einer und derselben Krystallreihe statt finden sollten [1]. Romé de l'Isle machte sich verdient durch viele, mit dem zu seiner Zeit erfundenen Handgoniometer angestellte, Winkelmessungen an Krystallen.

Als Gründer der wissenschaftlichen Krystallkunde ist ohne Widerrede Hauy [2] zu betrachten, ja man kann sagen, daſs er nicht nur den Grund zu dem Gebäude dieser Wissenschaft gelegt, sondern vielmehr das ganze Gebäude in einer nicht unzweckmäſsigen Beschaffenheit dargestellt habe und daſs die Arbeiten der neuern Krystallographen, was das eigentlich krystallometrische und krystallonomische Fach betrifft, nur als neuer Anstrich oder als theils mehr, theils minder wichtige Verschönerungen und als Ausbau einiger nicht vollendeten Theile des von ihm gelieferten Gebäudes zu betrachten sind. Er war der Erste, welcher durch seine Lehre vom Ebenmaſsgesetze bei der Krystallbildung den allgemeinen Charakter der Arten von Krystallreihen andeutete, indem er nachwies, daſs zum Würfel

1 So die Krystallbeschreibungen in den aus der Wernerschen Schule hervorgegangenen Lehrbüchern der Mineralogie, z. B. im Handbuche der Mineralogie von C. A. S. Hoffmann, fortgesetzt von A. Breithaupt.

2 Traité de Mineralogie. — Uebersetzung dieses Werkes von Karsten und Weiss unter dem Titel: Lehrbuch der Mineralogie von Hauy. — Tableau comparatif des resultats de la Cristallographie et de l'analyse chimique relativement à la classification des mineraux. — 2te Auflage des Traité de Mineralogie. — Traité de Cristallographie. — Mehrere einzelne Abhandlungen in französischen Journalen.

blofs solche Gestalten gehören, wie der 8flächner, der 12-Rautenflächner u. s. w., welche nach unserer Ordnung den 3gliedrig 4axigen Gestalten beizuzählen sind, dafs dasselbe gelte vom 8flächner und wieder eben so vom 12-Rautenflächner, dafs mit dem 4flächner blofs andere Gestalten von solcher Beschaffenheit vorkommen, wie die oben mit dem Namen der 3gliedrig 4strahligen belegten u. s. w., dafs mit 2×4flächigen Ebenrandnern gerade Säulen mit rautenförmiger oder rectangulärer Basis und andere zusammengesetzte solche Gestalten in Verbindung stehen, welche oben als 2gliedrige Gestalten bezeichnet wurden, dafs mit der schiefen Säule mit rautenförmiger oder rectangulärer Basis (prisme oblique à base rhombe ou rectangulaire) und andern solchen Gestalten, die wir zu den 1gliedrigen zählen, nur solche Gestalten bei einer und derselben Substanz zugleich vorkämen, welche in unserer Sprache als 1gliedrige Gestalten benannt werden mufsten u. s. w. Da er seine Untersuchungen über alle ihm während seines nicht kurzen Lebens bekannt gewordenen Krystalle ausgedehnt hat, so ist zu erwarten, dafs ihm auch die meisten der wichtigsten Arten von Krystallreihen bekannt geworden seyn werden, und es ist also nicht nöthig, noch mehr Beispiele zum Beleg der ausgesprochenen Behauptung beizubringen.

Er war aber auch zugleich der Erste, welcher den gerengesetzlichen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Flächenarten, die bei einer und derselben Krystallreihe vorkommen, nachwies. Indem er nämlich bei der Betrachtung sämmtlicher Krystalle einer Substanz von einer möglichst einfachen, dem Arten-Charakter der Krystallreihe entsprechenden Gestalt ausging, deren Flächen mit vorhandenen Durchgängen parallel liegen oder bei Abwesenheit von Durchgängen durch anderweitige besondere Wichtigkeit (Häufigkeit des Vorkommens) sich auszeichnen, von einer Urform (forme primitive, *Kernform*), so entwickelte er abgeleitete oder secundäre Gestalten, ähnlich den verschiedenen Krystallen der fraglichen Substanz, dadurch, dafs er seine Urform sich wachsend dachte durch allmäligen Ansatz von neuen Lamellen (Ueberlagerungsblättchen) auf die Flächen der bereits vorhandenen Gestalt und diese allmälig angesetzten Lamellen von Seiten oder Winkeln ihrer Grundfläche aus abnehmen (*decresciren*) liefs nach bestimmten Gesetzen (*Abnahmegesetze* oder *Decrescenzgesetze*, lois de dé-

croissement) um einfache oder zusammengesetzte Reihen von parallelepipedisch gestalteten subtractiven Massentheilchen (molécules soustractives). So also baute derselbe z. B., wenn die Urform ein Würfel war, aus unendlich kleinen Würfeln (subtractiven Massentheilchen) eine quadratische Lamelle, welche die Höhe eines subtractiven Massentheilchens und die Würfelfläche zur Grundfläche hatte, legte dieselbe auf eine Würfelfläche so, dafs sie diese deckte, und nahm dann von jeder der vier Seiten dieser Lamelle eine Reihe von subtractiven Massentheilen weg (die Seite der Fläche eines würfeligen subtractiven Massentheilchens $= 1$ und die der Urform $= x$ gesetzt würde die Lamelle vor der Abnahme aus x^2 subtractiven Massentheilchen bestehen und nach der Abnahme $= (x-2)^2$ solcher Massentheilchen werden); auf diese erste Lamelle würde eine zweite ihr gleiche gelegt und abermals an jeder der vier Seiten um eine Reihe subtractiver Massentheilchen verkleinert (so dafs sie zuerst $= (x-2)^2$, nach der Abnahme aber $= (x-4)^2$ einzelner subtractiver Massentheilchen war). Dieses wurde fortgesetzt, bis sich auf der Fläche der Urform eine vierseitige Pyramide befand, mit treppenförmigen Seitenflächen. Die Arbeit auf jeder der 6 Würfelflächen gleichzeitig vorgenommen verwandelte den Würfel nach und nach in eine Gestalt, welche, wenn man von dem Treppenförmigen ihrer Flächen (bei unendlich kleiner Dicke der Ueberlagerungsblättchen) absieht, ein 12-Rautenflächner ist. Es ist dieses ein Beispiel von einreihiger, von den Kanten ausgehender, Abnahme der Ueberlagerungsblättchen, wenn die sämmtlichen Seiten der Fläche der Urform, auf welcher die Ueberlagerung statt findet, als Kanten der Urform gleichwerthig sind. Findet diese Gleichwerthigkeit nicht statt, so versteht sich von selbst, dafs nur Gleichwerthiges auf gleiche Weise modificirt werden dürfe (eine Lehre, welche Haüy das Ebenmafsgesetz bei der Krystallbildung nannte und die er als allgemein gültiges Gesetz betrachtete[1], das die Natur bei der Krystallbildung nur in seltenern unbedeutenden Fällen verletze). In andern Fällen wurden von jedem einzelnen Ueberlagerungsblättchen zwei oder mehrere, den Kanten parallele, Reihen von subtractiven Massentheilchen weggenommen (zwei-

1 Haüy's Ebenmafsgesetz der Krystallbildung, übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Hessel.

oder mehrreihige Breitenabnahme von den Kanten), oder es wurde von jedem, aus zwei oder mehreren einfachen bestehenden, zusammengesetzten Ueberlagerungsblättchen eine einzige, der Höhe nach zusammengesetzte Reihe subtractiver Massentheile abgenommen (zwei- oder mehrreihige Höhenabnahme an den Kanten), oder endlich es fand die Abnahme an jedem, aus zwei oder mehreren einzelnen Lamellen bestehenden, zusammengesetzten Ueberlagerungsblättchen um mehrere Reihen in die Breite statt, so daſs also die an einer Seite eines solchen Ueberlagerungsblättchens abgenommene Reihe subtractiver Massentheile eine sowohl nach der Höhe als auch nach der Breite zusammengesetzte war (gemischte Abnahme an den Kanten), z. B. die 3fache Breite und die 2fache Höhe einer 1fachen Reihe von subtractiven Massentheilen besaſs, und so wurden Flächen secundärer Gestalten erzeugt, die mehr oder weniger stark gegen die Flächen der Urgestalt geneigt waren, je nachdem in der abgenommenen zusammengesetzten Subtractivreihe das Verhältniſs der Anzahl von Höhen subtractiver Massentheilchen, aus welcher ihre Höhe bestand, zu der Anzahl von Breitenmaſsen solcher Atome, aus der ihre Breite zusammengesetzt war (welches Verhältniſs das Abnahmegesetz heiſst), einen verschiedenen Zahlenwerth hatte.

Fand die Abnahme der Ueberlagerungsblättchen so statt, daſs, wenn man das einfache Ueberlagerungsblättchen in seine parallelepipedischen subtractiven Massentheilchen zerlegt dachte, wodurch folglich die Auflagerungsfläche in (unendlich kleine) Parallelogramme getheilt gedacht wurde, die abgenommene Reihe[1] subtractiver Massentheilchen ihrer Längenerstreckung nach parallel mit einer in der Auflagerungsfläche liegenden Diagonale des Subtractivtheilchens war, so hieſs die Abnahme eine gewöhnliche einreihige Abnahme am Winkel (der Auflagerungsfläche, welcher Winkel angegeben wurde), indem nämlich hier, bei dem ersten Ueberlagerungsblättchen, der Anfang der Abnahme mit dem im Scheitel des erwähnten Winkels liegenden Subtractivtheilchen gemacht werden muſste. Wenn von jedem ein-

1 Da wo diese sich als solche darstellt und ihrer Länge nach aus mehr als einem Subtractivtheilchen besteht, was bei dem ersten einfachen Ueberlagerungsblättchen in dem hier entwickelten Falle nicht statt findet.

fachen Ueberlagerungsblättchen allemal zwei oder mehrere solche Reihen abgenommen wurden, so war dieses zwei- oder mehrreihige gewöhnliche Breitenabnahme am Winkel. Was gewöhnliche Höhenabnahme und gewöhnliche gemischte Abnahme am Winkel sey, ergiebt sich aus dem, was über die derartigen Abnahmen an den Kanten gesagt worden ist.

War endlich die Längenrichtung der abgenommenen Reihe von Subtractivtheilchen parallel mit einer Diagonale der Auflagerungsfläche eines (nach den Richtungen der beiden Schenkel des fraglichen Winkels hin nicht aus gleich grofser Anzahl einfacher Subtractivtheilchen) zusammengesetzten parallelepipedischen Subtractivtheilchens und bestand demnach jede subtrahirte Reihe aus eben solchen zusammengesetzten Subtractivtheilchen, so war die Abnahme eine mittlere Abnahme am Winkel (décroissement intermédiaire), und auch diese war wieder entweder einreihig oder mehrreihig nach der Breite oder mehrreihig nach der Höhe und Breite zugleich (gemischte mittlere Abnahme). Mit der gewöhnlichen nicht einreihigen Abnahme am Winkel auf einer Fläche der Urgestalt war stets als Hülfsabnahme eine mittlere Abnahme der Ueberlagerungsblättchen auf andern Flächen der Urgestalt verbunden.

Die Axenverhältnisse der Urgestalt sowohl, als auch des für eine und dieselbe Substanz unveränderlichen, stets parallelepipedischen, subtractiven Massentheilchens, bei welchem das Verhältnifs dreier in Betracht kommender Axenlängen stets übereinstimmt mit dem der ihnen parallelen Axen der Urgestalt, wurden von Haüy bei jeder Substanz ein für allemal angegeben, Eckpuncte und Kantenlinien jeder Art der in Abbildungen stets beigefügten Urgestalt mit einfachen Buchstaben bezeichnet, und es ward ein Zeichen gebildet, welches bestand aus dem die Stelle des Namens einer Kanten- oder Eckenart vertretenden Buchstaben und aus dem Decrescenzgesetze (Breite zu Höhe $= b:h$ in Form eines Bruches $\frac{b}{h}$ geschrieben), das dem Buchstaben in einer Weise angefügt wurde, welche die Lage der Fläche der Urgestalt, auf der die abnehmenden Ueberlagerungsblättchen sich auflegten, angeben sollte. So z. B. bedeutete G^2 eine zweireihige, von der Kante G ausgehende Breitenabnahme an den Ueberlagerungsblättchen, welche auf einer rechts von der Seitenkante G liegenden Seitenfläche angesetzt wurden;

$\overset{\frac{1}{2}}{A}$ war eine zweireihige, vom Winkel A ausgehende Höhenabnahme an den Ueberlagerungsblättchen derjenigen Fläche der Urgestalt, welche in der Abbildung oberhalb des Endpunctes A lag. Bei mittleren Abnahmen mufste aufserdem noch die Art der Zusammensetzung des zusammengesetzten subtractiven Massentheilchens angegeben werden nach den beiden in Betracht kommenden Richtungen hin; so war $\overset{1}{A}$ $(B^3\ C^2)$ eine mittlere Abnahme an den auf der Ebene der beiden Kantenlinien B und C angesetzten Ueberlagerungsschichten, welche ausging von dem Winkel A und an jedem einfachen Ueberlagerungsblättchen eine Reihe von zusammengesetzten subtractiven Massentheilchen betraf, deren jedes in der Richtung von B dreimal und in der Richtung von C zweimal so lang war, als das einfache.

$\overset{\frac{2}{3}}{A}$ $(B^2\ C^1)$ war ebenso eine mittlere gemischte Abnahme an einer jeden, über der Ebene B C liegenden, aus drei einfachen Blättchen bestehenden, der Höhe nach zusammengesetzten Ueberlagerungsschicht um zwei Reihen in die Breite, wobei die Subtractivtheilchen in der Richtung von B zweimal so lang, als die einfachen, waren.

Jedes solche Zeichen diente, die Flächenart, welche dadurch hervorgerufen wurde, anzugeben und zu bestimmen. Die Flächen der Urgestalt wurden, wenn sie von dreierlei Art waren, mit den Buchstaben P, M, T (Pri-Mi-Tif), oder mit P und M, wenn sie nur von zwei Arten, oder mit P, wenn sie nur von einer Art waren, bezeichnet und diese Buchstaben, wenn die Flächen der Urgestalt nicht verschwunden waren, mit den Zeichen der übrigen Flächenarten eines Krystalls zusammengestellt. Diese Zusammenstellung bildete das Repräsentativzeichen (signe représentatif) der ganzen Gestalt. Auch die Bezeichnung der secundären Flächenarten (auf den Abbildungen) durch einfache Buchstaben wurde in das Repräsentativzeichen mit aufgenommen.

Man sieht leicht ein, dafs die durch solche Art von Maurerei entstandenen einfachen Gestalten hinsichtlich auf das Verhältnifs ihrer drei wichtigsten Axenarten nach rationalen Mafszählern mefsbar seyn müssen durch die ihnen parallel liegenden Axen des subtractiven Massentheilchens oder, was dasselbe ist, der Urgestalt und dafs also hierdurch auf indirecte Weise

der gerengesetzliche Zusammenhang der verschiedenen Flächenarten einer Krystallreihe gegeben ist.

Dafs die Hauysche Ableitungsweise der secundären Gestalten zugleich als Erklärung des wirklichen Wachsens und Entstehens der Krystalle gelten soll, ist ohne weitere Auseinandersetzung einleuchtend. Mit dieser Theorie stand dann noch die Idee des integrirenden Massentheilchens in Verbindung, welches, wenn mehr Durchgänge vorhanden waren, als zur Bildung eines Parallelepipeds erfordert werden, durch Zerlegung der Urgestalt gemäfs jenen Durchgängen gebildet gedacht wurde und dann entweder die Form einer dreiseitigen Säule oder einer dreiseitigen Pyramide [1] (eines sogenannten Tetraeders) hatte, während es aufserdem mit dem parallelepipedischen subtractiven Massentheilchen von gleicher Gestalt war. Dieses integrirende Massentheilchen sollte das nicht weiter theilbare Atom seyn, welches bei dem Versuche weiterer Zertheilung nothwendig in die Atome der chemischen Bestandtheile zerfallen mufste, aus denen die Substanz, wenn sie nicht selbst ein chemisches Element ist, bestehend gedacht wurde.

Jede Krystallform, sie sey eine einfache oder eine von mehreren Flächenarten begrenzte, erhielt bei Hauy ihren besondern Namen, welcher auf mannigfache Weise gebildet und dem Namen der krystallisirten Substanz als Beiwort hinzugefügt wurde. Solche Namen sind z. B. équiaxe, metastatique, parallélique, binaire, unibinaire, prismé, pyramidé, perihexaèdre, alterne, bisalterne u. s. w.; die Menge solcher Namen ist nicht unbeträchtlich; sie dürften am Besten der Vergessenheit übergeben werden.

Gegen die Methode Hauy's läfst sich, sofern man hier, wie überall, die Atomistik als zulässig erklären mufs, wenn man ihr auch nicht gerade huldigt, nur Folgendes einwenden:

1) Sie legt bei der Wahl der Urgestalt einen zu hohen Werth auf die Durchgänge, ohne jedoch, wie es die Consequenz erfordern würde, jedesmal die deutlichsten vorhandenen

1 Der Knoten, welcher darin liegt, dafs bei oktaedrischen Urgestalten die Theilung stets sowohl oktaedrische, als auch tetraedrische Formen liefert, wurde durch Vernachlässigung der oktaedrischen Theile beseitigt und die tetraedrischen Theile wurden als integrirende Massentheilchen angenommen.

Durchgänge vorzugsweise zu berücksichtigen. Zugleich entsteht in dieser Wahl da eine Unbestimmtheit und Unsicherheit, wo Durchgänge vorhanden sind, welche die Begrenzung verschiedener Gestalten gestatten, die als Urgestalten angesehen werden können u. s. w.

2) Sie hebt aus eben diesem Grunde das Gleichartige verwandter, zu einer und derselben Art gehöriger Krystallreihen nicht scharf und bestimmt genug hervor, indem sie bei zwei Krystallreihen gleicher Art für die der einen Substanz von einer andern Urgestalt ausgeht, als für die der zweiten Substanz zustehende, ja sogar gezwungen ist, für die Ableitung der 3gliedrig 4axigen Krystallgestalten beim Bleiglanz vom Würfel, beim Flufsspath vom 8flächner und bei der Blende vom 12-Rautenflächner auszugehen.

3) Die von der parallelepipedischen Form abweichenden Urgestalten erschweren unnöthiger Weise die ganze Arbeit; denn wenn man, den Werth der Durchgänge zwar nicht verkennend, aber ihre Berücksichtigung nicht für wichtiger haltend als nöthig ist, überall von parallelepipedischen Urgestalten ausgeht, so erhält man eine atomistische Darstellung, welche genügt und in mehrfacher Hinsicht der Hauyschen vorzuziehen ist.

Im Geiste der Hauyschen Schule haben ausgezeichnete einzelne Arbeiten geliefert: Monteiro, Bournon, Cordier, Soret, Levy, Brooke und Andere.

Unter den Deutschen hat Weiss[1] zuerst den von Hauy gebahnten Weg betreten und auf gründliche Weise das Studium der Krystallographie betrieben. Er hat zuerst das Bedürfnifs gefühlt, die zu einerlei Art gehörigen Krystallreihen zusammen-

1 Dynamische Ansicht der Krystallisation von Ch. S. Weiss, in der Uebersetzung des Lehrbuchs der Mineralogie von Hauy I. S. 365 ff. De indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali. Lipsiae 1809. Mehrere in den Schriften der Berliner Akademie der Wissenschaften und in dem Magazin der Berliner naturforschenden Freunde zerstreute wichtige Abhandlungen über Feldspath, Gyps, Epidot, Zwillinge beim Quarz, Chabasit, Eisenkies u. s. w. Ueber eine ausführlichere, für die mathematische Theorie der Krystalle besonders vortheilhafte Bezeichnung der Krystallfläche des sphäroedrischen Systems. Betrachtung der Dimensionsverhältnisse in den Hauptkörpern des sphäroedrischen Systems und ihrer Gegenkörper, in Vergleich mit den harmonischen Verhältnissen der Töne. Bezeichnung der Flächen eines Krystallisationssystems u. s. w.

zustellen und in höhere Classificationsstufen (ähnlich unsern Classen, Ordnungen, Familien und Arten von Krystallreihen) zu vereinigen. Die ihm eigenthümlichen Benennungen der wichtigsten Arten von Krystallreihen sind oben bereits erwähnt. Vorzügliche Verdienste hat sich derselbe um die erste vollständigere Berücksichtigung und Aufstellung der Gesetze der Zonenlehre erworben. Als Hauptbedingung des vollständigen Bekanntseyns der gerengesetzlichen Beziehungen einer Flächenart (die in einer Krystallreihe als neubeobachtete auftritt) zu den übrigen bereits bekannten Flächenarten wurde von ihm zuerst mit Bestimmtheit die Forderung ausgesprochen, dafs jede solche Fläche parallel liegen müsse mit zwei bereits bestimmten, kantenthümlichen Strahlen, d. h. dafs sie in zwei bereits bekannte Zonen gehören müsse. Er war ferner der Erste, welcher die Wichtigkeit der Axen vorzüglich beachtete und eine auf die Axen gegründete Bezeichnung der Krystallflächen einführte. Seine Bezeichnungsweise stimmt, wenn man von dem Aufserwesentlichen (nämlich der Einschliefsung in rechtwinklige Parallelogramme oder Dreiecke u. s. w.) absieht, bei den 1- und 3mafsigen Gestalten mit der Bezeichnung der Flächen durch die kantenthümlichen Mafse der doppelten Zellen überein, bei sämmtlichen übrigen Familien von Krystallreihen aber stimmt sie mit der Flächenbezeichnung durch die Bestimmungsstrahlen der 3fach rechtwinkligen Zellen und durch deren Mafsverhältnifs, sofern sie kantenthümliche Strahlen sind, überein, so dafs z. B., Fig. 239. wenn bei dem Zinnerzkrystall a : R (nach uns) = c : a (nach Weiss) und die Flächen s = [1a, 1R, 1R] = | c : a : a | nach Weiss sind, auch die Flächen z = [1a, $\frac{1}{3}$R, $\frac{1}{2}$R], bei Weiss = | c : $\frac{1}{3}$a : $\frac{1}{2}$a | seyn müssen u. s. w.

Nach der Methode von Weiss wirkend sind schriftstellerisch aufgetreten G. Rose, Kupffer, Köhler u. s. w.

Eine neue Bahn hat sich Neumann[1] eröffnet. Ihm verdankt die ganze Trägerlehre und die Lehre von der Zeigerfläche einen grofsen Theil ihrer Begründung. Er hat sich nämlich nur

1 Beiträge zur Krystallonomie von Neumann I. Heft. (Schade, dafs diese ausgezeichnete und gründliche Arbeit, der nur mehr Einfachheit und Klarheit des Vortrags zu wünschen wäre, nicht rasch fortgesetzt wird.)

auf jene Fälle beschränkt, in denen der gerengesetzliche Verein der kantenthümlichen Strahlen mit dem der Träger zu einerlei gröfserem gerengesetzlichen Strahlenvereine gehört. Da er die Weifsische Flächenbezeichnung zum Grunde legt, so ist die von ihm gegebene Bezeichnung der Trägerenden (*Flächenorte* von ihm genannt) auch bei den 1- und 3mafsigen Gestalten diejenige, welche zu der Trägerbezeichnung durch 2fach rechtwinklige Zellen, deren 3ter Winkel = 120° ist, gehört, während sie bei den übrigen Krystallgestalten eine solche ist, welche auf 3fach rechtwinklige Trägerzellen sich bezieht.

Mit den Arbeiten Neumann's auf das Innigste verwandt sind die eben so classischen Arbeiten Grassmann's[1]. Ohne, wie er selbst gesteht, die Arbeiten von Weiss und, wie zugleich aus der Arbeit hervorgeht, ohne die von Neumann zu kennen, hat auch er die Trägerlehre auf eine sehr einfache fafsliche Weise bearbeitet, und obgleich er die Lehre von der Zeigerfläche nicht benutzt, während bei Neumann alles auf sie bezogen wird, so ist doch nur *der* wesentliche Unterschied zwischen beiden vorhanden, dafs Grassmann bei den 1- und 1mafsigen Gestalten sich nicht blofs auf diejenigen Fälle beschränkt, in welchen von 3fach rechtwinkligen Zellen die Rede ist. Man kann sagen, Grassmann rechne und combinire, während Neumann zeichnet. Da oben bereits das von beiden Gelehrten Gegebene zu gröfserer Vollständigkeit ergänzt und in Zusammenhang mit der gesammten Strahlenlehre gesetzt ist, so dürfte weitere Ausführlichkeit hier überflüssig seyn.

Abweichend von diesen sämmtlichen Methoden ist jene von Mohs[2]. Auch er hat, geleitet von demselben feinen mathematischen Tacte, wie Weiss, und gleich diesem nur die Hauptpuncte, worauf es anzukommen scheint, berücksichtigend, die Krystallreihen in Classificationsstufen höherer und niederer Art vereinigt. Seine Eintheilung stimmt daher, gleich der Weifsischen, mit der von uns gegebenen (auf vollständige Beachtung

1 Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre I. Heft.

2 Grundrifs der Mineralogie von F. Mohs; ein für das Studium der Mineralogie und besonders der Krystallkunde unentbehrliches Werk, aus welchem auch mehrere der Abbildungen, die zu dem vorliegenden Artikel gehören, entnommen sind.

der Beschaffenheit der den Gestalten eigenen Axen- oder Strahlensysteme gegründeten) rein mathematischen Eintheilung aller denkbaren Gestalten[1], wenigstens hinsichtlich auf die wichtigsten der hier in Betracht kommenden Eintheilungsstufen, überein[2]. Statt auf mehr unmittelbare Art den gerengesetzlichen Zusammenhang der Flächenarten einer Krystallreihe nachzuweisen, bewirkt er dieses erst auf einem Umwege. Er geht nämlich für jede Krystallreihe von einer Grundgestalt aus und leitet auf mehrfach verschiedene Weise aus ihr unmittelbar oder aus bereits von ihr abgeleiteten einfachen oder zusammengesetzten Gestalten theils einfache, theils zusammengesetzte Gestalten her und zerlegt diese letzteren erst, um zu den in ihnen enthaltenen einfachen Gestalten zu gelangen, welche einzeln auftretend oder zu zweien oder mehreren verbunden (combinirt) die einfachen oder zusammengesetzten Krystallgestalten (Combinationsgestalten) ausmachen. Für die 1- und 3mafsigen Krystallreihen ist jedesmal ein (6flächiger) Kronrandner (Rhomboeder) die Grundgestalt, für die 1- und 2mafsigen aber ein 8flächiger Ebenrandner (gleichschenklig vierseitige Pyramide[3]), bei den 1- und 1mafsigen 2gliedrigen ist sie ein 2×4flächiger Ebenrandner (ungleichschenklig vierseitige Pyramide), bei den 1gliedrigen aber und bei den 1fach 1gliedrigen ist die Grundgestalt eine zusammengesetzte Gestalt, welche bei den 1gliedrigen in Beziehung auf ein System von 8 (wenigstens) 2fach rechtwinkligen Zellen mit kantenthümlichen Mafsstrahlen a, R, r von dreierlei Werth, wenn r senkrecht ist auf a und R, auszudrücken ist als eine Verbindung aus den zwei einfachen Gestalten (± 1 a, ± 1 R, 1 r)

1 In welcher also auch jene der Krystallformen enthalten ist.

2 Wie dieses auch oben bereits dargelegt worden ist. Unsere Familien von Krystallreihen entsprechen der Hauptsache nach dem, was Mons Krystallsysteme nennt; so also hat er ein tessularisches System (4axige Gastalten), ein rhomboedrisches (1- und 3mafsige Gestalt), ein pyramidales (1- und 2mafsige Gestalt) und ein prismatisches (1- und 1mafsige Gestalt). Unsere Arten von Krystallreihen geben bei Mons das, was er den Charakter der Combinationen nennt. So haben also z. B. die Krystallreihen des prismatischen Systems theils einen prismatischen Charakter der Combinationen (2gliedrige Gestalten), theils einen hemiprismatischen (1gliedrige Gestalt), theils einen tetartoprismatischen (1fach 1gliedrige Gestalt).

3 Mons wendet durchgängig den Ausdruck Pyramide für Doppelpyramide an.

und (± 1a, ∓ 1R, 1r) (ungleichschenklige vierseitige Pyramide mit Abweichung der Axe in der Ebene der kleinen [oder grofsen] Diagonale $= +$ n Grad m Minuten, wo n° m′ auch $= 0° 0′$ seyn kann), während jene der 1fach 1gliedrigen Krystallreihen in Beziehung auf *irgend* ein bestimmtes System von 8 Zellen mit dreierleiwerthigen kantenthümlichen Mafsstrahlen a, R, r ausgedrückt werden mufs als eine Verbindung der vier einfachen Gestalten (± 1a, ± 1R, $+ 1$r), (± 1a, ± 1R, ∓ 1r), (± 1a, ∓ 1R, ∓ 1r) und (± 1a, ∓ 1R, ± 1r), deren jede ein 2flächiger Gegenwandner ist (ungleichschenklige vierseitige Pyramide mit Abweichung der Axe in den Ebenen beider Diagonalen [welche Abweichung angegeben wird; sie kann auch $= 0$ seyn]). Für die 4axigen (tessularischen) Gestalten gilt der Würfel (das Hexaeder) als Grundgestalt. Bei den hauptaxigen Krystallreihen, welche gleichnamige Grundgestalten haben, findet Verschiedenheit statt hinsichtlich der diesen Grundgestalten eignen Abmessungen, welche im Allgemeinen den ursprünglichen Mafsverhältnissen kantenthümlicher Mafsstrahlen entsprechen oder doch deren Stelle vertreten.

Die Arten der Ableitung bei hauptaxigen Gestalten sind folgende:

1) Durch sämmtliche Scheitelkanten der gegebenen Gestalt werden berührende Ebenen gelegt, deren jede, wenn diese Scheitelkanten ungleichendige 2seitige Kanten sind, wie hier vorausgesetzt wird, gegen beide betreffende Kantenflächen gleich geneigt ist. Sind die Scheitelkanten der gegebenen Gestalt gleichwerthig, so umschliefst die Gesammtheit der Berührungsebenen eine neue einfache Gestalt, sie ist die gesuchte abgeleitete; sind aber die Scheitelkanten der gegebenen Gestalt nicht von einerlei Werth, so ist die neue Gestalt eine zusammengesetzte (Hülfsgestalt), aus welcher durch Zerlegung in die einfachen Gestalten, aus denen sie eine Combination ist, diese einfachen Gestalten, welche die abgeleiteten gesuchten Gestalten sind, gefunden werden.

2) Die zweite Art der Ableitung findet an Rhomboedern ohne weitere Vorbereitung, an andern Pyramiden aber erst dann statt, wenn jede ihrer Flächen über die Randkanten hinaus verlängert und zu einem Parallelogramme umgewandelt ist, für welches diese Randkante als eine der 2 Diagonalen auftritt. Die Ableitung selbst besteht nun darin, dafs die Hauptaxe a der

gegebenen Gestalt über beide Enden hinaus um beliebige, jedoch gleiche Stücke verlängert wird, so daſs die verlängerte Axe ein rationales Vielfaches von a nach einer ganzen oder gebrochenen positiven Zahl m ist, welche gröſser als 1 und bei Ableitungen aus der gleichschenkligen vierseitigen Pyramide auch $> 1 + \sqrt{2}$ seyn soll.

Von dem so bestimmten neuen Ende eines jeden der beiden Hauptstrahlen werden Linien gezogen nach den sämmtlichen nicht in die Hauptaxe fallenden Winkelpuncten derjenigen (parallelogrammatischen) Flächen, die dem fraglichen Hauptstrahle angehören, und durch je 2 solche Linien wird eine Ebene gelegt. Die von den neuen Ebenen umschlossene Gestalt ist entweder eine einfache abgeleitete oder eine zusammengesetzte (Hülfs-) Gestalt, welche in die zwei einfachen, aus denen sie besteht, zerlegt[1] werden muſs.

3) Bei dem dritten Verfahren werden durch die Scheitelkanten einer gegebenen Gestalt, die auch eine der unter 1 oder 2 erhaltenen Hülfsgestalten seyn kann, Ebenen in solcher Anzahl und Neigung gelegt, daſs die neuen oberen und unteren Flächen, indem sie sich schneiden, horizontale Mittel- oder Randkanten bilden, welche eine ebene Figur umschlieſsen, die der horizontalen Projection einer gegebenen Gestalt ähnlich und parallel ist.

Bei den tessularischen Gestalten dient ein mit den übrigen drei Ableitungsarten nicht im Zusammenhange stehendes viertes Verfahren, welches darauf hinausläuft, die 7 verschiedenen Arten einfacher Gestalten mit 8strahligem Axensysteme im Allgemeinen zu entwickeln durch die Betrachtung der 7 verschiedenen möglichen Hauptarten der Stellung irgend einer Ebene in Beziehung zu einem Würfel, wenn sie durch einen Eckpunct dieses Körpers als festen Punct gelegt ist und dann auf alle mögliche Weise bewegt wird, ohne daſs sie den Würfel je durchschneidet.

Man sieht leicht ein, daſs die 2 ersten Mohsischen Ableitungsarten, gleich den Hauyschen Ableitungsmethoden, Gestal-

1 Die Zerlegung einer zusammengesetzten Gestalt nach Mohs ist, übereinstimmend mit der von uns gebrauchten, nichts anderes, als die Verlängerung der Flächen einer Art und Abstraction von dem Daseyn der übrigen Flächenarten.

ten erzeugen, welche die gegebene Gestalt umschliefsen, nur sind die durch Abnahme, welche von einem Winkel ausgeht (wohin auch die mittleren Abnahmen gehören), bewirkten Hauyschen Ableitungen aus der Urgestalt ersetzt durch solche, welche als durch Abnahmen, die von Kanten secundärer Gestalten ausgehen, bewirkte angesehen werden können, ein Verfahren, welches Hauy selbst öfters angewandt hat. Die Ableitungszahl m ist nämlich zwar nicht geradezu gleichbedeutend mit der das Hauysche Abnahmegesetz bestimmenden Anzahl subtrahirter Reihen, aber doch auf gewisse Weise ein Analogon derselben, denn sie ist, gleich jener, blofs Stellvertreter der Angabe einer 2ten, der zu bestimmenden Fläche eignen, bereits früher bestimmten kantenthümlichen Richtung. Bei der 3ten Ableitungsart findet ein Bestimmen der Lage jeder neuen Fläche durch zwei in ihr liegende, bereits bekannte, ältere Kanten der Krystallreihe unmittelbar statt. Da bei der ersten Ableitungsart aus einem Rhomboeder oder aus einer gleichschenkligen vierseitigen Pyramide die abgeleitete Gestalt wieder eine mit der gegebenen Gestalt gleichnamige Gestalt mit stumpferem Scheitel wird, so läfst sich aus dieser abgeleiteten auf dieselbe Weise eine neue Gestalt herleiten, die gleichfalls wieder ein Rhomboeder oder eine gleichschenklig vierseitige Pyramide ist u. s. w.; auch läfst sich leicht durch Umkehrung des Verfahrens aus der letzten, so abgeleiteten, die nächst vorhergehende ableiten und dieses umgekehrte 1ste Ableitungsverfahren kann natürlich nicht blofs bis zur Grundgestalt, von der man ausging, sondern noch über diese hinaus, so weit man will, fortgesetzt werden, so dafs aus der Grundgestalt hierdurch eine neue ihr gleichnamige Gestalt mit spitzigerem Scheitel hervorgeht. Die Gesammtheit der auf solche Weise aus der Grundgestalt unmittelbar oder mittelbar ableitbaren Gestalten nennt Mohs die Hauptreihe (von Gestalten der Krystallreihe) und er legt gerade auf dieses Zertheilen der ganzen Krystallreihe in solche und andere Gestaltenreihen einen besonders grofsen Werth[1]. Es ist nämlich, wenn z. B. ein

1 Dieser grofse Werth würde für die Krystallkunde wirklich darin zu suchen seyn, wenn nicht in der Regel die Natur nur sehr wenige solche Glieder einer derartigen Gestaltenreihe hervorbrächte, so dafs man oft kaum 3 oder 4 (in vielen Fällen nur 1) der Glieder einer derartigen Reihe an den Krystallen einer Substanz kennt, und wenn die Natur nicht gerade durch die Hervorbringung von durch

Glied einer solchen Reihe von Rhomboedern $= (\pm a, \pm R, r)$, so daſs $a:R:r$ das Axenverhältniſs darstellt und $R:r = \sqrt{3}:2$ ist, das nächste stumpfere Glied $= (\pm a, \mp 2R, 2r) = (\pm \frac{1}{2}a, \mp R, r)$. Wenn man daher von der verschiedenen Stellung absieht, so hat für dieselbe Gröſse der Queraxen R und r das spitzigere eine Hauptaxe, die zweifach so groſs ist, als die des stumpferen; bei gleichen Horizontalprojectionen schreiten also die Hauptaxen der Glieder der fraglichen Reihe von Rhomboedern fort, wie die Zahlen 1, 2, 4, 8, 16..., und rückwärts hinaus wie die Zahlen $\pm\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, d. h. wie die Potenzen der Zahl 2:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & & \\ 2^{-\infty}.... & 2^{-n}... & & 2^{-2} & 2^{-1} & 2^{0} & 2^{1} & 2^{2}.... & 2^{n}.... & 2^{\infty}. \end{array}$$

Fängt man bei dem als Grundgestalt dienenden Rhomboeder zu zählen an, so daſs es das Anfangsglied oder das 0te Glied ist, so entspricht dem ersten folgenden (dem + 1sten) Gliede die Axe $2^{+1}.a$, dem 2ten folgenden (oder + 2ten) die Axe $2^{+2}.a$, dem + nten Gliede die Axe $2^{+n}.a$, und ebenso dem ersten vorhergehenden (oder — 1sten) Gliede die Axe $2^{-1}a$, dem 2ten vorhergehenden die Axe $2^{-2}.a$, dem — nten Gliede die Axe $2^{-n}.a$. Die Zahl 2 ist hier die Grundzahl der Reihe.

Auf solche und ähnliche Reihendarstellungen gründet sich dann auch die von Mohs gebrauchte Bezeichnung einfacher Gestalten. So also heiſst R $(= R \pm 0)$ das Anfangsglied oder die Grundgestalt, R + 1 ist das erste folgende d.h. das nächst spizzigere Glied, R — 1 heiſst das erste vorhergehende oder das nach der Grundgestalt folgende stumpfere Glied in der Hauptreihe der aus dem bestimmten R ableitbaren Rhomboeder; R + n ist also

andere Ableitungsmethoden darstellbaren Einschaltungsgliedern in den, durch so wenige Glieder gegebenen, derartigen Reihen zeigte, daſs es ihr mit dieser Reihenbildung doch nicht so recht Ernst sey. Denn angenommen, bei irgend einer Naturerscheinung finde ein Fortschreiten nach den Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 8 statt und der Kreis der Beobachtung sey hierdurch erschöpft, so wird es nicht leicht Jemanden in den Sinn kommen, als das Hauptgesetz dieses Fortschreitens die geometrische Reihe 1, 2, 4, 8 zu bezeichnen und die übrigen Glieder als Einschaltungen (die vielleicht andern Reihen angehören) anzusehen, da man eben so gut auch sagen kann, es sey das Fortschreiten bezeichnet durch die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4..., in welcher bloſs einige Glieder zufällig fehlen.

der Ausdruck für irgend ein Glied dieser Hauptreihe. Für einen geraden Werth von n ist $R + n = (\pm 2^n . a, \pm R, r)$, für einen ungeraden aber $= (\pm 2^n . a, \mp R, r)$. Als Grenzen der Hauptreihe erscheinen $R + \infty$ als die Säule $(\pm \infty a, \pm R, r)$ und $R - \infty$ als die Tafel $(\pm a, \pm \infty R, \infty r)$.

Aus jedem 6flächigen Kronrandner $R + n$ der Hauptreihe läfst sich nach der 2ten Ableitungsart, gemäfs der Ableitungszahl m, ein 2×6flächiger Kronrandner (eine ungleichschenklig 6seitige Pyramide nach Mohs) herleiten, dessen Randkanten mit denen von $R + n$ zusammenfallen, während seine Axe mmal so grofs ist, als die Axe dieser Gestalt, d. h. mmal so grofs als $2^{+n} . a$. Er erhält statt des Buchstabens R den Buchstaben P (Pyramide), dem die Zahl n, wie vorher dem R, angefügt wird, während die Zahl m in Form eines Exponenten beigesetzt ist, so dafs das Zeichen der neuen Gestalt $= (P + n)^m$ wird. Ist n gerade, so wird

$$(P + n)^m = \left(\pm 2^n . ma, \pm \frac{4m}{3m+1} R, r\right),$$

ist n ungerade, so hat man

$$(P + n)^m = \left(\pm 2^n . ma, \mp \frac{4m}{3m+1} R, r\right),$$

so dafs für einerlei m die verschiedenen 2×6flächigen Kronrandner einerlei Mittelquerschnitt haben, der das diagonale Verhältnifs $\left(\frac{4m}{3m+1} R : r\right)$ besitzt, während ihre Hauptaxen abhängen von 2^n und also fortschreiten nach Potenzen der Zahl 2. Die von einerlei m abhängigen 2×6flächigen Kronrandner $(P + n)^m$ bilden daher wieder eine Reihe, deren Glieder durch die Ordnungszahl n vorzüglich charakterisirt werden.

Auf ähnliche Art verhält es sich mit den 8flächigen und den 2×8flächigen Ebenrandnern, nur dafs hier die Grundzahl der Reihe nicht 2, sondern $\sqrt{2}$ oder $2^{\frac{1}{2}}$ ist. Das Fortschreiten der Hauptaxen hat also hier statt nach der Reihe

$$2^{-\frac{n}{2}} \ldots (2^{\frac{1}{2}})^{-2}, (2^{\frac{1}{2}})^{-1}, (2^{\frac{1}{2}})^{0}, (2^{\frac{1}{2}})^{1}, (2^{\frac{1}{2}})^{2}, (2^{\frac{1}{2}})^{3} \ldots . 2^{+\frac{n}{2}}.$$

Wenn demnach $P = (a, R, r)$ gesetzt wird, so dafs $R : r = 1 : \sqrt{2}$ und n eine gerade Zahl bedeutet, so ist $P + n = (2^{+\frac{n}{2}} . a, R, r)$; ist aber n eine ungerade Zahl, so wird

$P+n=(2^{\frac{n+1}{2}}.a, 2R, r)$. Setzt man in beiden Fällen statt R und r ihre Werthe, so ist das Axenverhältniſs für ein gerades $n = 2^{\frac{n}{2}}.a:1:\sqrt{2}$ und für ein ungerades $n = 2^{\frac{n+1}{2}}.a:2:\sqrt{2}$ $= 2^{\frac{n}{2}}.a:\sqrt{2}:1$. Ebenso ist dann auch für ein gerades n

$$(P+n)^m = (2^{\frac{n}{2}}.ma, \frac{2m}{m+1}R, r)$$

und für ein ungerades n

$$(P+n)^m = (2^{\frac{n+1}{2}}.ma, 2R, \frac{2m}{m+1}r),$$

also das Axenverhältniſs im ersten Falle

$$= 2^{\frac{n}{2}}.ma : \frac{2m}{m+1} : \sqrt{2}$$

und im zweiten Falle

$$= 2^{\frac{n+1}{2}}.ma:2:\frac{2m}{m+1}\sqrt{2} = 2^{\frac{n}{2}}.ma : \sqrt{2} : \frac{2m}{m+1}.$$

Diese Beispiele mögen hinreichen, um eine Vorstellung von der Art der Anwendung der höchst sinnreichen Mohsischen Ableitungsmethoden zu geben. Sie haben das Gute, bei jeder bestimmten Fläche auf einige der wichtigsten Zonen, denen sie angehört, unmittelbar oder mittelbar aufmerksam zu machen, rein mathematisch zu seyn und nicht, gleich den Hauyschen, abzuhängen von einer die Entstehung der verschiedenen Krystallformen erklären wollenden Hypothese. Betrachtet man sie als bloſse Angaben, in welchen Zonen eine Fläche liege, so ist ihnen die Angabe der Lage des Trägerendes der fraglichen Fläche in irgend einer Zeigerfläche der Krystallreihe vorzuziehen, weil die Zeigerfläche gestattet, jede beliebige Zone, zu der eine Fläche gehört, unmittelbar zu beachten, ohne sich bloſs auf irgend ein Paar bestimmte Zonen zu beschränken.

Als Hülfsmittel aber zur Darstellung des Fortschreitens der Axen nach geometrischen Reihen möchten sie durch keine andern Ableitungsmethoden zu ersetzen seyn. Die Bezeichnung, welche gewissermaſsen bloſs ein symbolischer Ausdruck für die Ableitung selbst ist, hat eben deswegen, in Vergleichung mit andern Bezeichnungsarten, den Fehler, daſs einer und derselben bestimmten einfachen Gestalt nicht ausschlieſslich ein und dasselbe bestimmte Zeichen entspricht, indem verschiedene Ablei-

tungen verschiedene Zeichen fordern, ungeachtet die Grundgestalt eine und dieselbe ist; ein Fehler, dem durch die willkürliche Beschränkung des Werthes von m nur zum Theil abgeholfen wird. Das Durcheinanderwerfen der Gestalten erster und 2ter Stellung (was zunächst dadurch veranlafst worden seyn mag, dafs jede sogenannte einzelne Reihe aufserdem gar zu wenige Glieder erhalten haben würde) führt unter andern auch den Nachtheil herbei, dafs, wenn z. B. bei den 1- und 2mafsigen Pyramiden $P+n = P+\infty$ wird, erst wieder durch besondere Hülfszeichen [] der Unterschied zwischen der 4flächigen Säule $P+\infty$ erster Stellung von jener $[P+\infty]$ zweiter Stellung angedeutet werden mufs.

Die verschiedenen Arten der Hemiedrie erfordern bei dieser Bezeichnungsart ohnehin nicht blofs + oder — Zeichen (deren Anwendung eine beschränkte und noch nicht auf die vollständige Erkennung des ihr zum Grunde liegenden, die Gegensätze in den Stellungsordnungen [Permutationen] der betreffenden Theile angehenden, Gesetzes gegründet ist), sondern aufserdem noch Anwendung der Buchstaben r und l, welche die Worte rechts und links bedeuten, und öfters noch eine besondere Andeutung der Worte oben und unten, was durch Ausdrücke wie $\frac{r}{r}$, $\frac{l}{l}$, $\frac{r}{l}$, $\frac{l}{r}$ bewerkstelligt wird, von denen eins der beiden ersteren dem mit einem Divisor 2 versehenen Zeichen vorgesetzt wird, wenn die hemiedrische Gestalt eine ebenbildlich gleichendige ist, während die beiden letzteren gebraucht werden für gegenbildlich gleichendige solche Gestalten. Für tetartoedrische Gestalten dient der Divisor 4 u. s. w. Da das 4te Ableitungsverfahren kein wahres Ableitungsverfahren im Sinne der 3 übrigen ist, so sind also auch keine wahren, durch die Methode bedingten Mohsischen Zeichen für die 4axigen Gestalten vorhanden, vielmehr dienen hier die Anfangsbuchstaben der Namen der einfachen Gestalten Hexaeder, Oktaeder u. s. w. oder da, wo diese nicht zureichen, die Buchstaben A, B, C nebst Zahlen, welche da, wo es nöthig ist, angeben, die wievielste der bekannten Varietäten einer solchen Gestalt die fragliche sey, wenn diese Varietäten in der Ordnung aufgeführt werden, in welcher sie in dem Werke von Mohs auf einander folgen.

Die Wichtigkeit der Mohsischen Arbeiten und die Verbreitung, welche seiner Methode in Deutschland und England be-

reits zu Theil geworden ist, macht es nothwendig, für die allgemeinsten Arten der Mohsischen Bezeichnung eine Uebersetzung in die Bezeichnung durch die 3 wichtigsten kantenthümlichen Axenarten mitzutheilen.

Prismatische Gestalten 1- und 1mafsige Gestalten

Wenn $P = (a, R, r)$ und $R > r$, so ist:

$$P + n = (2^n.a,\ R,\ r)$$

$$(\bar{P} + n)^m = (2^n.ma,\ mR,\ r)$$

$$(\overset{\circ}{P} + n)^m = (2^n.ma,\ R,\ mr)$$

$$(\bar{P}r + n)^m = \left(\frac{m+1}{2}.2^n.a,\ \frac{m+1}{m-1}R,\ r\right)$$

$$(\overset{\circ}{P}r + n)^m = \left(\frac{m+1}{2}.2^n.a,\ R,\ \frac{m+1}{m-1}r\right)$$

$$\frac{m+1}{2}.P + n = \left(\frac{m+1}{2}.2^n.a,\ R,\ r\right)$$

$$\frac{m+1}{2}.\bar{P}r + n = \left(\frac{m+1}{2}.2^n.a,\ \infty R,\ r\right)$$

$$\frac{m+1}{2}.\overset{\circ}{P}r + n = \left(\frac{m+1}{2}.2^n.a,\ R,\ \infty r\right)$$

wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist, die auch $= 0$ und auch $= +\infty$ und $= -\infty$ werden kann, m aber eine ganze oder gebrochene positive rationale Zahl, die auch $= 1$ werden kann.

Dafs diese Art der Uebersetzung auch von den Zeichen hemiprismatischer Gestalten selbst dann gelte, wenn die Mohsische Grundgestalt eine ungleichschenklige vierseitige Pyramide ist, an welcher nicht alle 3 Eckenaxen auf einander senkrecht sind, bedarf wohl nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Wenn z. B. der Theil der Mohsischen Grundgestalt einer tetartoprismatischen Krystallreihe, welchen er mit $+ r\frac{P}{4}$ oder $r\frac{P}{4}$ bezeichnet, $= (\pm a,\ \pm R,\ \pm r)$ und $+ l\frac{P}{4} = (\pm a,\ \mp R,\ \pm r)$ ist, so ist auch $- r\,\frac{(\bar{P}r)^3}{4} = (\pm 2a,\ \pm R,\ \bar{r})$ und $r\,\frac{(\overset{\circ}{P}r + \infty)^3}{2} = (\pm\infty a,\ \pm R,\ \pm 2r)$ und $l\,\frac{(\overset{\circ}{P}r + \infty)^3}{2} = (\pm\infty a,\ \mp R,\ \pm 2r)$ und so weiter.

Wenn $P = (a, R, r)$ und $R : r = 1 : \sqrt{2}$ und n eine gerade, N aber eine ungerade Zahl bedeutet, so ist:

$$P + n = (2^{\frac{n}{2}} . a, R, r)$$
$$P + \infty = (\infty a, R, r)$$
$$P + N = (2^{\frac{N+1}{2}} . a, 2R, r)$$
$$[P + \infty] = (\infty a, 2R, r)$$
$$(P + n)^m = (2^{\frac{n}{2}} . ma, \frac{2m}{m+1} R, r)$$
$$(P + \infty)^m = (\infty a, \frac{2m}{m+1} R, r)$$
$$(P + N)^m = (2^{\frac{N+1}{2}} . ma, 2R, \frac{2m}{m+1} r)$$
$$[P + \infty]^m = (\infty a, R, \frac{m}{m+1} r)$$
$$\frac{m+1}{2} . P + n = \left(\frac{m+1}{2} 2^{\frac{n}{2}} . a, R, r\right)$$
$$\frac{m+1}{2} . P + N = \left(\frac{m+1}{2} 2^{\frac{N+1}{2}} . a, 2R, r\right).$$

So werden z. B. für den abgebildeten Zinnerzkrystall die einander entsprechenden Bezeichnungen (neben einander gestellt in einer Tabelle, in welcher die erste Columne den Buchstaben der Fläche auf der Abbildung, die 2te die Bezeichnung nach Mohs und die 3te die Bezeichnung durch die drei wichtigsten kantenthümlichen Axenarten a, R, r, deren Maſszählerverhältnisse sie enthält, angiebt) auf folgende Weise sich darstellen: Fig. 239.

	Mohs	a	R	r
P	P	1	1	1
s	P + 1	1	1	$\frac{1}{2}$
z	$(P)^5$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
r	$(P + \infty)^5$	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
g	[P + ∞]	∞	2	1

Für den Scheelerzkrystall, wenn die erste Zelle $= (\overset{a}{+} R + r)$ ist, hätte man ebenso folgende Uebersetzung: Fig. 242.

	Mohs	a, R, r	oder wenn man bei g und P die Vorzeichen vernachlässigt
g	P	$1 \pm 1 \pm 1$	$1 \quad 1 \quad 1$
a	$\frac{r}{1}\frac{(P-2)^3}{2}$	$1 \pm 1 \pm \frac{2}{3}$	$1 \pm 1 \pm \frac{2}{3}$
P	$P+1$	$1 \pm 1 \pm \frac{1}{2}$	$1 \quad 1 \quad \frac{1}{2}$
b	$\frac{1}{r}\frac{(P+1)^3}{2}$	$1 \pm \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}$	$1 \pm \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}$

Rhomboedrische Gestalten 1- und 3mafsige Gestalten

Wenn $R = (\pm a, \pm R, r)$ und $R : r = \sqrt{3} : 2$, n eine gerade und N eine ungerade Zahl ist:

$$R + n = (\pm 2^n . a, \pm R, r)$$
$$(R + N) = (\pm 2^N . a, \mp R, r)$$
$$R + \infty = (\infty a, \pm R, r)$$
$$(P + n)^m = (\pm 2^n . m a, \pm \frac{4m}{3m+1} R, r)^1$$
$$(P + N)^m = (\pm 2^N . m a, \mp \frac{4m}{3m+1} R, r)$$
$$(P + \infty)^m = (\infty a, \frac{4m}{3m+1} R, r)$$
$$\frac{3m+1}{4} . R + n = (\pm \frac{3m+1}{4} . 2^n . a, \pm R, r)$$
$$\frac{3m+1}{4} . R + N = (\pm \frac{3m+1}{4} . 2^N . a, \mp R, r)$$
$$P + n = (2^n . a, 2R, \tfrac{3}{2} r)$$
$$P + N = (2^N . a, 2R, \tfrac{3}{2} r)$$
$$P + \infty = (\infty a, 4R, 3r).$$

Wird $\frac{3m+1}{4} R + N = \frac{3 \times \frac{1}{3} + 1}{4} R + N = \frac{1}{2} R + N$ $= (\pm \frac{1}{2} 2^N . a, \mp R, r) = (\pm 2^{N-1} . a, \mp R, r)$ und $N - 1 = n$, so ist $\frac{1}{2} R + N = R + n$ (aber nicht an Stellung) und es wird dann dieser zweite Ausdruck $R + n$ dafür gebraucht, so dafs $R + n \times R + n$ oder $2(R + n) = (2^n . a, R, r)$, und ebenso ist $(P + n)^m \times (P + n)^m = 2(P + n)^m = (2^n . m a, \frac{4m}{3m+1} R, r)$,

1 Der Allgemeinheit wegen wird hier der Werth $m = 1$ nicht ausgeschlossen.

wobei n sowohl ungerade, als auch gerade seyn kann. Dieses ist die Bezeichnungsart der dirhomboedrischen (6gliedrigen) Gestalten.

Als Beispiel, wie bei hemirhomboedrischen Gestalten die Uebersetzung statt findet, möge der abgebildete Krystall von axotomem Eisenerz (Titaneisen aus Gastein) dienen, dessen Gestalt hemirhomboedrisch von parallelen Flächen (1fach 3gliedrig) ist. Fig. 248 A.B.

	Mohs	a, R, r
a	$R - \infty$	$\pm 1 \pm \infty \pm \infty$
R	R	$\pm 1 \pm 1 \pm 1$
b	$\frac{r}{l}\,\frac{P+1}{2}$	$\pm 4 \pm 4 \pm 3$

wenn die erste Zelle $= \begin{pmatrix} + a \\ + R + r \end{pmatrix}$ und $R : r = \sqrt{3} : 2$.

Für die 4axigen Gestalten ist in folgender Tabelle in der Columne M eine Bezeichnung nach Mohs und in der Columne N die Bestimmung der fraglichen Gestalt durch das Zeichen der Gesammtheit der Träger ihrer Flächen, bezogen auf die einfachen Zellen W, R, A, deren erste $= \begin{pmatrix} + W \\ + R + A \end{pmatrix}$ gesetzt ist, mit dem Maſsverhältnisse $W : R : A = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

M	N	M	N	M	N	M	N
H	100	A1	210	$+\frac{O}{2}$	−001	$+\frac{An}{2}$	$\pm 1 \pm y0$
O	001	A2	110	$-\frac{O}{2}$	+001	$-\frac{An}{2}$	$\pm 1 \mp y0$
D	010	A3	120	$+\frac{Bn}{2}$	−01y	$+\frac{Tn}{2\,II}$	$\pm 1 \pm yz$
An	1y0	B1	011	$-\frac{Bn}{2}$	+01y	$-\frac{Tn}{2\,II}$	$\pm 1 \mp yz$
Bn	01y	C1	101	$+\frac{Cn}{2}$	−10y	$+r\frac{Tn}{4}$	−1−yz
Cn	10y	C2	201	$-\frac{Cn}{2}$	+10y	$+l\frac{Tn}{4}$	−1+yz
Tn	1yz	T1	221	$+\frac{Tn}{2\,I}$	−1yz	$-r\frac{Tn}{4}$	+1−yz
		T2	111	$-\frac{Tn}{2\,I}$	+1yz	$-l\frac{Tn}{4}$ [1]	+1+yz
		T3	211				

1 Die Richtigkeit der Uebersetzung dieser vier Ausdrücke hängt ab von dem Begriffe, den man mit den Buchstaben r und l verbindet.

M	N
$r\,\frac{Tn}{2lll}$	$1 + yz$
$l\,\frac{Tn}{2lll}$ [1]	$1 - yz$

Als im Geiste und in der Methode von Mohs wirkend ist vorzüglich sein ausgezeichneter Schüler Hausmann zu nennen[2]. In Hausmann's neuern krystallographischen Arbeiten[3], welche Klarheit, Gründlichkeit und Eigenthümlichkeit mit einander verbinden, tritt besonders hervor:

1) das Streben, die Familien der Krystallreihen vorzüglich herauszuheben. Er stellt sie (als Classen) in folgender Weise auf: a) das isometrische oder gleichaxige System. Grundform: das reguläre Oktaeder. b) Monodimetrisches System. Grundform: ein Quadratoktaeder. c) Trimetrische Systeme[4]. Grundform: ein Rhombenoktaeder. d) Monotrimetrische Systeme. Grundform: ein Bipyramidaldodekaeder. b, c und d werden auch zusammengefafst unter dem gemeinschaftlichen Namen der anisometrischen Systeme.

Es verhält sich nämlich jede Zelle zu einer ihr anliegenden als eine linke (oder rechte), während sie zur andern sich als eine rechte (oder linke) verhält, und die Ausdrücke, links und rechts, sind ohne anderweitige besondere Bestimmung nicht hinreichend, die verschiedenen hier in Betrachtung kommenden Verhältnisse gegenbildlicher Theile vollkommen zweckmäfsig zu bezeichnen.

1 Dieselbe Bemerkung gilt hinsichtlich auf die beiden 24-Fünfeckflächner.

2 Er hat sich Verdienste erworben durch die Besorgung der dem Originale in manchen Stücken vorzuziehenden Uebersetzung des Grundrisses der Mineralogie von Mohs ins Englische, durch genaue krystallographische Untersuchungen über einzelne Mineralien, Diallagon, Apatit, Kupferkies u. s. w. und durch eine kurze, fafsliche Darstellung der wichtigsten Lehren der Mohsischen Methode u. s. w. in seinem classischen Werke: Anfangsgründe der Mineralogie.

3 Untersuchungen über die Formen der leblosen Natur. Handbuch der Mineralogie 2te Ausgabe. Arbeiten über einzelne Gegenstände in verschiedenen Werken zerstreut.

4 1- und 1mafsige Gestalten.

2) Die Anerkennung der Wichtigkeit der Zonen. Hauptzonen und Nebenzonen werden unterschieden. Die Zonenebene einer Hauptzone ist senkrecht entweder auf die verticale (Haupt-) Axe (horizontale Zone), oder auf eine Randecken-Queraxe, oder auf eine Randkante (verticale Zonen), oder auf eine Scheitelkante (transversale Zonen) der Grundgestalt. Die Zonenebene einer der Nebenzonen ist senkrecht auf Randkanten oder Scheitelkanten abgeleiteter Gestalten (verticale oder transversale Nebenzonen).

3) Anerkennung des Gesetzes für die Neigungen der Flächen in einer Zone, so wie des Satzes, daſs jede neue Krystallfläche erst als vollkommen bestimmt zu betrachten sey, wenn ihre Lage in zwei bereits bekannten Zonen nachgewiesen ist.

4) Eine eigenthümliche Bezeichnung der Theile der Grundform durch Buchstaben (welche Bezeichnung auch bei den der Grundform zu substituirenden abgeleiteten Gestalten gebraucht wird), durch welche es möglich ist, jede der Hauptzonen durch 2 Buchstaben[1] auszudrücken und zu bezeichnen.

5) Die Darstellung der Wichtigkeit der Stütze jeder Zone (ein Begriff, welcher seinem Wesen nach mit dem der Stütze der Zeigerlinie einer Zone gleichartig ist). Die Tangente der Neigung jeder Fläche der Zone gegen die Stütze wird ausgedrückt als ein rationales Vielfaches nach ganzen oder gebrochenen Zahlen von der Tangente *einer* solchen Neigung, welche den Namen: primäres Neigungsverhältniſs (Sin.: Cos.) in der fraglichen Zone erhält, während das einer bestimmten Fläche entsprechende Vielfache dieses primären Neigungsverhältnisses das (diese Fläche charakterisirende) secundäre Neigungsverhältniſs heiſst.

6) Die eigenthümliche Art der Bezeichnung der verschiedenen Flächen einer Krystallreihe,

a) der Grenzflächen d. h. der einfachen geraden Abstumpfungsflächen der Ecken und Kanten der Grundform. Der Buchstabe, welcher jene Ecke oder Kante bezeichnet, bezeichnet auch die Abstumpfungsfläche derselben.

b) der secundären Flächen,

1 Sie vertreten gleichsam die Stelle der Angabe von 2 der wichtigsten in der Zeigerlinie der Zone liegenden Trägerenden.

α) in den Hauptzonen, durch das Zeichen der Hauptzone, welchem die Vervielfältigungszahl des primären Neigungsverhältnisses der Zone, die dem der Fläche angehörigen secundären Neigungsverhältnisse entspricht, angehängt wird. So ist z. B. AE2 eine Fläche, deren Träger in der Ebene der zwei auf einander senkrechten Strahlen CA und CE (wenn C der Mittelpunct der Grundform ist) liegt, welche Strahlen sie in dem Verhältnisse 2CE : CA schneidet. Hier ist CA die Stütze und CE : CA das primäre Neigungsverhältniſs der Zone EA.

β) In den Nebenzonen, durch Angabe des Zeichens einer der Grundform substituirten abgeleiteten Gestalt, begleitet von der Angabe des Zeichens der Nebenzone[1] und des Multiplicators des primären Neigungsverhältnisses in dieser Zone; so z. B. des Zeichens (AE2, BD2), worin AE2 die der Grundform substituirte abgeleitete Gestalt bedeutet, während BD2 anzeigt[2], daſs die zu bezeichnende Fläche in der für diese stellvertretende Form als transversale Hauptzone zu betrachtenden Zone liege und dem Doppelten des primären Neigungsverhältnisses entspreche. Im isometrischen Systeme wird jede einfache Gestalt mit dem ersten oder mit dem ersten und zweiten Anfangsbuchstaben des von Hausmann gebrauchten Namens bezeichnet und da, wo es nöthig ist, die Zahl beigefügt, welche andeutet, die wie vielste der aufgeführten Varietäten derselben Art gemeint sey u. s. w.

7) Die zu geringe Beachtung derjenigen Zonen, deren Zonenebene auf 1fach 1gliedrigen kantenthümlichen Axen der (flächenvollzähligen) Grundformen senkrecht sind, deren gehörige Beachtung nur bei ausgedehnter Benutzung der Lehre von der Zeigerfläche leicht ist.

8) Die Idee der Ableitbarkeit aller Krystallreihen aus der isometrischen, auf eine Weise ähnlich der von Breithaupt versuchten, oben bereits angedeuteten, doch ohne eine der Zahl 720 entsprechende bestimmte Ableitungszahl.

1 Die in Beziehung zu dieser abgeleiteten Gestalt ebenso ausgedrückt wird, wie eine Hauptzone in Beziehung zur Grundform.

2 D ist nämlich der Buchstabe der Scheitelkante, CB ein auf den Träger CD der Scheitelkante senkrechter Querstrahl, welcher als Stütze dient.

Naumann[1] sucht das in der Mohsischen Methode liegende Dogma der nach Potenzen fortschreitenden Reihen[2] zu vermeiden und kommt daher zu einer Bezeichnung jeder Fläche durch 3 Coordinatenaxen, welche, wenn man von dem Aufserwesentlichen abstrahirt, mit der von Weiss gegebenen übereinstimmt oder vielmehr sich zu ihr verhält, wie unsere abgekürzte Bezeichnung x | y zu der vollständigen (x a, y R, r), d. h. er läfst aufserwesentliche und auch solche Theile der vollständigen Weifsischen Bezeichnung weg, welche, wenn man nur *eine* Methode der Bezeichnung durchgängig gebraucht, ihrer Beständigkeit wegen sich leicht ergänzen lassen; er fügt aber auch wieder Aufserwesentliches hinzu, nämlich den Anfangsbuchstaben O oder P des Namens seiner Grundgestalt, welche ohnehin bekannt seyn mufs, wenn von irgend einer Ableitung aus ihr die Rede seyn soll.

Wenn 1) bei den 1- und 1mafsigen Gestalten die erste einfache Zelle $= \overset{a}{R} r^3$, 2) bei den 1- und 2mafsigen und bei den 1- und 3mafsigen Gestalten die erste doppelte Zelle $= r^a (R) r = r^a r$ und 3) bei den 4axigen die erste 3fach rechtwinklige Zelle $= a^a a$ gesetzt wird, so dafs die angegebenen Buchstaben zugleich das Mafsverhältnifs der bezüglichen kantenthümlichen Mafsstrahlen bedeuten, und im 1sten Falle P = (a, R, r), im 2ten Falle P = (a, r, r) und im 3ten Falle O (Oktaeder) = (a, a, a) bezeichnet, so ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & m\overset{\circ}{P}n = (ma, R, nr) \\ \text{II.} & m\bar{P}n = (ma, nR, r) \end{array}\right\} \text{wenn } R > r \text{ gesetzt wird}$$

$$\begin{array}{ll} \text{III.} & mPn = (ma, nr, r) \\ \text{IV.} & mOm = (ma, na, a) \end{array}$$

die Naumannische Bezeichnung erläutert, so weit sie sich consequent bleibt, und es ist nur noch zu bemerken, dafs m von

1 Grundrifs der Krystallographie von Naumann (nicht zu verwechseln mit Neumann). Lehrbuch der Mineralogie (mit einem schönen Atlas von 26 Tafeln). Ueber die Dimensionen der Grundgestalten in Oken's Isis X. S. 1086. Einzelne Arbeiten.

2 Die erste Heraushebung solcher Reihen rührt von Malus her. Vergleiche Théorie de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées par E. L. Malus. 1810. p. 122.

3 Wobei nicht blofs 3fach rechtwinklige Zellen gemeint sind.

o bis ∞ und n von 1 bis ∞ jeden rationalen Werth haben kann und daſs die Zeichen + und — und r und l auf ähnliche Weise angewendet werden, wie bei Mohs in Verbindung mit Divisoren 2 oder 4, um flächenhalbzählige oder flächenviertelszählige einfache Gestalten zu bezeichnen. Als Abweichung von der Consequenz, die durch die Wichtigkeit der 3gliedrigen Gestalten entschuldigt wird, ist es anzusehen, daſs bei III. statt + mP oder — mP gesetzt wird + mR oder — mR, um die verschiedenen Rhomboeder zu bezeichnen, ohne daſs dadurch die Bedeutung des Zeichens sich ändert. Als beträchtlichere Abweichung aber ist es zu betrachten, wenn Naumann in seinem Lehrbuche der Mineralogie die zweite Mohsische Ableitungsart auf sein mR anwendet und den 2×6flächigen Kronrandner, welcher mit mR gleichen Rand, aber eine nmal so groſse Hauptaxe hat, durch mR^n bezeichnet, wo n die Bedeutung der von Mohs gebrauchten Ableitungszahl m erhält, mithin

$$+ mR^n = (\pm m.n.a, \pm \frac{4n}{3n+1} R, r)$$

und $$- mR^n = (\pm m.n.a, \mp \frac{4n}{3n+1} R, r)$$

a

ist, wenn R r die einfache Zelle bedeutet, in welcher R ‖ r = 30° und a : R : r = a : $\sqrt{3}$: 2 ist.

Die Eintheilung der 1- und 1maſsigen Gestalten nach der Beschaffenheit der bei der Bezeichnung zum Grunde liegenden Zellen in orthometrisch-monoklinometrische, diklinometrisch-triklinoedrische, triklinometrisch-diklinoedrische und triklinometrisch-triklinoedrische, welche von Naumann besonders hervorgehoben wird, ist oben bereits beurtheilt worden. Auch sucht Naumann bei seinen Grundgestalten [1], welche Rhombenoktaeder (2×4flächige Ebenrandner) sind, nachzuweisen, daſs R = a + r oder = ½a + r oder = a + ½r sey, wenn a:R:r das Verhältniſs der drei 2gliedrigen Axen bedeutet.

Bernhardi [2] hat sich besonders in neuerer Zeit Verdienste

1 Die mit den von Mohs angenommenen in der Regel übereinstimmen.

2 Beiträge zur nähern Kenntniſs der regelmäſsigen Krystallformen. Auch muſs hier erwähnt werden dessen: Neue Methode, Krystalle zu beschreiben, in Gehler's J. f. Ch. u. Ph. 1808, und: Ueber krystallographische Bezeichnungsmethoden, in Schweigger's J. f. Ch. 1823.

erworben durch Untersuchungen über die 4axigen Gestalten. Auch in seinen Arbeiten liegt das Bestreben, die gerengesetzliche Ableitbarkeit aller Krystallgestalten aus den hauptaxenlosen 3gliedrig 4axigen wahrscheinlich zu machen. Er ist ferner bemüht, eine Art von Abhängigkeit nachzuweisen zwischen den Krystallformen chemischer Verbindungen und denen der verbundenen Urstoffe.

Breithaupt's eigenthümliche Ansichten sind oben bereits erwähnt. Er bedient sich theils der Weifsischen, theils der Naumannischen Zeichensprache. Genauere Bestimmungen der ursprünglichen Mafse bei den Krystallreihen sehr vieler Substanzen hat ihm die Wissenschaft zu danken.

Raumer [1] hat sich vorzüglich bemüht, die ersten Elemente der Krystallkunde auch solchen zugängig zu machen, die vorher noch nicht sich mit mathematischen Studien beschäftigt haben. Er behandelt eine nicht geringe Menge einzelner Lehren auf eine sehr fafsliche zweckmäfsige Weise.

Es bleibt nunmehr noch zu bemerken, dafs die wissenschaftliche Krystallkunde bereits sich in allen bessern neueren und neuesten Werken über Mineralogie und zum Theil auch über Chemie und Physik ihren Platz errungen hat und dafs diese mitunter reich sind an einzelnen, in das Gebiet der Krystallkunde einschlagenden, eignen oder fleifsig zusammengetragenen fremden Beobachtungen, mitunter auch durch eigenthümliche Art des Vortrags der in ihnen enthaltenen krystallographischen Lehre u. s. w. sich auszeichnen.

In dieser Beziehung mögen hier noch erwähnt werden die Namen v. Leonhard [2], Hartmann [3], Phillips [4], Beudant [5] und L. Gmelin [6].

1 Versuch eines Abc-Buchs der Krystallkunde.

2 Handbuch der Oryktognosie.

3 Die Mineralogie in sechs und zwanzig Vorlesungen.

4 Elementary introduction to mineralogy. 3te Ausgabe. (Vorzüglich reich an vielen neuen Beobachtungen und Winkelmessungen, die jedoch zum Theil nicht den erforderlichen Grad von Genauigkeit zu haben scheinen.)

5 Traité élémentaire de minéralogie.

6 Handbuch der theoretischen Chemie. 3te Auflage.

Es würde zu sehr ins Einzelne führen, hier die in den bekannten naturwissenschaftlichen Zeitschriften, Wörterbüchern[1] u. s. w., in den Schriften gelehrter Gesellschaften u. s. w. zerstreuten einzelnen krystallographischen Arbeiten der bereits aufgeführten Naturforscher sowohl, als auch der nicht namentlich erwähnten aufzuzählen. Die allgemeine Verweisung auf solche Schriftensammlungen möge daher hier genügen[2].

Hessel.

Krystallogenie.

Crystallogenia; **Krystallbildung; die Lehre von dem Entstehen der Krystalle nach allen seinen Beziehungen.**

Wahrscheinlich sind alle einfachen Stoffe und ihre proportionirten chemischen Verbindungen unter einander fähig, unter den gehörigen Umständen Krystallgestalt anzunehmen. Dafs man mehrere einfache und zusammengesetzte Stoffe noch nicht im krystallischen Zustande kennt, rührt theils davon her, dafs einige überhaupt nicht im festen Zustande bekannt sind, wie Sauerstoff u. s. w., theils daher, dafs es bei manchen schwierig ist, die zur Krystallisation nöthigen Bedingungen gehörig zu erfüllen.

Die *Bedingungen der Krystallbildung* sind:

1) Der Körper mufs sich zuerst in dem tropfbar oder elastisch flüssigen Zustande befinden, wahrscheinlich damit die Vertheiltheit und Beweglichkeit der einzelnen Theile ihre Vereinigung nach bestimmten geometrischen Gesetzen zulassen. Fälle, wo blofse feine Pulverisirung eines festen Körpers die Krystallbildung bewirkt habe, sind bis jetzt zweifelhaft. Ein fester Körper kann auf doppelte Weise flüssig werden.

a) Durch Vereinigung mit Wärme, also entweder durch Schmelzung oder durch Dampfbildung. So krystallisiren Schwe-

1 So z. B. im Dictionnaire des sciences naturelles der Artikel cristallisation von Brochant de Villiers.

2 Ausführlichere literarische und geschichtliche Nachweisungen enthält die im Jahre 1825 erschienene Geschichte der Krystallkunde von Marx.

fel, Iod, Campher und Benzoesäure sowohl nach dem Schmelzen, als auch nach dem Verdampfen; viele Metalle nach dem Schmelzen, Salmiak nach dem Verdampfen.

b) Durch Vereinigung mit einem wägbaren Stoffe entweder bei gewöhnlicher oder bei höherer Temperatur, wofern die hieraus entspringende Verbindung tropfbar oder elastisch flüssig ist. Hierher gehört die Auflösung vieler Salze und anderer Materien in Wasser, die Auflösung von Schwefel in Schwefelkohlenstoff, von schwefelsaurem Baryt in Vitriolöl, von Salzen, Chlormetallen, Benzoesäure, Campher und Harzen in Weingeist und die Auflösung von Iod in Wasserstoff zu hydriodsaurem Gas.

2) Man hat hierauf solche Umstände eintreten zu lassen, welche den Körper veranlassen, wieder in den starren Zustand zurückzutreten.

a) War Wärme die einzige flüssig machende Ursache oder trug sie wenigstens dazu bei, den Körper in gröſserer Menge in einer wägbaren Flüssigkeit löslich zu machen, so hat man Erkältung anzuwenden. Läſst man demnach geschmolzenen Schwefel, geschmolzenes Wismuth u. s. w. erkalten, so gehen sie in den festen krystallischen Zustand über. Um hierbei deutliche Krystalle zu erhalten, läſst man nur die Hälfte des Geschmolzenen erstarren, durchstöſst die Krystallrinde und gieſst den noch flüssigen Theil ab, welcher sonst mit den früher erzeugten Krystallen ein Ganzes bilden würde, in dem die einzelnen Krystalle nicht wohl zu unterscheiden wären. Eben so wird bei der Sublimation des Schwefels, Iodes, Salmiaks u. s. f. der Dampf, dieser Körper in einem Theile des Apparats so weit abgekühlt, daſs er zu mehr oder weniger deutlichen Krystallen erstarrt. Desgleichen setzt eine in der Wärme bereitete Lösung verschiedener Salze in Wasser, der Benzoesäure, des Camphers u. s. w. in Weingeist, beim Erkalten den Theil dieser Körper im krystallischen Zustande ab, den dieselbe bei der erniedrigten Temperatur nicht mehr aufgelöst erhalten kann.

Uebrigens zeigt sich beim Krystallisirenlassen von tropfbaren Flüssigkeiten durch Erkältung die Anomalie, daſs diese in der Ruhe und in verschlossenen Gefäſsen oft weit unter die Temperatur gebracht werden können, bei der sie unter andern Umständen Krystalle liefern, ohne ihren flüssigen Zustand zu verlieren. Bekanntlich gefriert das Wasser in offenen Gefäſsen dicht unter 0° zu einer krystallischen Masse; dagegen kann es

in verschlossenen Flaschen oder in Thermometerkugeln einige Grade unter 0, selbst bis zu — 6° abgekühlt werden, ohne zu gefrieren, und erst beim Erschüttern oder Oeffnen des Gefäfses oder Hineinwerfen von einem Stück Eis tritt eine sich schnell ausbreitende Krystallisation ein, mit welcher die Temperatur des Wassers auf 0° steigt. Die höchst concentrirte Essigsäure, der Eisessig, gesteht in offenen Gefäfsen etwas unter + 13° C., in verschlossenen kann man denselben auf — 12° erkälten, ohne dafs er gesteht; öffnet man jedoch das Gefäfs und schüttelt, so erfolgt, selbst wenn die von Aufsen eindringende Luft wärmer ist, als der Eisessig, eine Krystallisation, die von oben anfängt und sich schnell durch die ganze Masse fortsetzt. Anisöl läfst sich in verschlossenen Gefäfsen in der Ruhe oft einige Grade unter seinen Gefrierpunct erkälten, ohne zu gestehen, was jedoch beim Schütteln augenblicklich eintritt. Der Braunkohlencampher oder Scheererit, welcher bei 45° schmilzt, gesteht oft erst nach mehrtägigem Erkalten beim Hineintauchen eines Platindrahtes oder Glasstabes. Auf dieselbe Weise verhalten sich die Auflösungen vieler Salze in warmem Wasser; am auffallendsten zeigt sich diese Erscheinung bei schwefelsaurem und essigsaurem Natron, minder stark bei kohlensaurem, phosphorsaurem und boraxsaurem Natron, bei salzsaurem Kalk, bei der schwefelsauren Bittererde, bei salpetersaurem Kupferoxyd und bei Bleizucker, welche Salze sämmtlich beim Krystallisiren Krystallwasser aufnehmen. Dagegen krystallisiren Salmiak, schwefelsaures und salpetersaures Kali, Kochsalz, Baryt, Strontian, Alaun, Bleisalpeter, Eisenvitriol, Kupfervitriol, Kleesäure und überhaupt die meisten Salze auch in verschlossenen Gefäfsen aus einer in der Hitze stark gesättigten Lösung beim Erkalten sogleich heraus und nur wenn die warme Lösung nicht viel mehr Salz enthält, als auch in der Kälte gelöst bleiben würde, so schiefst dieser kleine Ueberschufs beim Erkalten in verschlossenen Gefäfsen nicht an, aufser beim Bewegen oder Hineinbringen eines Salzkrystalls.

Die mannigfachsten Versuche sind mit dem schwefelsauren Natron angestellt worden. Eine aus gleichviel Wasser und krystallisirtem Glaubersalz bereitete heifse Auflösung krystallisirt nicht bei langsamem oder bei durch Eintauchen in kaltes Wasser bewirktem raschen Erkalten, wenn sie sich in einer ausgekochten Barometerröhre oder in einem luftleeren, wohl verschlossenen

Gefäſse oder in einem offenen Gefäſse mit einer Lage Terpentinöl überschüttet oder in einem lufthaltenden, wohl verschlossenen oder auch nur mit einem losen Deckel versehenen Gefäſse oder in einem offenen Gefäſse unter einer lufthaltigen, mit Wasser gesperrten Glocke oder in ruhig stehenden offenen Flaschen oder in einem Gläschen befindet, welches in einer verstopften Flasche eingeschlossen ist, welche Luft und, um sie auszutrocknen, etwas Potasche enthält, wo Glaubersalz auswittert und nicht einmal beim Herabspülen Krystallisation veranlaſst. Die Krystallisation einer also erkalteten Auflösung wird augenblicklich oder nach kurzer Zeit bewirkt 1) durch Bewegung, wenn nämlich die Auflösung in einem offenen Gefäſse erkaltet war; 2) durch Zutritt der freien Luft, mittelst Oeffnens der Gefäſse, wo die Krystallisation um so schneller eintritt, je weiter die Oeffnung ist, und wobei immer auch etwas Bewegung nöthig zu seyn scheint. Die Krystallisation fängt hier von oben an, da wo Auflösung, Gefäſs und Luft mit einander in Berührung treten, und nur dann ein wenig unter der Oberfläche, wenn ein Stäubchen beim Oeffnen hineinfiel. Bei einer im luftleeren Raume erkalteten Auflösung reicht auch schon ein Bläschen Luft, Wasserstoffgas, kohlensaures Gas oder Salpetergas hin, die Krystallisation zu bewirken. 3) Durch Berührung der Auflösung mit einem festen Körper, wie Glasstab, Feuerstein, Eisendraht, Glaubersalzkrystall, oder in der Luft schwimmenden Stäubchen. Diese Körper bewirken nicht die Krystallisation, wenn sie mit der heiſsen Auflösung erkalteten, desgleichen nicht (mit Ausnahme des Glaubersalzkrystalls), wenn sie naſs oder erwärmt in die Auflösung gebracht werden. Die Krystallisation geht hier vom fremdartigen Körper aus. Wenn die Lösung von 51 krystallisirtem Glaubersalz in 49 warmem Wasser bis unter 10° C. abgekühlt und durch eines der genannten Mittel zum plötzlichen Krystallisiren gebracht wird, so schieſsen beinahe $\frac{2}{3}$ des Glaubersalzes an und hiermit erfolgt eine Temperaturerhöhung von 13° C. Diese leitet Thomson von dem Uebergange flüssigen Wassers in festes Krystallwasser ab, womit die Berechnung ziemlich übereinstimmt.

Die Angabe von Thénard, daſs nach dieser Krystallisation eine Mutterlauge bleibe, die nicht mehr bei der gegebenen Temperatur mit Salz gesättigt sey, scheint auf einem Irrthume zu beruhen; im Gegentheil fand Thomson, daſs die übrige Flüssig-

keit, weil ihre Temperatur gestiegen ist, eine entsprechende Menge Glaubersalz gelöst behält, von welchem noch ein grofser Theil beim Erkalten auf dem vorigen Puncte von 10° anschiefst. Ist die Glaubersalzauflösung zu gesättigt, so schiefst schon während des langsamen Erkaltens ein geringer Theil in sehr harten durchsichtigen Krystallen an, die nicht, wie das gewöhnliche Glaubersalz, 10, sondern nur 8 Mischungsgewichte Krystallwasser enthalten und die, wenn man die übrige Auflösung durch die angeführten Mittel zum Krystallisiren bringt, in demselben Augenblicke weifs und undurchsichtig werden und so bleiben. Löst man 24 krystallisirtes kohlensaures Natron in 100 warmem Wasser und kühlt die Lösung unter 10° C. ab, so erfolgt beim Oeffnen und Schütteln des Gefäfses sogleich Krystallisation und die Temperatur steigt um 8° C. Eine stark abgedampfte Auflösung von essigsaurem Natron krystallisirt oft längere Zeit nicht bei 10° C.; beim Ausgiefsen in ein anderes Gefäfs gesteht sie nach einigen Secunden zu einer faserigen Masse, wobei ihre Temperatur von 10° C. auf 52°, 5 in die Höhe geht. Durch Erhitzen eines Gemisches von Salpeter und Schwefelsäure erhielt Green eine klare Flüssigkeit, welche nach dem Erkalten erst bei dem Hineinwerfen eines Salpeterkrystalls fest wurde, und zwar unter Wärmeentwicklung. Die Lösung des salzsauren Kalks in warmem Wasser bleibt nach Coxe in verschlossenen Gefäfsen oft flüssig und krystallisirt dann, ohne dafs Oeffnen nöthig wäre, beim Schütteln unter besonders starker Wärmeentwickelung und die warm bereitete Bittersalzlösung bleibt auch in offenen Gefäfsen beim Erkalten oft flüssig und giebt dann beim Schütteln körnige Krystalle. In einer heifs bereiteten Auflösung von Salpeter und Glaubersalz bringt nach Lowitz während des Erkaltens ein Salpeterkrystall blofs das Anschiefsen von Salpeter, ein Glaubersalzkrystall blofs das Anschiefsen von Glaubersalz hervor, während aus der für sich gelassenen Auflösung beide Salze durch einander krystallisiren. Diese Anomalie erklärt Berthollet (statique chimique I. 32.) und Gay-Lussac aus einer Trägheit der kleinsten Theile, so wie Thénard annimmt, dieselben würden durch das Schütteln in eine andere Stellung gegen einander gebracht. Allein Schütteln in verschlossenen Gefäfsen bewirkt meistens nicht die Krystallisation. Auf jeden Fall läfst sich annehmen, dafs die Cohäsionskraft eines Körpers sich oft erst auf eine mechanische

Veranlassung hin in solchen Fällen äufsert, in welchen sie über andere Kräfte, z. B. über die Affinität des Körpers gegen Wärme oder gegen wägbare Anflösungsmittel, das Uebergewicht erlangt hat[1].

b) War der zu krystallisirende Körper durch Verbindung mit einem andern wägbaren Stoffe flüssig gemacht, so hat man ihm diesen wieder zu entziehen. Dieses wird bewerkstelligt entweder durch Entfernung des letzteren in Dampfgestalt, es sey dieses in der Siedhitze oder bei niederer Temperatur an der Luft oder im luftleeren Raume. So krystallisirt das Kochsalz beim Einkochen seiner wässerigen und manches Harz bei freiwilligem Verdampfen seiner weingeistigen Lösung. Oder der flüssig machende Stoff wird durch einen andern wägbaren Stoff entzogen, der sich damit zu einer Flüssigkeit verbindet, welche den zu krystallisirenden Körper entweder gar nicht oder wenigstens in geringerer Menge aufgelöst zu behalten vermag. So krystallisirt Salpeter und Kupfersalmiak aus der wässerigen Lösung bei Zusatz von Weingeist und umgekehrt Campher aus der weingeistigen bei Zusatz von Wasser.

Die bei der Krystallbildung bemerkbaren *Umstände* und *Erfolge* sind folgende:

1) Je langsamer die Bedingung Nr. 2, nämlich Zurückführung des flüssig gemachten Stoffes in den starren Zustand, erfüllt wird und je ruhiger die Flüssigkeit steht, desto wenigere, gröfsere und deutlichere Krystalle bilden sich; je schneller man erkältet oder das Auflösungsmittel entzieht, desto mehrere, kleinere und undeutlichere. Denn im ersten Falle haben die Theilchen des fest werdenden Körpers Zeit, sich regelmäfsig an diejenigen anzulegen, welche sich zuerst im starren Zustande aus der Flüssigkeit ausgeschieden hatten, und sich mit ihnen allmälig zu grofsen Krystallen zu vereinigen; werden dagegen bei schneller Krystallisation viele Theilchen auf einmal starr, so bildet jeder der-

1 Vergl. Lowitz in Crell's Annalen 1790 Bd. I. S. 209. Gay-Lussac in Mémoires d'Accueil B. III. daraus in Schweigger's J. B. IX. S. 70. Ferner: Annales de Chimie et Physique T. XI. p. 301. Schweigger in Schweigger's J. B. IX. S. 79. Coxe in Thomson's Annals of Philosophy Vol. I. p. 380 und Vol. VI. p. 101. Ziz in Schweigger's Journ. Bd. X. S. 160. Geiger in Schweigger's Journ. B. XV. S. 231. Thomson in Phillip's Annals of Philosophy Vol. III. p. 169.

selben für sich einen Kern zur Anlegung der übrigen erstarrenden Theilchen und es bilden sich viele Krystalle, von denen vielleicht keiner vollständige Ausbildung erhält. Hierauf gründet sich der Unterschied des Kandiszuckers und des Hutzuckers, so wie Le Blanc's Weise, aus verschiedenen Auflösungen möglichst regelmäſsige Krystalle zu erhalten.

Man läſst z. B. die Lösung eines Salzes in warmem Wasser sehr langsam erkalten, so daſs nur einzelne Krystalle entstehen, man sucht von diesen die am besten ausgebildeten aus und legt sie, von einander getrennt, in die Auflösung desselben Salzes, welche durch gelindes Erwärmen mit überschüssigen Salzen nur etwas reichlicher mit diesem beladen ist, als sie bei gewöhnlicher Temperatur behalten kann, und daher diesen kleinen Ueberschuſs allmälig an den hineingelegten Krystall absetzt. Man wiederholt dieses so lange, bis die einzelnen Krystalle die gewünschte Gröſse haben, wobei man sie jedoch jedesmal auf eine andere Seite zu legen hat, weil die den Boden berührende Fläche am wenigsten Gelegenheit hat zu wachsen. Man erspart sich die Mühe der wiederholten Bereitung einer etwas übersättigten Lösung, wenn man in dem oberen Theile einer gesättigten Lösung, auf deren Grunde die Krystalle liegen, etwas von dem Salze in einem Florbeutel oder Trichter aufhängt. Denn da immer etwas Temperaturwechsel eintritt und die wärmere Flüssigkeit nach oben steigt, daselbst mit dem aufgehängten Salze in Berührung kommt, alsdann aber durch Aufnahme von Salz specifisch schwerer wird und sich zu den Krystallen herabsenkt, so geht hier ein allmäliges Wachsen der letzteren, die man nur öfters zu wenden hat, vor sich.

2) Die Krystalle zeigen, so weit man dieses bemerken kann, bei ihrem ersten Entstehen dieselbe äuſsere Gestalt, wie später; namentlich bildet sich nicht etwa zuerst die primitive Gestalt aus, die dann durch weitere Anlegung von Masse nach bestimmten Gesetzen in die secundäre Form überginge. So bemerkt man bei Alaun, dessen Grundgestalt ein regelmäſsiges Oktaeder ist, beim ersten Entstehen der Krystalle dieselben Abstumpfungen der Ecken und Kanten, die sich bei den ausgebildetern Krystallen zeigen.

3) Die Krystalle entstehen zuerst da, wo ihnen das Flüssigkeitsprincip entzogen wird oder wo sie durch Adhäsion sich festzusetzen veranlaſst werden; daher auf der Oberfläche der

Flüssigkeit, sofern hier Verdunstung oder Abkühlung durch die Luft und Adhäsion der Luft an die Krystalle gegeben ist; ferner am Boden und an den Wandungen der Gefäfse, sofern sie theils die Wärme hindurchlassen, theils Adhäsion gegen die Krystalle äufsern. Dafs letzterer Grund mit in Anschlag kommt, beweist die Erfahrung, dafs aus ihrer wässerigen Auflösung krystallisirende Salze sich schwieriger an gläserne als an porcellanene und gar nicht an mit Fett überzogene Wandungen absetzen. Endlich legen sich auch die Krystalle an Holz und andere mit Adhäsion gegen sie begabte Körper an, die man in die krystallisirende Flüssigkeit bringt. Nach Lüdecke[1] soll auch die Nähe zweier magnetischer Pole das Krystallisiren an bestimmten Stellen veranlassen.

Indem die ersten Krystalle sich an bestimmten Stellen befestigen und hier weiter wachsen, so entsteht in den Fällen, wo der krystallisirende Körper in einer wägbaren Flüssigkeit gelöst ist, eine Strömung, indem die einzelnen Krystalle dem Theile der Lösung, mit welchem sie in Berührung sind, so viel Krystallmasse entziehen, als es bei den gegebenen Umständen möglich ist, wodurch dieser Theil der Lösung specifisch leichter wird und in die Höhe steigt, um der übrigen noch beladeneren Flüssigkeit Platz zu machen.

4) Krystallisirt ein Körper aus einer Auflösung in einer tropfbaren Flüssigkeit heraus und wird diese nicht durch Abdampfen völlig entfernt, so bleibt bei den Krystallen die *Mutterlauge* übrig. Diese Mutterlauge ist die Flüssigkeit, in welcher der krystallisirende Körper gelöset gewesen war und welche noch so viel hiervon gelöst enthält, als bei den gegebenen Umständen, besonders bei ihrer Menge und der stattfindenden Temperatur, darin zurückgehalten werden konnte. Enthielt die Auflösung neben dem krystallisirenden Körper etwa noch eine andere minder leicht krystallisirbare Materie gelöst, so bleibt diese, neben der angegebenen Menge des krystallisirenden Körpers, vorzugsweise in der Mutterlauge. Hierauf gründet sich eine sehr gebräuchliche Reinigungsweise leichter krystallisirbarer Körper von weniger krystallisirbaren, denn durch wiederholtes Auflösen derselben, Krystallisiren, Abwaschen mit kleinen Mengen des kalten Auflösungsmittels und Auspressen zwischen Fliefs-

1 G. LXVIII. 76.

papier erhält man zuletzt Krystalle, welche völlig frei von der minder krystallisirbaren Materie sind, sofern diese in der Mittellauge zurückblieb. Bei dieser, besonders bei Salzen, wie Salpeter, Alaun u. s. w., häufig vorkommenden, Reinigungsweise ziehen Manche die Erzeugung kleiner Krystalle durch rasches Erkälten der Erzeugung grofser durch langsames Erkälten vor, sofern im erstern Falle weniger Mutterlauge zwischen die Blättchen eines Krystalls eingeschlossen werden könne, und hierauf gründet sich die neufranzösische Reinigungsweise des Salpeters. Berücksichtigt man jedoch, dafs bei gleichem Gewichte solche kleine Krystalle viel mehr Oberfläche darbieten, als gröfsere, dafs ihnen daher viel mehr Mutterlauge äufserlich anhängt, die sich durch Abwaschen nicht so vollständig entfernen läfst, und dafs bei sehr langsamer Krystallisation, wo die Krystalltheilchen Zeit haben, sich gehörig an einander zu fügen, gerade weniger Mutterlauge in die Krystalle eingeschlossen werden möchte, so mufs man mit Clement und Desormes[1], der Einwendungen von Longchamp[2] ungeachtet, der langsamen Krystallisirung den Vorzug geben.

Von der Mutterlauge werden öfters, besonders bei rascherer Krystallisation, kleine, bei derselben Materie sehr veränderliche, Mengen in die Blättchen des krystallisirenden Körpers als *Zerknisterungswasser* eingeschlossen. Werden solche Krystalle erhitzt und schmelzen sie nicht unter dem Siedpuncte der eingeschlossenen Mutterlauge, so zeigen sie das Zerknistern oder *Decrepitiren,* sofern die aus der Mutterlauge entwickelten Dämpfe mit Gewalt die Krystalle zersprengen, um sich einen Ausgang zu verschaffen. Kochsalz, durch Verdampfenlassen der wässerigen Auflösung bei gewöhnlicher Temperatur krystallisirt, verknistert nicht beim Erhitzen, heftig dagegen das durch rasches Einkochen der wässerigen Lösung erhaltene; mancher Kalkspath verknistert, anderer nicht.

Von diesem nur zufällig in unbestimmter Menge und mechanisch beigemengten Zerknisterungswasser ist das wesentlich, in bestimmter Menge und chemisch beigemischte *Krystallwasser* sehr zu unterscheiden. Viele Körper nehmen nämlich bei ihrem Anschiefsen aus einer wässerigen Auflösung eine bestimmte

1 Annales de Chimie. Tome XCII. p. 248.

2 Annales de Chimie et Physique. Tome IX. p. 200.

Menge Wasser auf eine solche Weise in ihre Krystalle auf, daſs sie nun nicht mehr die Krystallform und übrigen Eigenschaften des wasserfreien Körpers zeigen, sondern verschiedene, wie sie einer solchen proportionirten Verbindung desselben mit Wasser zukommen[1]. Auch Weingeist geht auf dieselbe Weise in manche aus ihm anschieſsende Krystalle über, so daſs auch ein *Krystallisationsweingeist* zu unterscheiden ist.

5) Jede Krystallbildung ist mit Wärmeentwickelung verbunden; manche auch mit Lichtentwickelung. Die Wärmeentwickelung rührt ohne Zweifel von der beim Uebergange der flüssigen Stoffe in den festen Zustand freiwerdenden Flüssigkeitswärme her. Sie ist besonders bei rascher Krystallisation deutlich zu bemerken, daher vorzüglich in dem oben beschriebenen anomalen Falle, wo Wasser oder die Lösung von Glaubersalz, essigsaurem Natron u. s. w., in der Ruhe unter ihren Krystallisationspunct abgekühlt, durch eine äuſsere Veranlassung zu rascher Krystallisation gebracht werden. Die Lichtentwickelung zeigt sich bei der Sublimation der Benzoesäure und bei der Krystallisation mehrerer Salze, besonders des schwefelsauren Kali's, des schwefelsauren Kobaltoxydkali's, des fluſssauren Natrons und des salpetersauren Strontians aus ihrer wässerigen Lösung[2].

6) Hinsichtlich des Verhältnisses der *Krystallform*, welche die Stoffe annehmen, zu ihrer chemischen Natur ist Folgendes zu bemerken:

a) Einerlei Materie kann in vielerlei Formen krystallisiren, welche jedoch in den meisten Fällen nur einem einzigen Krystallsysteme angehören und welche in Hinsicht der Winkel mit einander vereinbar und von einer gemeinschaftlichen Grundform abzuleiten sind. So kommen vom Kalkspathe mehrere hundert verschiedene Krystallformen vor, welche jedoch alle dem 3- und 3gliedrigen Systeme angehören und als deren Grundform ein stumpfes Rhomboeder angenommen wird. Kennt man von einer Materie auch nur eine einzige Krystallform, so darf man doch annehmen, daſs sie unter gewissen Umständen auch alle die übrigen Formen zeigen könnte, welche demselben Krystallsysteme angehören. Woher es komme, daſs dieselbe Materie bald diese, bald jene Form desselben Krystallsystems annimmt, ist

1 Vergl. Art. *Wasserstoff*.

2 S. Art. *Licht*.

noch nicht hinreichend ausgemittelt; so viel ist jedoch durch BEUDANT's Versuche[1] ausgemacht, dafs hierauf nicht sowohl Temperatur, elektrischer Zustand, Concentration und Volumen der Flüssigkeit, Gestalt und Materie der Gefäfse, Barometerstand und Hygrometerstand einfliefsen, als vielmehr Gegenwart fremdartiger Stoffe, von denen die meisten chemisch, einige vielleicht auch nur mechanisch wirken. Zu letzterem Falle zählt BEUDANT die Erfahrung, dafs die mit zartpulverigem Bleivitriol gemengte Auflösung des Alauns oder Eisenvitriols einfachere, mit wenigeren und matteren Flächen versehene Krystalle absetzt, als wenn diese Auflösungen für sich krystallisirt wären; doch ist es nicht unmöglich, dafs sich eine Spur von Bleivitriol auflöste und so eine chemische Wirkung auf die krystallisirende Flüssigkeit äufserte. Auf ausgemacht chemischer Wirkung beruhen folgende Fälle. Salmiak, der aus einer Auflösung in reinem Wasser in Oktaedern anschiefst, schiefst bei Gegenwart von viel Harnstoff in Würfeln, von weniger Harnstoff oder von Boraxsäure in Cubo-Oktaedern an. Das für sich in Würfeln krystallisirende Kochsalz nimmt, wenn die Lösung zugleich Harnstoff enthält, die oktaedrische, wenn sie Boraxsäure enthält, die cubo-oktaedrische Form an. Fügt man der Alaunlösung etwas Alkali hinzu, so giebt sie keine Oktaeder, sondern Würfel, während sie bei Zusatz von Salzsäure Cubo-Ikosaeder und beim Zusatze von Borax Cubo-Okto-Dodekaeder liefert. Der mit Kupfervitriol versetzte Eisenvitriol schiefst in einfachen schiefen rhombischen Säulen an; der mit Zinkvitriol oder Bittersalz versetzte in denselben Säulen, welche an den spitzen Endecken stark abgestumpft sind, der reine Eisenvitriol in denselben Säulen, an den spitzen Endecken, den stumpfen Endkanten und den stumpfen Seitenkanten schwach abgestumpft, und der mit Borax, phosphorsaurem Natron oder Salzsäure versetzte Eisenvitriol in denselben Säulen, an sämmtlichen Ecken und Kanten abgestumpft. In vielen dieser Fälle ist es erwiesen, dafs der fremdartige Zusatz mit in die Krystalle übergeht; so bei mit Kupfervitriol oder Zinkvitriol versetztem Eisenvitriol. Man kann hier annehmen, dafs mit der so veränderten chemischen Mischung eine veränderte Krystallform gegeben ist. In andern Fällen, wie bei Harnstoff und so weiter, ist eine solche Beimischung

1 Annales de Chimie et Physique. Tome VIII. p. 5.

des fremdartigen Zusatzes nicht erwiesen und weniger wahrscheinlich und die Einwirkung dieser Stoffe ist vielleicht bloſs daraus zu erklären, daſs sie in der Mutterlauge bleiben und hierdurch einen nicht weiter zu erklärenden Einfluſs auf die Vereinigung der krystallisirenden Theilchen nach bestimmten Gesetzen ausüben, welcher eine andere Form zur Folge hat.

Von der so eben aufgestellten Regel, daſs einerlei Materie bloſs die Formen eines und desselben Krystallsystems annimmt, die mit einander vereinbar und von einer gemeinschaftlichen Grundform abzuleiten sind, giebt es jedoch mehrere Ausnahmen, sofern manche Substanzen *dimorph* und selbst *trimorph* sind, d. h. Krystalle liefern können, die zwei oder drei verschiedenen Systemen angehören, oder wenn auch einerlei Systeme, doch mit solchen Winkelverschiedenheiten, daſs sie nicht aus einer gemeinschaftlichen Grundform abgeleitet werden können. Auf diesen *Dimorphismus* und *Trimorphismus* hat zuerst Mitscherlich aufmerksam gemacht. Die im Mineralreiche vorkommenden Fälle sind folgende. Der kohlensaure Kalk gehört im Kalkspathe dem rhomboedrischen Systeme an, im Arragonit dem 2- und 2gliedrigen; das Doppelschwefeleisen zeigt im Schwefelkies zum regulären Systeme, im Wasserkies zum 2- und 2gliedrigen Systeme gehörende Gestalten; das Titanoxyd kommt als Rutil und als Anatas vor und wiewohl die Formen beider Mineralien dem quadratischen Systeme angehören, so sind doch die Winkel so beschaffen, daſs sie sich nicht auf einander zurückführen lassen. Der Kohlenstoff zeigt, als Diamant, zum regulären Systeme gehörende Krystallgestalten, als Graphit zum 6gliedrigen Systeme gehörende. Mit der verschiedenen Krystallform sind auch Verschiedenheiten hinsichtlich des specifischen Gewichts, der Härte, der Farbe u. s. w. verbunden. Zwar läſst sich gegen diese Ausnahmen einwenden, daſs durch Stromeyer im Arragonit eine kleine Menge von kohlensaurem Strontian gefunden worden ist, der dem Kalkspathe fehlt, daſs im Graphit dem Kohlenstoffe etwas Eisen beigemischt zu seyn pflegt, während der Kohlenstoff des Diamants rein ist, und daſs vielleicht bei genauer Untersuchung auch bei den übrigen genannten Mineralien chemische Verschiedenheiten aufgefunden werden möchten. Allein theils ist die Menge des Strontians im Arragonit sehr geringe und mancher Graphit scheint reiner Kohlenstoff zu seyn, theils lassen die folgenden Erfahrungen über künstliche Bildung von

Krystallen, die verschiedenen Systemen angehören, keinen Zweifel an der Exsistenz solcher Ausnahmen, so daſs man geneigt wird, auch die genannten Fälle hierfür gelten zu lassen. Wenn man die Auflösung von Schwefel im Schwefelkohlenstoff der Kälte aussetzt, so schieſst er in denselben dem 2- und 2gliedrigen Systeme angehörenden rhombischen Oktaedern an, in welchen er sich in der Natur vorfindet; läſst man dagegen geschmolzenen Schwefel langsam erkalten und gieſst nach einiger Zeit den noch flüssigen Theil desselben ab, so erhält man nach Mitscherlich schiefe rhombische Säulen von ganz andern Winkeln und dem 2- und 1gliedrigen Systeme angehörend. Diese sind anfangs völlig durchsichtig, jedoch einige Tage bei gewöhnlicher Temperatur aufbewahrt werden sie undurchsichtig. Hieraus läſst sich schlieſsen, daſs bei niedrigeren Temperaturen die Theilchen des Schwefels sich auf eine solche Weise an einander lagern, daſs ein rhombisches Oktaeder entsteht, bei der höheren Temperatur dicht unter dem Schmelzpuncte dagegen auf eine andere Weise, um schiefe rhombische Säulen zu bilden. Wenn letztere Krystalle einige Zeit in der Kälte verweilen, so behalten sie zwar ihre äuſsere Form, weil jedoch die Theilchen des Schwefels sich in der Kälte auf andere Weise zusammenfügen, so scheint dieses selbst im starren Krystalle noch einigermaſsen zu erfolgen und damit Undurchsichtigwerden gegeben zu seyn. Während das gediegene Kupfer meistens in Würfeln und andern Formen des regelmäſsigen Systems vorkommt, so krystallisirt es nach Seebeck nach dem Schmelzen in Krystallen des 3- und 3gliedrigen Systems und Hauy fand auch einmal gediegenes Kupfer als doppelt 6seitige Pyramide an den Grundkanten abgestumpft. Dampft man eine wässerige Lösung des Zinkvitriols unter 52° C. ab, so erhält man die gewöhnlichen durchsichtigen geraden rhombischen Säulen, dem 2- und 2gliedrigen Systeme angehörend; beim Abdampfen in höherer Temperatur dagegen entstehen, wie Haidinger fand, minder durchsichtige schiefe rhombische Säulen des 2- und 1gliedrigen Systems. Beide Arten von Krystallen haben nach Mitscherlich genau dieselbe Zusammensetzung, nämlich aus 1 Mischungsgewicht Zinkoxyd, 1 Schwefelsäure und 7 Wasser. Erhitzt man einen Krystall der ersten Art über 52° C. in Oel oder in einer Glasröhre, so wird er an einzelnen Puncten der Oberfläche matt und von diesen Puncten aus nach dem Innern des durchsichtigen Krystalls schie-

ſsen divergirende Bündel von milchweiſsen Krystallen an, bis endlich alles in ein Aggregat von diesen Krystallen verwandelt ist. Bei diesem Erhitzen verliert der Krystall kein Wasser, auſser etwa mechanisch adhärirendes. Kühlt man die in der Hitze erzeugten schiefen rhombischen Säulen nach dem Trocknen langsam ab, so bleiben sie ziemlich klar; kühlt man sie dagegen, ehe sie getrocknet sind, rasch ab, so werden sie undurchsichtig und zeigen sich beim Zerbrechen oft als ein Aggregat von Krystallen des 2- und 2gliedrigen Systems, welche sich zuerst in der noch anhängenden Mutterlauge erzeugten und dann durch den schon gebildeten Krystall fortpflanzten. Das Bittersalz verhält sich gerade so, wie der Zinkvitriol, und liefert bei niederer Temperatur gerade, bei höherer schiefe rhombische Säulen und auch hier werden erstere Krystalle über 70° C. undurchsichtig und zu einem Aggregate von Krystallen der zweiten Art. Schwefelsaures Nickeloxyd schieſst aus der wässerigen Lösung unter 15° C. in rhombischen Säulen, zwischen 15 und 20° in quadratischen Oktaedern an; wenn man die rhombischen Säulen im Sommer dem Sonnenlichte einige Tage darbietet, so schmelzen sie weder, noch verlieren sie ihre Form, jedoch beim Zerbrechen zeigen sie sich aus lauter Quadratoktaedern zusammengesetzt, die manchmal einige Linien groſs sind. Mit dieser Erfahrung Mitscherlich's ist die frühere Annahme von Brooke und R. Phillips [1], als enthalte das quadratische Salz gegen 2 Procent mehr an Säure und weniger an Wasser, als das rhombische, widerlegt. Ueber 30° krystallisirt das schwefelsaure Nickeloxyd in schiefen rhombischen Säulen und sonach ist dieses Salz trimorph. Selensaures Zinkoxyd krystallisirt unter 15° C. in geraden rhombischen Säulen, welche man bloſs einige Augenblicke auf Papier der Sonne auszusetzen braucht, um sie in ein Aggregat von Quadratoktaedern zu verwandeln, die man beim Zerbrechen des Krystalls erkennt; aus einer etwas wärmeren Lösung schieſst dieses Salz sogleich in Quadratoktaedern an. Das doppeltphosphorsaure Natron schieſst in zweierlei Reihen von Gestalten an, die zwar beide dem 2- und 2gliedrigen Krystallsysteme angehören, jedoch mit Winkeln, die nicht auf einander zurückführbar sind. Daſs die bei einer gewissen Temperatur erzeugten Krystalle bei einer veränderten Temperatur in

1 Phillips Annals of Philosophy. Vol. VI. p. 437.

ein Aggregat von Krystallen eines andern Systems übergehen, führt MITSCHERLICH zu dem Schlusse, daſs die Atome der festen Körper an einander verschiebbar sind, wenn gewisse Umstände eintreten, welche eine andere Anordnung derselben (eine andere Krystallform) nothwendig machen. Hieraus erklärt MITSCHERLICH auch den Uebergang der in der Hitze erhaltenen glasigen, durchsichtigen, arsenigen Säure bei längerem Aufbewahren bei gewöhnlicher Temperatur in den undurchsichtigen und selbst erdigen Zustand. Auch die Bildung des Reaumurschen Porcellans aus Glas möchte hiervon abzuleiten seyn.

b) Indem nur wenige Krystallsysteme und mehrere tausend krystallisirbare Materien exsistiren, so kommt natürlich einerlei Krystallsystem sehr vielen, übrigens sehr von einander abweichenden Materien zugleich zu, und da einerlei Materie vielleicht alle Formen des Systems, zu welchem sie gehört, annehmen kann, so wiederholen sich diese einzelnen Formen bei sehr verschiedenartigen Materien. Es hängt von dem Krystallsysteme ab, ob die einzelnen Formen verschiedener, zu demselben Systeme gehörender Materien auch in den Winkeln übereinkommen oder nicht. Das Erstere findet beim regulären Krystallsysteme statt, wo wegen Gleichheit der drei Axen keine Winkelverschiedenheiten gegeben seyn können. So kommt der Würfel des Kochsalzes völlig mit dem des Fluſsspaths, Analcims, Bleiglanzes, Schwefelkieses überein, das Oktaeder des Salmiaks mit dem des Diamants, Spinells, Alauns, das Dodekaeder des Granats mit dem der Blende u. s. f.; da hingegen bei den übrigen Krystallsystemen eine Ungleichheit der Axen statt findet und diese Ungleichheit bei verschiedenen Materien eine verschiedene ist, so sind hiermit auch mehr oder weniger auffallende Winkelverschiedenheiten der verschiedenen Materien angehörenden Krystalle gegeben. So ist das quadratische Oktaeder des Gelbbleierzes niedriger, als das des Zirkons, und dieses niedriger, als das des Anatas; die gerade rhombische Säule des Bittersalzes ist nur wenig von einer quadratischen abweichend, die des Schwerspathes ist stärker geschoben und noch mehr die des Topases u. s. f. Oft sind jedoch diese Winkelverschiedenheiten unbemerklich; so betragen die stumpfen Kantenwinkel der Säule beim Bittersalz 90° 30′, bei Zinkvitriol 91° 7′, und die Winkel der Scheitelkanten des Rhomboeders betragen bei Kalkspath 105° 5′, bei Manganspath 106° 51′, bei Eisenspath 107° 2′, bei

Bitterspath 107° 22′ und bei Zinkspath 107° 40′. Mit dieser Verwandtschaft hinsichtlich der Winkel ist oft eine Verwandtschaft hinsichtlich der Zusammensetzung gegeben, denn im Bittersalz ist 1 Mischungsgewicht Schwefelsäure und 5 Mischungsgewichte Wasser mit 1 Mischungsgewicht Bittererde vereinigt und im Zinkvitriol ist die Bittererde durch 1 Mischungsgewicht Zinkoxyd vertreten; in den genannten Spathen ist allezeit 1 Mischungsgewicht Kohlensäure mit 1 Mischungsgewicht Basis verbunden, nämlich mit Kalk oder Manganoxydul oder Eisenoxydul, oder Kalk und Bittererde zugleich, oder Zinkoxyd. Zwar haben nicht alle in ihren Winkeln wenig abweichende Krystalle auch eine ähnliche Zusammensetzung. So zeigt der Natrolith eine gerade rhombische Säule, deren stumpfer Kantenwinkel 91° 38′ beträgt, die also der des Bittersalzes und Zinkvitriols sehr nahe steht, während die Zusammensetzung eine sehr verschiedene ist; eben so steht das stumpfe Rhomboeder des salpetersauren Natrons dem des Kalkspaths und Manganspaths sehr nahe, da der Winkel der Scheitelkanten 106° 30′ beträgt. Allein die obigen Beispiele zeigen deutlich, dafs ein Zusammenhang statt findet zwischen chemischer Mischung und Krystallform.

Hierauf gründet sich Mitscherlich's Lehre vom *Isomorphismus*, von welcher hier das Wesentlichste in atomistischer Sprache folgt.

Man kann Stoffe, sie seyen einfach oder zusammengesetzt, isomorph nennen, wenn sie nicht blofs für sich dieselbe Krystallgestalt, entweder mit gar keinen oder mit nur kleinen Winkelverschiedenheiten, zeigen, sondern auch in ihren Verbindungen mit andern Materien nach denselben atomistischen Verhältnissen. So ist A isomorph mit B, wenn x Atome A + y Atome C dieselbe Form zeigt, wie x Atome B + y Atome C, und wieder, wenn einerlei Gestalt zeigen einerseits x Atome A + y Atome C + z Atome D und andererseits x Atome B + y Atome C + z Atome D. Nur ist hierbei zugleich der Dimorphismus mehrerer Materien zu berücksichtigen, welcher scheinbare Ausnahmen hervorbringt, wenn z. B. eine Verbindung von A die eine der beiden Gestalten zeigt, die möglich sind, und die entsprechende von B die andere.

Isomorph sind: Schwefel, Selen und Chrom; zwar ist nur die Krystallform des Schwefels bekannt, allein ein Atom jedes der 3 Stoffe bildet mit 3 Atomen Sauerstoff isomorphe Säuren,

nämlich die Schwefelsäure, die Selensäure und die Chromsäure, welche bei ihrer Verbindung mit einer gleichen Zahl von Atomen derselben Salzbasis gleichgeformte Salze bilden. Namentlich haben einerlei Krystallform: einfach schwefelsaures Kali und einfach selensaures Kali, welche beide Salze wasserfrei sind; ferner wasserfreies schwefelsaures und selensaures Natron, aus der wässerigen Auflösung über 33° C. dargestellt; ferner gewässertes schwefelsaures, selensaures und chromsaures Natron, aus der wässerigen Auflösung in der Kälte krystallisirt, in deren jedem 1 Atom Säure, 1 Basis und 10 Wasser vorhanden sind; ferner wasserhaltiger schwefelsaurer und selensaurer Kalk, wie sie aus der Auflösung in Wasser anschiefsen; schwefelsaure Bittererde oder Zinkoxyd schiefsen unter 15° C. in derselben geraden rhombischen Säule an, wie selensaure Bittererde oder Zinkoxyd; schwefelsaures Nickeloxyd schiefst zwischen 15 bis 20° in denselben Quadratoktaedern an, in welchen das selensaure Nickeloxyd immer erscheint. Selensaures Kupferoxyd schiefst in derselben Form an, wie schwefelsaures. Isomorph sind ferner Phosphor und Arsenik, denn 1 Atom Phosphorsäure (= 1 Atom Phosphor + $2\frac{1}{2}$ Atome Sauerstoff) bildet mit 1 Atom Ammoniak und $1\frac{1}{2}$ Wasser dieselben dem 2- und 1gliedrigen Systeme angehörenden Krystalle, wie 1 Atom Arseniksäure (= 1 Atom Arsenik + $2\frac{1}{2}$ Atome Sauerstoff) mit 1 Atom Ammoniak und $1\frac{1}{2}$ Atomen Wasser; auch ist gleich krystallisirt das einfach phosphorsaure und das einfach arseniksaure Natron, wenn beide Salze 12 Atome Krystallwasser enthalten; ferner das doppeltphosphorsaure Ammoniak (2 Atome Phosphorsäure, 1 Ammoniak und $1\frac{1}{2}$ Wasser) und das doppeltarseniksaure Ammoniak (2 Atome Arseniksäure, 1 Ammoniak und $1\frac{1}{2}$ Wasser); ferner das doppeltphosphorsaure und das doppeltarseniksaure Natron bei 4 Atomen Krystallwasser (nur dafs das phosphorsaure Salz dimorph ist und also noch eine andere Krystallgestalt zeigt); ferner das doppelt phosphorsaure und doppelt arseniksaure Kali, bei 2 Atomen Krystallwasser, deren Krystallform zugleich mit der des doppeltphosphorsauren Ammoniaks übereinkommt, und endlich zeigt das natürlich vorkommende phosphorsaure Bleioxyd dieselbe Form, wie das ebenfalls natürliche arseniksaure.

Ferner ist ein Isomorphismus anzunehmen zwischen 1 Atom Kali einerseits und zwischen 1 Atom Ammoniak + 2 Atomen Wasser andrerseits, sofern sich findet, dafs sich beide in ihren

Verbindungen bei gleicher Krystallform vertreten. So haben, wie bereits erwähnt ist, doppeltphosphorsaures und doppeltarseniksaures Ammoniak, welche 4 Atome Krystallwasser enthalten, einerlei Form mit dem doppeltphosphorsauren und doppeltarseniksauren Kali, worin nur 2 Atome Krystallwasser enthalten sind. Andere Beispiele finden sich bei den unten zu erwähnenden Doppelsalzen des Ammoniaks oder Kali's mit Bittererde, Zinkoxyd, Eisenoxydul u. s. f.

Ferner sind isomorph Natron und Silberoxyd, denn schwefelsaures und selensaures Natron, aus der wässerigen Lösung anschiefsend, bilden wasserfreie Krystalle von derselben Form, wie das schwefelsaure und selensaure Silberoxyd besitzt.

Die bedeutendste Reihe von isomorphen Stoffen ist folgende: Calcium, Magnium, Mangan, Zink, Eisen, Kobalt, Nickel, Kupfer, Baryum, Strontium und Blei. Aus der Verbindung von 1 Atom dieser Metalle mit 1 Atom Sauerstoff entsteht: Kalk, Bittererde, Manganoxydul, Zinkoxyd, Eisenoxydul, Kobaltoxyd, Nickeloxyd, Kupferoxyd, Baryt, Strontian und Bleioxyd. Alle diese Oxyde erzeugen, soweit der Dimorphismus keine Ausnahmen macht, mit derselben Säure gleichgeformte Verbindungen. So bilden die 5 zuerst genannten Oxyde mit 1 Atom Kohlensäure die verschiedenen, oben betrachteten, nur geringe Winkelverschiedenheit zeigenden rhomboedrischen Spathe. Allerdings sind die Verbindungen von 1 Atom Baryt, Strontian oder Bleioxyd mit 1 Atom Kohlensäure anders krystallisirt, sofern ihre Formen dem 2- und 2gliedrigen Systeme angehören. Dieses ist vom Dimorphismus abzuleiten; man hat anzunehmen, dafs die 8 erstgenannten Oxyde von den beiden Formen, die sie mit Kohlensäure annehmen könnten, vorzugsweise die rhomboedrische annehmen und die 3 zuletzt genannten Oxyde vorzugsweise die prismatische. Diese Annahme wird dadurch sehr wahrscheinlich, dafs der kohlensaure Kalk wirklich in doppelter Form auftritt, im Kalkspath rhomboedrisch, im Arragonit dagegen prismatisch, wodurch er sich völlig dem natürlichen kohlensauren Baryt, Strontian und Bleioxyd anschliefst. Als weitere Belege für den Isomorphismus der 11 genannten Salzbasen dienen folgende Thatsachen. Der phosphorsaure Kalk (der Apatit) hat dieselbe Krystallform, wie das phosphorsaure Bleioxyd (das Grünbleierz). Der unterschwefelsaure Kalk krystallisirt auf dieselbe Weise, in 6seitigen Säulen, wie der unterschwefelsaure

Strontian und das unterschwefelsaure Bleioxyd, wobei immer 4 Atome Krystallwasser gegeben sind; dagegen krystallisirt der unterschwefelsaure Baryt bei demselben Wassergehalte in geraden rhombischen Säulen, was wohl vom Dimorphismus abzuleiten ist. Sind die genannten Salzbasen mit 1 Atom Schwefelsäure oder Selensäure und 4 Atomen Krystallwasser verbunden, so gehören ihre Krystalle dem 1- und 1gliedrigen Systeme an. So krystallisiren schwefelsaures und selensaures Manganoxydul über 5°, selensaures Zinkoxyd und Kobaltoxyd über 30 bis 40°. Der Kupfervitriol (1 Atom Kupferoxyd, 1 Atom Schwefelsäure und 5 Atome Wasser) zeigt auch dem 1- und 1gliedrigen Systeme angehörende Krystalle, deren Winkel sich aber nicht mit den obigen vereinigen lassen. Sind die genannten Salzbasen mit 1 Atom Schwefelsäure oder Selensäure und 6 Atomen Wasser vereinigt, so entsteht die schiefe rhombische Säule des Eisenvitriols. Diese zeigen namentlich das schwefelsaure Eisenoxydul, Kobaltoxyd, Eisenoxydul - Zinkoxyd, Eisenoxydul - Kupferoxyd, Kupferoxyd - Zinkoxyd, Kupferoxyd - Nickeloxyd, Kupferoxyd-Bittererde, Manganoxydul - Zinkoxyd und Manganoxydul - Bittererde, wenn diese Salze bei gewöhnlicher Temperatur krystallisiren; ferner das selensaure Kobaltoxyd, wenn es bei 10°, und das schwefelsaure Manganoxydul, wenn es unter + 5° anschiefst. Treten endlich zu 1 Atom der genannten Basen und 1 Atom Schwefelsäure oder Selensäure 7 Atome Krystallwasser, so entstehen bei niedrigster Temperatur gerade rhombische Säulen, kaum von der quadratischen abweichend, bei einer mittleren Temperatur Quadratoktaeder und bei noch höherer schiefe rhombische Säulen, nicht mit denen des Eisenvitriols vereinbar. Die gerade rhombische Säule zeigt unter + 15° krystallisirte schwefelsaure Bittererde, schwefelsaures Zinkoxyd und Nickeloxyd, selensaure Bittererde und selensaures Zinkoxyd. In Quadratoktaedern krystallisiren schwefelsaures Nickeloxyd und selensaures Zinkoxyd zwischen 15 und 20° und selensaures Nickeloxyd bei gewöhnlicher Temperatur. In der schiefen rhombischen Säule schiefsen an schwefelsaure Bittererde, schwefelsaures Zinkoxyd und schwefelsaures Nickeloxyd über 30°, schwefelsaures Kobaltoxyd bei 20°, selensaure Bittererde und selensaures Kobaltoxyd über 15°.

Auch entsteht immer dieselbe schiefe rhombische Säule, wenn 2 Atome Schwefelsäure und 6 Atome Wasser verbunden

werden mit 1 Atom Kali (oder statt des Kali's mit 1 Atom Ammoniak und 2 Atomen Wasser) und mit 1 Atom Bittererde, Manganoxydul, Zinkoxyd, Eisenoxydul, Kobaltoxyd, Nickeloxyd oder Kupferoxyd. Im Augit, der Hornblende und einigen andern kieselsauren Salzen finden sich häufig Kalk, Bittererde, Manganoxydul und Eisenoxydul wechselseitig durch einander vertreten, ohne Aenderung der Krystallform. So bildet auch die Alaunerde ein regelmäfsiges Oktaeder, sie sey mit Bittererde vereinigt, im Spinell, oder mit Zinkoxyd, im Gahnit. Endlich bilden Baryt, Strontian und Bleioxyd mit Schwefelsäure Krystalle des 2- und 2gliedrigen Systems, die in ihren Winkeln nur sehr wenig abweichen, und der mit 3 Atomen Wasser krystallisirte essigsaure Baryt hat dieselbe Krystallform, wie das mit 3 Atomen Wasser krystallisirte essigsaure Bleioxyd oder der Bleizucker.

Ferner sind isomorph: Alaunerde, Eisenoxyd, Manganoxyd und Chromoxydul. In allen diesen 4 Oxyden kann man 1 Atom Metall auf $1\frac{1}{2}$ Atome Sauerstoff oder, was dasselbe ist, 2 Atome Metall auf 3 Atome Sauerstoff annehmen. Die natürliche Alaunerde, der Sapphyr, sowohl, als auch das natürliche Eisenoxyd, der Eisenglanz, sind in spitzen Rhomboedern mit nur wenig abweichenden Winkeln krystallisirt. Der gewöhnliche Alaun hält auf 4 Atome Schwefelsäure, 24 Wasser und 1 Kali 2 Atome Alaunerde (in der Alaunerde 1 Atom Alomium auf $1\frac{1}{2}$ Sauerstoff vorausgesetzt); diese 2 Atome Alaunerde können vertreten werden durch 2 Atome Eisenoxyd, Manganoxyd oder Chromoxydul und immer bleibt dieselbe regelmäfsig oktaedrische Form des Alauns.

Ferner zeigen auch einerlei Krystallform, dem quadratischen Systeme angehörend, das Zinnoxyd als Zinnstein und das Titanoxyd als Rutil; beide Oxyde kann man als aus 1 Atom Metall und 2 Sauerstoff zusammengesetzt ansehen.

Endlich sind als isomorph anzunehmen: Platin, Palladium, Iridium und Osmium, da nach Berzelius jedesmal regelmäfsige Oktaeder entstehen, das Chlorkalium verbinde sich mit Chlorplatin oder mit Chlorpalladium oder mit Chloriridium oder mit Chlorosmium nach denselben atomistischen Verhältnissen.

Viele andere einfache und zusammengesetzte Stoffe sind hinsichtlich ihres Isomorphismus noch nicht bekannt. Das bis jetzt Bekannte berechtigt jedoch zu dem Schlusse, dafs die Krystallform der verschiedenen Stoffe abhängt 1) von ihrer chemi-

schen Natur und zwar, wenn sie zusammengesetzt sind, von der Natur der Bestandtheile und von dem atomistischen Verhältnisse, nach welchem diese vereinigt sind, und 2) von der respectiven Lage, welche die einfachen oder zusammengesetzten Atome bei der Krystallisation gegen einander annehmen[1].

Die *Ursache der Krystallisation* ist vor allen Dingen in der Cohäsionskraft zu suchen. Da jedoch hierdurch allein die Bildung regelmäſsig gestalteter fester Körper nicht erklärt werden kann, so hat man entweder der atomistischen Theorie gemäſs eine bestimmte Form der Atome, die vielleicht noch mit Anziehungspolen und Abstoſsungspolen versehen sind, zu Hülfe zu nehmen, oder, der dynamischen Theorie gemäſs, eine nach gewissen Richtungen hin verschieden groſse Cohäsionskraft, wovon nicht bloſs die Bildung regelmäſsiger Körper, sondern auch ihre leichtere Spaltbarkeit nach gewissen Richtungen, nach denen die Cohäsion minder groſs ist, abzuleiten seyn würde[2].

G.

Kugelspiegel.

Speculum sphaericum convexum; Miroir sphérique; *Spherical Mirror.*

Der kugelförmige convexe Spiegel bietet, obgleich er zu praktischen Anwendungen weniger, als der Hohlspiegel, geeignet ist, doch Gelegenheit zu einigen bemerkenswerthen theoretischen Untersuchungen dar. Wenn der Ort des leuchtenden Fig. 345. Punctes P und der Punct A, wo die Zurückwerfung des Strahles von der Kugeloberfläche ABDE statt finden soll, gegeben ist, so hat es keine Schwierigkeit, die gerade Linie AQ zu finden, in welcher sich das Auge Q befinden muſs, um den Gegenstand

1 Ueber Dimorphismus und Isomorphismus s. Beudant in Annales de Chimie et Physique Vol. IV. p. 72. Vol. VII. p. 399. Vol. VIII. p. 5. Vol. XIV. p. 326. Wollaston in Thomson's Annals Vol. IV. p. 283. Mitscherlich in Annales de Chimie et Physique Vol. XIV. p. 172. Vol. XIX. p. 359. Vol. XXIV. p. 264 und 355. Ferner in Poggendorff's Ann. XI. S. 323. Haüy in Annales de Chimie et Physique Vol. XIV. p. 305. Marx in Kastner's Archiv Bd. II. S. 18. Haidinger in Poggendorff's Ann. B. VI. S. 191 und B. XI. S. 173.

2 Vergl. Art. *Materie.*

P in A gespiegelt zu sehen; aber weit schwieriger ist die unter dem Namen des *Alhazenischen Problemes* bekannte Frage, wo A liegt, wenn P und Q, die Oerter des leuchtenden Punctes und des Auges, gegeben sind. Die Bemühungen, dieses Problem aufzulösen, haben Barrow [1] und Kästner [2] erzählt; ich will daher in dieser Hinsicht auf diese verweisen und blofs eine geometrische Auflösung von Barrow mittheilen, demnächst aber an die Kästnersche Formel einige Betrachtungen anknüpfen.

Barrow setzt zwar den Mittelpunct C des Kugelspiegels als gegeben voraus, aber nicht den Halbmesser, und sucht den geometrischen Ort aller Reflexionspuncte für alle möglichen, um jenen Mittelpunct beschriebenen Kugelspiegel. Dafs dieser Reflexionspunct immer auf dem gröfsten Kreise liegt, dessen Ebene durch die beiden Puncte geht, von wo der Strahl kommt und wohin er gelangen soll, versteht sich von selbst.

Um die einzelnen Puncte jenes verlangten geometrischen Ortes zu finden, wird zuerst um den Mittelpunct C der durch P gehende Kreis P a b gezeichnet und ein zweiter Kreis $P\alpha\beta$, dessen Durchmesser CP ist. Man zieht dann nach einem auf dem letzteren Kreise willkürlich angenommenen Puncte α die Linie $C\alpha$, ferner $P\alpha$, die bis an den grofsen Kreis nach a verlängert wird, dann von a durch Q die Linie aQ, die man nach A so weit verlängert, bis sie $C\alpha$ in A schneidet; dieser Punct A ist einer der verlangten Puncte, nämlich auf dem mit dem Halbmesser CA gezeichneten Kreise ist A der Reflexionspunct. Die $C\beta$, $P\beta b$, bQ, welche die verlängerte $C\beta$ in B schneidet, geben ebenso den Punct B, und $C\varepsilon$, $P\varepsilon e$, eQ, welche $C\varepsilon$ in E schneidet, geben ebenso den Punct E und auf gleiche Weise fände man die ganze Curve D C A Q B C E P, in welcher ich nur A, B, D, E, um die folgenden Betrachtungen daran zu knüpfen, auf demselben Kreise gezeichnet habe.

Es scheint nämlich sonderbar, dafs es auf derselben Kugelfläche A B D E vier Reflexionspuncte geben soll, da doch nur in *einem* Puncte A der an der convexen Seite zurückgeworfene Strahl von P nach Q gelangt und in *einem* Puncte D die Zurückwerfung an der hohlen Fläche den von P ausgegangenen Strahl nach Q bringt; aber das geometrische Problem umfafst

1 Lectiones opticae. Lect. 9.

2 Nov. Comm. Gotting. Vol. 7.

nicht blofs diejenigen Fälle, wo die beiden Winkel, welche die von P und Q ausgehenden Linien mit dem Radius CE bilden, an verschiedenen Seiten des Radius liegen und gleich sind, sondern auch die Fälle, wo sie an einerlei Seite der Normallinie liegen und gleich sind. Der Kugelspiegel giebt in B und in E keine Reflexion des von P kommenden Strahles nach Q hin, aber die Linien PB, QB und PE, QE machen dennoch gleiche Winkel mit der an den Kreis in B, E gezogenen Tangente.

Kastner findet es am bequemsten, die trigonometrische Darstellung so anzuordnen, dafs $PCQ = 2\alpha$ gesetzt wird und die Winkel $RCA = \varphi$ von der Halbirungslinie CR an gerechnet werden. Dann wird Tang. $PA\alpha =$ Tang. $QA\alpha =$

$$\frac{a \text{ Sin. } (\alpha - \varphi)}{a \text{ Cos. } (\alpha - \varphi) - r} = \frac{A \text{ . Sin. } (\alpha + \varphi)}{A \text{ . Cos. } (\alpha + \varphi) - r},$$

wenn $CQ = a$, $CP = A$ ist. Daraus ergiebt sich

$$r = \frac{a \ A \text{ Sin. } 2\varphi}{A \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) - a \text{ Sin. } (\alpha - \varphi)}.$$

Hier zeigt sich sogleich, dafs r zweimal $= 0$ wird, sowohl wenn $\varphi = 0$, als auch, wenn $\varphi = 90°$ ist; dieses zeigt die vorhin gezeichnete Curve, die in C einen doppelten Punct hat. Für $\varphi = \alpha$ wird $r = a$, das heifst, ein unmittelbar an die Kugelfläche angelegtes Auge würde den leuchtenden Punct in eben dem Puncte sehen, wo es sich dicht an der Kugelfläche befindet. Und ebenso wird $r = A$ für $\varphi = -\alpha$. Die Curve geht daher durch P und durch Q.

Die Curve hat eine gerade Linie zur Asymptote. Man findet nämlich $r = \infty$, wenn $a \text{ . Sin. } (\alpha - \varphi) = A \text{ . Sin. } (\alpha + \varphi)$ oder Tang. $\varphi = \frac{(a - A) \text{ Tang. } \alpha}{(A + a)}$, das heifst, wenn φ derjenige negative, von R gegen P gerechnete, Bogen ist, dessen Tangente $= \frac{A - a}{A + a}$ Tang. α, so ist r unendlich. CS, CT sind die beiden Enden dieser Asymptote.

Die allgemeine Gleichung zwischen r und φ giebt

$$dr \left(A \text{ Sin. } (\alpha + \varphi) - a \text{ Sin. } (\alpha - \varphi)\right)$$
$$= 2aAd\varphi \text{ Cos. } 2\varphi - rd\varphi \left(A \text{ Cos. } (\alpha + \varphi) + a \text{ Cos. } (\alpha - \varphi)\right)$$

und dr wird $= \frac{2aA \text{ . } d\varphi}{(A - a) \text{ Sin. } \alpha}$, wenn $\varphi = 0$ ist, folglich ist

$\frac{dr}{r\,d\varphi}$ in diesem Falle, und auch dann, wenn $\varphi = 90^0$ ist, unendlich. In beiden Fällen ist daher der Radius eine Tangente der Curve, wie CR, CU es zeigen.

Mehr geometrische Eigenschaften dieser Curve anzugeben, gehört nicht hierher, obgleich sich zu Kästner's Bestimmungen noch Einiges hinzufügen lieſse.

Um die scheinbare Gröſse des im convexen Spiegel gesehenen Gegenstandes zu finden, würde erfordert, daſs man angäbe, um wieviel sich der Winkel CQA ändert, wenn der Lichtstrahl nicht von P, sondern von einem etwas von P entfernten Puncte herkäme. Da die Aufgabe sich nur näherungsweise auflösen läſst, so will ich bei einem leichten Falle stehen bleiben. Es sey O das Auge und die eine Grenze des Gegenstandes, den ich als sehr entfernt annehme, liege in der verlängerten CO, die andere Grenze des Gegenstandes erscheine von C aus gesehen in P und pA sey der mit PC parallele, den Spiegel treffende Lichtstrahl, der nach AO zurückgeworfen das Auge in O trifft. Da das Auge die eine Grenze des Gegenstandes in B gespiegelt sieht, die andere in A, so ist BOA die scheinbare Gröſse des unendlich entfernten Gegenstandes im Spiegel, OCP die scheinbare Gröſse des direct gesehenen Gegenstandes. Es sey $CO = a$, $CB = r$, $OCP = \alpha$, $COA = \varphi$, so ist $OCA = \alpha - ACP$ und $OCA + \varphi = ACP$, also $OCA = \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)$ und $a : r = \text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha + \varphi) : \text{Sin.}\,\varphi = a\,\text{Sin.}\,\varphi = r\,\text{Sin.}\,\frac{1}{2}(\alpha + \varphi)$. Die Entwickelung führt zu einer Gleichung vom dritten Grade; ich will mich aber begnügen, die Anwendung auf den Fall zu machen, wenn α und folglich noch mehr φ ziemlich klein ist; dann hätte man

$$a\varphi - \tfrac{1}{6}a\varphi^3 = \tfrac{1}{2}r\alpha + \tfrac{1}{2}r\varphi - \tfrac{1}{48}r(\alpha^3 + 3\alpha^2\varphi + 3\alpha\varphi^2 + \varphi^3),$$

woraus $\varphi = \frac{r}{2a - r}\alpha + B\alpha^3$ folgt, B aber

$$= \frac{1}{a - \frac{1}{2}r}\left[\left(\tfrac{1}{6}a - \tfrac{1}{4}r\right)A^3 - \tfrac{1}{16}rA^2 - \tfrac{1}{16}rA - \tfrac{1}{48}r\right].$$

Die Sonne also wird in einem Kugelspiegel von 6 Zoll Halbmesser schon in der Entfernung von $8\frac{1}{2}$ Fuſs nur 1 Min. im Durchmesser erscheinen. Wenn der Halbmesser des Mondes $= \frac{1}{240}$ seiner Entfernung von uns ist, so würde die Sonne, im Monde abgespiegelt, um die Zeit des Vollmondes nur ungefähr

4 Secunden im Durchmesser erscheinen[1]. Die scheinbare Kleinheit auch derjenigen Gegenstände, die nur mäſsig entfernt sind, wenn sie im Kugelspiegel gesehen werden, erklärt sich gleichfalls hieraus. *B.*

K u p f e r.

Cuprum; Cuivre; *Copper.*

Das Kupfer ist seit den ältesten Zeiten bekannt. Es findet sich gediegen, als Kupferoxydul, als Kupferoxyd in Verbindung mit Kohlen-, Phosphor-, Schwefel-, Salz-, Arsenik- oder Kieselsäure, als theils reines, theils mit vielen andern Schwefelmetallen verbundenes Schwefelkupfer und als Selenkupfer. Es wird theils auf dem trocknen, theils auf dem nassen Wege dargestellt. Bestehen die Erze aus gediegenem Kupfer, Kupferoxydul und kohlensaurem Kupferoxyd, so bedarf es bloſs des Schmelzens mit Kohle und einem Fluſs, der die Schmelzung der beigemengten Erden möglich macht. Enthalten sie dagegen Schwefelkupfer, so ist zur Entfernung des Schwefels wiederholtes Rösten und Schmelzen nöthig, welches letzteres neben den Schlacken im Anfange ein unreines, sehr schwefelarmes Schwefelkupfer, den *Kupferstein*, liefert, dann nach wiederholtem Rösten und Schmelzen dieses Steines ein unreines, schwefelhaltendes Kupfer, das *Schwarzkupfer*. Dieses wird durch Schmelzen an der Luft im Kupfergarheerde vom Rest der Unreinigkeiten befreiet, *gar gemacht*. Indem man das geschmolzene Kupfer in Gruben von oben nach unten erstarren läſst und nach und nach in Scheiben abhebt, erhält man es als *Scheiben-* oder *Rosettenkupfer*. Die Darstellung auf nassem Wege beruht auf der Niederschlagung des Kupfers aus Wasser, welches Kupfervitriol gelöst enthält, durch Eisen; sie liefert das *Cementkupfer*.

Das Kupfer krystallisirt meistens in Formen des regelmäſsigen, selten in Formen des 3- und 3gliedrigen Systems; es zeigt nach dem Schmelzen ein specifisches Gewicht von 8,788 und nach dem Ausziehen zu Draht von 8,878; es ist bedeutend hart und zähe; es ist, nebst dem Titan, das einzige rothgefärbte

1 Kästner's Rechnungen geben ähnliche Resultate. Nov. Comm. Gotting. VIII. 113.

Metall; sein Schmelzpunct liegt über dem des Silbers, unter dem des Goldes, und zwar bedarf es zum Schmelzen einer starken Rothglühhitze; in sehr hoher Temperatur geräth es ins Kochen.

Das *Kupferoxydul* (64 Kupfer auf 8 Sauerstoff) kommt natürlich als *Rothkupfererz* in regelmäfsigen Oktaedern und andern Gestalten des regelmäfsigen Systems vor und ist roth gefärbt. Sein *Hydrat* ist pommeranzengelb. Es verbindet sich nur mit wenigen Säuren, sofern es beim Zusammenbringen mit mehreren, indem sich der Sauerstoff blofs auf die Hälfte des Kupfers wirft, in sich auflösendes Oxyd und zurückbleibendes Metall zerfällt. Die *Kupferoxydulsalze* sind theils farblos, wie das salzsaure und essigsaure, theils roth, wie das schwefligsaure Kupferoxydul. Mit wässerigem Ammoniak bildet das Oxydul eine farblose Lösung, die sich an der Luft schnell von oben nach unten bläuet, im Verhältnisse, als sich das Oxydul in Oxyd verwandelt.

Das *Kupferoxyd* (32 Kupfer auf 8 Sauerstoff), welches sich in unreinem Zustande als *Kupferschwärze* vorfindet, bildet sich beim Glühen des Kupfers an der Luft als eine braunschwarze pulverige oder schuppige Masse, nur in heftiger Hitze schmelzbar, durch Kohle leicht reducirbar. Das *Kupferoxydhydrat*, welches beim Versetzen eines Kupferoxydsalzes mit überschüssigem wässerigen Kali niederfällt, ist hellblau. Die *Kupferoxydsalze* sind im wasserfreien Zustande meistens weifs, im gewässerten blau oder grün; ihre Lösungen schmecken sehr metallisch; Zink, Eisen, Blei und viele andere Metalle schlagen aus ihnen metallisches Kupfer nieder; kohlensaure Alkalien fällen sie bläulich grün, blausaures Kali gelb, blausaures Eisenoxydul-Kali dunkelroth, Hydrothionsäure braunschwarz und der durch ätzendes oder kohlensaures Ammoniak hervorgebrachte Niederschlag wird in einem Ueberschusse derselben mit lebhaft lasurblauer Farbe gelöst. Folgendes sind die wichtigsten Kupferoxydsalze: *salpetersaures Kupferoxyd*, grofse blaue Tafeln, sehr zerfliefslich; *schwefelsaures Kupferoxyd* oder *Kupfervitriol*, in blauen Tafeln des 1- und 1gliedrigen Systems krystallisirt, beim Erhitzen erst unter Wasserverlust weifs werdend, dann in heftiger Glühhitze alle Säure verlierend, in 4 Theilen Wasser löslich.

Einfach salzsaures Kupferoxyd, smaragdgrün, schwierig

krystallisirend, zerfliefslich, beim Erwärmen in Chlorkupfer übergehend. *Viertelsalzsaures Kupferoxyd*, das Salzkupfererz der Mineralogen, smaragdgrün, nicht in Wasser löslich. *Phosphorsaures Kupferoxyd*, natürlich als *Pseudomalachit* vorkommend, nicht in Wasser löslich. *Kohlensaures Kupferoxyd*, von welchem natürlich 2 Arten, die *Kupferlasur* und der *Malachit*, vorkommen, unter denen der letztere weniger Kohlensäure enthält, künstlich als grünes Pulver darstellbar, nicht in Wasser, aber mit blauer Farbe in kohlensaurem Ammoniak oder Kali löslich. *Arseniksaures Kupferoxyd*, von welchem die Natur verschiedene theils blaue, theils grüne Arten liefert, im Gehalt von Säure und Wasser abweichend, wie *Linsenerz*, *Euchroit*, *Olivenerz*, *Strahlenerz* und *Kupferglimmer*, *arseniksaures Kupferoxyd*, wohin das *Scheelesche* und *Schweinfurther Grün* und andere theils gelbgrüne, theils smaragdgrüne Farbstoffe gehören. Das *essigsaure Kupferoxyd* im neutralen Zustande ist der *krystallisirte Grünspan*, welcher in dunkelgrünen schiefen rhombischen Säulen anschiefst und leicht in Wasser löslich ist. Der *gemeine Grünspan* ist ein basisches Salz und deshalb nur unvollkommen in Wasser löslich. Das *Kupferoxyd* ist in wässerigem Ammoniak mit dunkellasurblauer Farbe löslich. Die Verbindung des Kupferoxyd-Ammoniaks mit schwefelsaurem Ammoniak oder der *Kupfersalmiak* schiefst in lasurblauen Säulen an.

Das *Halbchlorkupfer* (64 Kupfer auf 36 Chlor) ist ein weifses Pulver, welches nach dem Schmelzen zu einer gelblichen krystallinischen Masse gesteht, in der Hitze das Chlor nicht verliert und sich nicht in Wasser, aber in wässeriger Salzsäure zu einer farblosen Flüssigkeit auflöst. Das *Einfachchlorkupfer* (32 Kupfer auf 36 Chlor) ist braungelb, verliert in der Hitze die Hälfte des Chlors und löst sich in Wasser zu salzsaurem Kupferoxyd auf.

Das *Halbschwefelkupfer* (64 Kupfer auf 16 Schwefel) findet sich als Kupferglanz in dunkelbleigrauen, dem 6gliedrigen Systeme angehörenden Säulen; es ist etwas geschmeidig, leichter schmelzbar als Kupfer und verliert, bei abgehaltener Luft erhitzt, keinen Schwefel. In der Natur kommen viele Verbindungen des Halbschwefelkupfers mit andern Schwefelmetallen vor, wohin Kupferkies, Buntkupfererz, Silberkupferglanz u. s. w. gehören.

Das *Einfachschwefelkupfer* (32 Kupfer auf 16 Schwefel) wird durch Fällung der Kupferoxydsalze mit Hydrothionsäure in braunschwarzen Flocken erhalten, die, bei abgehaltener Luft erhitzt, die Hälfte des Schwefels verlieren und, im feuchten Zustande der Luft dargeboten, sich zu schwefelsaurem Kupferoxyd oxydiren.

Das *Halbselenkupfer* (64 Kupfer auf 40 Selen) findet sich natürlich; es ist stahlgrau und schmilzt weit unter der Glühhitze.

Das *Phosphorkupfer* ist weifs und hart; bei sehr wenig Phosphor ist es noch röthlich und dem Stahle an Härte nahe kommend.

Das *Einfachcyankupfer* (32 Kupfer auf 26 Cyan) fällt beim Vermischen von Kupferoxydsalzen mit wässerigem blausaurem Alkali als ein gelbes Pulver nieder, dieses verwandelt sich beim Erhitzen der Flüssigkeit unter Entwickelung der Hälfte des Cyans in weifses *Halbcyankupfer* (64 Kupfer auf 26 Cyan). Dasselbe bildet mit Cyankalium und andern Cyanmetallen zusammengesetzte Cyanmetalle, von denen sich mehrere in Wasser zu Verbindungen des blausauren Kupferoxyduls mit einem andern blausauren Salze auflösen. Beim Versetzen der Kupferoxydsalze mit Schwefelblausäure und Eisenvitriol fällt schwefelblausaures Kupferoxydul als ein weifses Pulver nieder, welches sich beim Erhitzen unter Wasserverlust in *Halbschwefelcyankupfer* verwandelt.

Als wichtigere Verbindungen des Kupfers mit andern Metallen sind anzuführen: *Arsenikkupfer*, durch Glühen von Kupfer mit arseniger Säure und schwarzem Flufs zu erhalten, weifs und spröde; *Goldkupfer*, sehr ductil, um so röther und schmelzbarer, jemehr es Kupfer hält, und bei 7 Gold auf 1 Kupfer am härtesten; *Silberkupfer*, hart und um so röther, je kupferhaltiger es ist[1]. *G.*

Kyanometer.

Cyanometer; *Cyanometrum;* cyanomètre[2]. Ein Instrument, um die verschiedenen Grade desjenigen Blau,

1 Andere Legirungen s. Art. *Zink* und *Zinn*.

2 Das Wort ist von κύανος, dunkelblau angelaufener Stahl, Lazurstein, blaue Kornblume, blaue Farbe zum Anstreichen, abgeleitet.

welches das Himmelsgewölbe uns darbietet, zu bestimmen. Da es nämlich in meteorologischer Beziehung wichtig schien, nicht blofs anzugeben, dafs das eine Mal der Himmel weifslich blau, das andere Mal dunkelblau aussah, sondern auch die feineren Abstufungen genau zu bestimmen und dadurch eine Vergleichung verschiedener Beobachtungen möglich zu machen, so gab Saussure ein Instrument an, um durch Vergleichung mit vorliegenden Farbentafeln diese Bestimmung zu erhalten[1]. Sein Kyanometer besteht daher aus Farbentafeln, die von den schwächsten blauen Färbungen bis zu den tiefsten fortschreiten. Nr. 0 ist die gänzliche Abwesenheit des Blau, ein weifser Papierstreifen, der eher einen etwas gelblichen Teint zeigt; Nr. 1 das schwächste Blau; Nr. 2 stärkeres Blau und so ferner bis zu dem dunkelsten Blau, welches man mit fein geriebenem, vollkommen guten, mit Gummiwasser angemachten Berliner Blau erhalten kann. Ueber dieses Blau hinaus gehen dann noch bis zum Schwarz Mischungen von Blau mit Beinschwarz bis zu Nr. 52, dem vollkommenen Schwarz hin. Um aber diese Abstufungen in den auf einander folgenden Nummern zu erhalten und sie so zu bestimmen, dafs eine Regel der Verfertigung und eine Vergleichbarkeit mehrerer Kyanometer statt finde, setzt Saussure Folgendes fest. Man nehme einen schwarzen Kreis von 1¾ Linien Durchmesser auf weifsem Grunde und lasse ihn nach und nach in immer gröfseren Entfernungen aufstellen, bis man ihn nicht mehr unterscheiden kann; in eben dieser Entfernung lasse man die Tafel 0 und die Tafel 1 aufstellen und der letztern gerade die schwache Färbung geben, dafs man in so grofser Entfernung beide Farben nicht mehr unterscheiden kann; ebenso lasse man in derselben Entfernung die Tafeln Nr. 1 und Nr. 2 aufstellen und Nr. 2 diejenige Färbung geben, die in dieser Entfernung nicht mehr als von Nr. 1 verschieden erscheint, in jeder geringern Entfernung aber als etwas dunkler erkannt wird; indem Saussure so durch alle Abstufungen fortschritt und dabei die durch den Kreis von 1¾ Linien bestimmte Entfernung als Mafs gebrauchte, erhielt er jene 53 Abstufungen. Wollte man sich auf wenigere beschränken, also die Unterschiede von einem Blau zum andern gröfser nehmen, so würde man gröfsere Entfernungen wählen müssen

1 Journal de Physique. 1791. Mars. 199 und Gren's Journal der Physik. VI. 93.

oder die Entfernung, wo ein gröſserer schwarzer Kreis auf weiſsem Grunde unkenntlich wird, zum Maſse der Entfernungen nehmen müssen. Diese Farbentafeln werden dann mit dem Himmel verglichen und es erhellet also, was es heiſst, wenn das Blau des Himmels einer gewissen Nummer gleich angegeben wird. Man klebt die Farbenblätter am besten auf den Rand einer Scheibe von weiſser Pappe nach der Reihe auf, stellt diese Scheibe zwischen den Himmel und das Auge und stellt die Vergleichung an. Die Farbentafel muſs dabei vollkommen hell erleuchtet seyn.

Ungeachtet dieser Vorschriften scheint es wohl immer noch schwierig zu seyn, zwei völlig correspondirende Farbentafeln zu erhalten, und die Angaben verschiedener Beobachter über das Blau des Himmels können also wohl etwas ungleich ausfallen, was jedoch nach Prevost's Urtheil nicht erheblich ist[1].

Saussure hat mit diesem Instrumente Beobachtungen angestellt, und da er, wohl mit Recht, die weiſse Färbung des Himmels als Folge der in der Luft schwebenden Dünste ansah, so glaubte er, aus der Zahl der kyanometrischen Angabe die Menge der Dünste bestimmen zu können. Daſs diese Menge in ziemlich gleichem Fortschritte mit jenen Zahlen zusammengehöre, glaubte er durch folgenden Versuch beweisen zu können. Er nahm eine sehr dunkelblaue Kupferauflösung, welche den Nummern 48 bis 49 entsprach, und eine zweite weiſse Mischung (Nr. 0 entsprechend), welche aus 2 Unzen Alaun, in 12 Unzen Wasser aufgelöst und mit 1 Unze Ammoniak in 6 Unzen Wasser niedergeschlagen, bestand; diese Flüssigkeiten zu gleichen Theilen gemischt stimmten mit Nr. 23 oder 24, dagegen 3 Theile Blau mit 1 Theil Weiſs gemischt stimmte mit Nr. 34 bis 35 überein.

Die Beobachtungen zeigen, daſs das Blau des Himmels am Horizonte am meisten ins Weiſs übergeht, daſs aber auch in gleichen Höhen über dem Horizonte das Blau unterhalb der Sonne blasser ist, als an der entgegengesetzten Seite des Himmels. Auf Bergen ist das Blau des Himmels dunkler als in der Ebene, weil die dünne Luft über den Bergen, zumal da sie bei vorwaltender Heiterkeit wenig Dünste enthält, überhaupt nur wenig Licht reflectirt und daher sich dem Schwarz schon nähert,

1 G. XXIV. 82.

was der Himmel zeigen müſste, wenn gar keine das Licht zurückwerfende Luft vorhanden wäre. Auf dem Montblanc fand Saussure das Blau des Himmels mit Nr. 39 übereinstimmend. Um den Unterschied der Bläue des Himmels auf Bergen und in niedrigen Standpuncten, so wie zu verschiedenen Tageszeiten zu zeigen, dienen folgende Beobachtungen, die Saussure auf dem Col du Géant (10578 Fuſs über dem Meere), L'Eveque in Chamouny (3144 Fuſs hoch), Senebier und Pictet in Genf (1252 F. hoch) um das Zenith und zu gleichen Zeiten anstellten. Auf dem ersten Standpuncte war die Bläue des Himmels um 4 Uhr Morgens 15 bis 16, um 6 Uhr 27, um 10 Uhr bis 2 Uhr 31, um 4 Uhr 24, um 6 Uhr $18\frac{1}{2}$, um 8 Uhr $5\frac{1}{2}$; in Chamouny um 4 Uhr $14\frac{1}{2}$, um 11 Uhr 18 bis 19, Nachmittags bis 6 Uhr ziemlich ungeändert, Abends 8 Uhr 16; in Genf um 6 Uhr 15, um 8 Uhr 21, um 10 Uhr $22\frac{1}{2}$, um 4 Uhr 20, um 6 Uhr 16. Daſs der Himmel im Chamounythale weiſslicher, als in dem tiefer liegenden Genf erschien, ist aus der Eigenschaft der Thäler, mehr Dünste zu enthalten, zu erklären. Die Abstufungen der Farben vom Horizont bis zum Zenith waren:

Höhen	auf dem Géant 15. Juli 1790	in Genf 21. April 1790
0 Grade	11	4
10 -	20	9
20 -	31	13
40 -	37	$17\frac{1}{2}$
60 bis 90 -	37	20.

Prevost hat versucht, diese Beobachtungen so zu berechnen, daſs er den abnehmenden Grad der Bläue als entsprechend der Länge derjenigen geraden Linie setzte, welche der Strahl in der Atmosphäre durchläuft. Richte ich mein Auge nach der scheinbaren Höhe $= \alpha$, so ist die in der dichteren Atmosphäre durchlaufene Linie $=$ a Cosec. α und b — a Cosec. α müſste für alle Höhen die Zahlen ausdrücken, welche die Beobachtung angab, a und b aber müſsten constante Werthe behalten. Prevost zeigt, daſs dieses nahe genug statt findet, indeſs stützt er sich dabei viel zu sehr auf einzelne Beobachtungen, als daſs man eben groſses Vertrauen auf diese Schlüsse setzen könnte[1].

1 G. XXIV. 77.

Ein wesentlich verschiedenes Instrument, das aber denselben Zweck zu erfüllen dienen soll, hat Biot unter dem Namen Colorigrade, Instrument, die Farbenabstufungen der Körper zu bestimmen, angegeben.

Bei den Farben der Ringe, die sich durch Zurückwerfung an dünnen Körpern darstellen, müfsten, nach Newton's Theorie, alle Farbenmischungen und also alle möglichen Abstufungen der Farben sich zeigen; in ihnen und in den ihnen entsprechenden, durch Polarisirung des Lichtes hervorgehenden Farben mufs man daher die gegebene Farbe irgend eines Körpers wiederfinden, und nach der Stelle in jenen Ringen, welcher sie entspricht, sie strenge bezeichnen können. Die Gründe, worauf diese Behauptung beruht, kommen in den Artikeln *Anwandlungen* und *Polarisirung* des Lichtes vor und ich mufs mich hier begnügen, nur Biot's Anweisung zur Darstellung des Colorigrade mitzutheilen. Vor das Rohr eines Fernrohrs setzt man ein schwarzes Glas so ein, dafs es vermittelst einer Schraube die Neigung erlangen kann, welche erforderlich ist, um den nach der Richtung der Axe des Rohres durchgehenden Strahl vollkommen zu polarisiren. Ein am andern Ende des Rohres eingesetztes achromatisches Prisma von Kalkspath zeigt, dafs diese Bedingung erfüllt ist, wenn es vier Stellungen des Prisma's giebt, wo der Strahl sich nicht mehr in zwei Strahlen zerlegt. Um nun die Farben, deren man zur Vergleichung mit einer gegebenen bedarf, hervorzubringen, setzt man zwischen das schwarze Glas und das Prisma eine senkrecht auf die Axe geschnittene Platte eines krystallisirten Körpers, die man in einer Einfallsebene, welche einen Winkel von 45 Graden mit der Reflexionsebene auf dem schwarzen Glase macht, in verschiedene Neigungswinkel stellen kann. Dann erscheinen die Farben, die sich mit der Neigung ändern. Um langsame Farbenänderungen zu erhalten, nimmt man am besten zwei Glimmerblättchen, die man aus einem einzigen rechtwinkligen Blättchen geschnitten und so auf einander gelegt hat, dafs die gemeinschaftliche Grenzlinie des Schnittes in der einen rechtwinklig gegen die in der andern ist. So lange diese Blättchen senkrecht gegen den Strahl sind, nehmen sie keiner Farbe ihre Polarisation; bei einiger Neigung zeigt sich ein leichtes Blau, bei stärkerer Neigung das Weifs der ersten Ordnung, dann blafsgelb, orange, roth und die ganze Reihe der Farben in Newton's

Tafel. Zum Kyanometer schlägt Biot statt der Glimmerplatte eine 3 Millimeter dicke Platte von Bergkrystall senkrecht auf die Axe geschnitten vor, die bei dieser Dicke einen weiſsen, ungewöhnlich gebrochenen Strahl zeigt, welcher bei einer Drehung des Prisma's links oder rechts allmälig in bläulich und endlich in tiefes Blau übergeht, so also zum Abmessen der Bläue des Himmels dient[1].

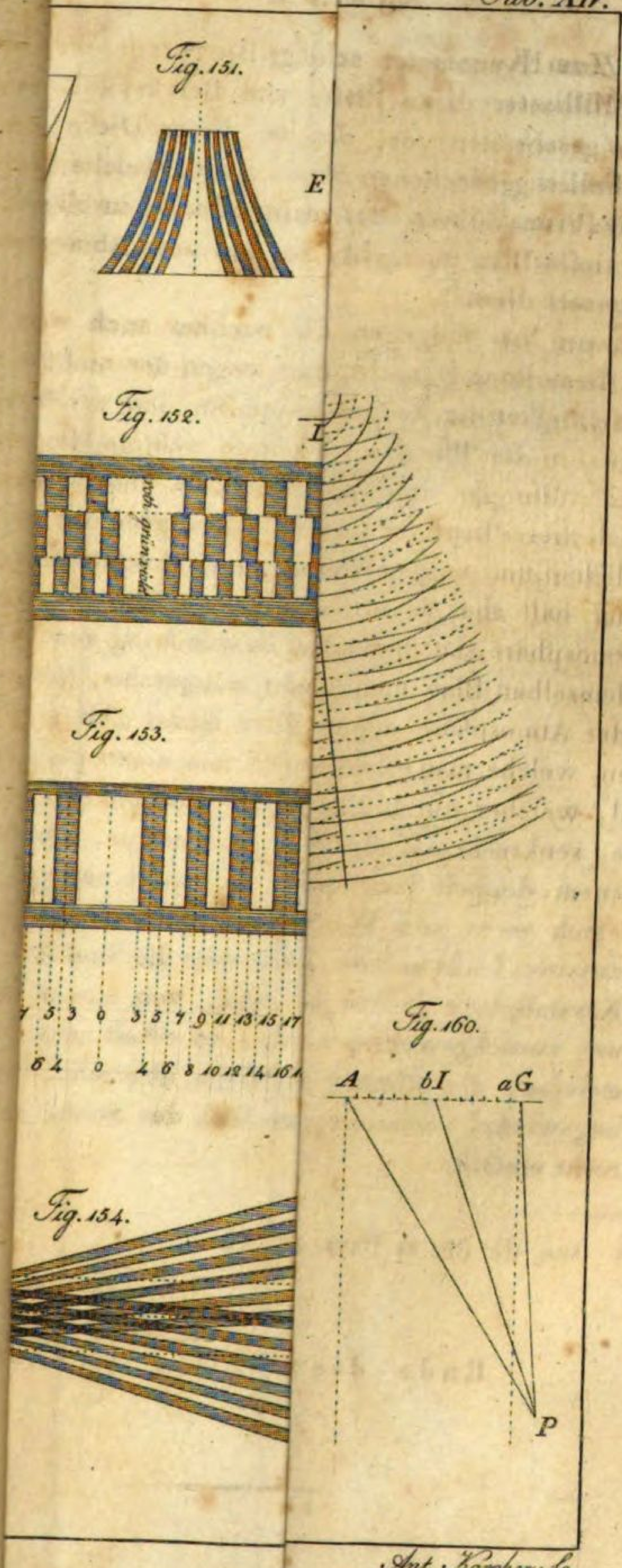
Arago hat hiergegen die nachher auch von Biot anerkannte Bemerkung gemacht, daſs wegen der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit der Körper einige Strahlen verloren gehen und daher das in der Theorie allerdings richtige Hervorgehen *aller* Farbenabstufungen wohl nicht strenge statt finde; indeſs sey dennoch dieses Instrument vollkommen geeignet zu einer unveränderlichen und vergleichbaren Farbenbestimmung. Zum Kyanometer hält aber Arago eine andere Einrichtung, die der in der Atmosphäre statt findenden Beimischung von Weiſs zu einem und demselben Blau noch mehr entspreche, für angemessener. Das der Atmosphäre eigene Blau findet sich in der Reihe der Farben, welche man erhält, wenn man einen polarisirten weiſsen Strahl, welcher durch eine Bergkrystallplatte von 6 Millimeter Dicke, senkrecht auf die Axe geschnitten, durchgegangen ist, mit einem doppelt brechenden Krystalle zerlegt. Dieses Blau neigt sich mehr zum Weiſs hin, wenn es minder oder mehr unpolarisirtes Licht enthält. Läſst man die Strahlen, welche durch jene Krystallplatte gedrungen sind, von einem Glase unter 35° Neigung zurückgeworfen werden, so erhält man ein sehr schönes Himmelblau, das allmälig in Weiſs übergeht, wenn man den Neigungswinkel verändert, so daſs der Strahl mehr und mehr senkrecht einfällt. *B.*

1 Ann. de Ch. et Phys. IV. 91.

Ende des fünften Bandes.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. XIV.



Ant. Karcher Sc.

Tafel. Zum Kyanometer schlägt Biot statt der Glimmerplatte eine 3 Millimeter dicke Platte von Bergkrystall senkrecht auf die Axe geschnitten vor, die bei dieser Dicke einen weiſsen, ungewöhnlich gebrochenen Strahl zeigt, welcher bei einer Drehung des Prisma's links oder rechts allmälig in bläulich und endlich in tiefes Blau übergeht, so also zum Abmessen der Bläue des Himmels dient[1].

Arago hat hiergegen die nachher auch von Biot anerkannte Bemerkung gemacht, daſs wegen der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit der Körper einige Strahlen verloren gehen und daher das in der Theorie allerdings richtige Hervorgehen *aller* Farbenabstufungen wohl nicht strenge statt finde; indeſs sey dennoch dieses Instrument vollkommen geeignet zu einer unveränderlichen und vergleichbaren Farbenbestimmung. Zum Kyanometer hält aber Arago eine andere Einrichtung, die der in der Atmosphäre statt findenden Beimischung von Weiſs zu einem und demselben Blau noch mehr entspreche, für angemessener. Das der Atmosphäre eigene Blau findet sich in der Reihe der Farben, welche man erhält, wenn man einen polarisirten weiſsen Strahl, welcher durch eine Bergkrystallplatte von 6 Millimeter Dicke, senkrecht auf die Axe geschnitten, durchgegangen ist, mit einem doppelt brechenden Krystalle zerlegt. Dieses Blau neigt sich mehr zum Weiſs hin, wenn es minder oder mehr unpolarisirtes Licht enthält. Läſst man die Strahlen, welche durch jene Krystallplatte gedrungen sind, von einem Glase unter 35° Neigung zurückgeworfen werden, so erhält man ein sehr schönes Himmelblau, das allmälig in Weiſs übergeht, wenn man den Neigungswinkel verändert, so daſs der Strahl mehr und mehr senkrecht einfällt. *B.*

1 Ann. de Ch. et Phys. IV. 91.

Ende des fünften Bandes.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. XIV.

Fig. 151.

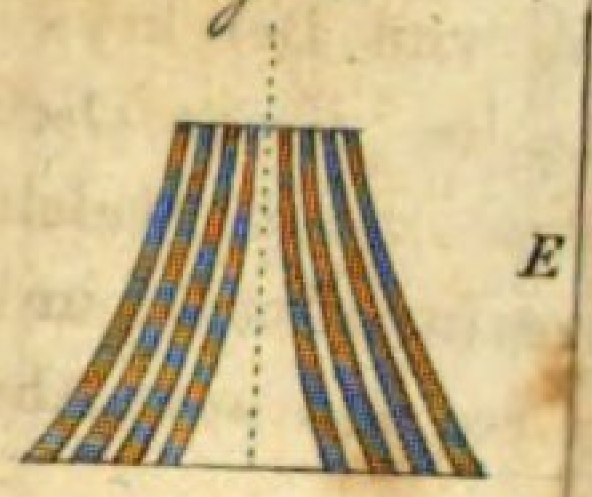


Fig. 152.

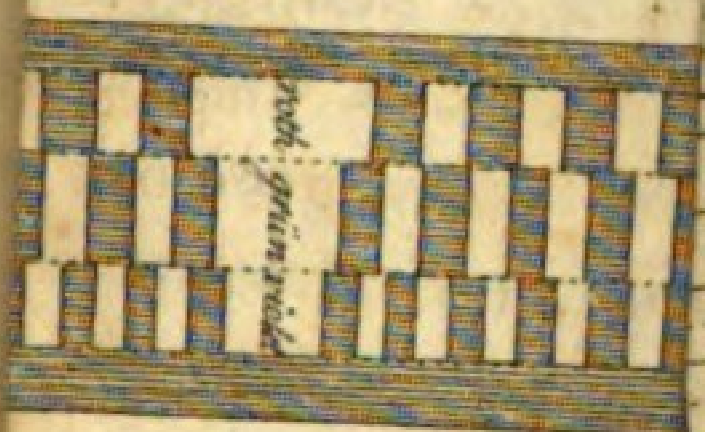




Fig. 153.

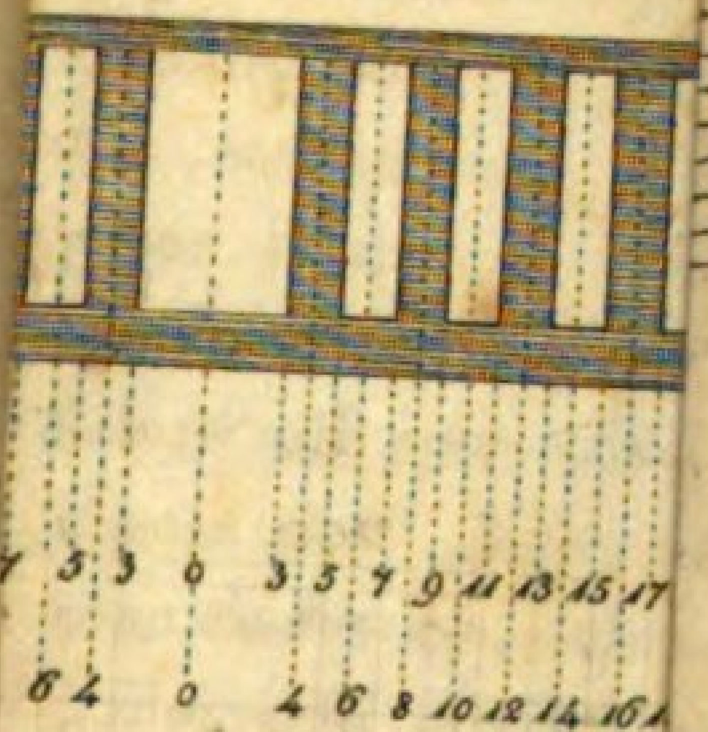


Fig. 154.

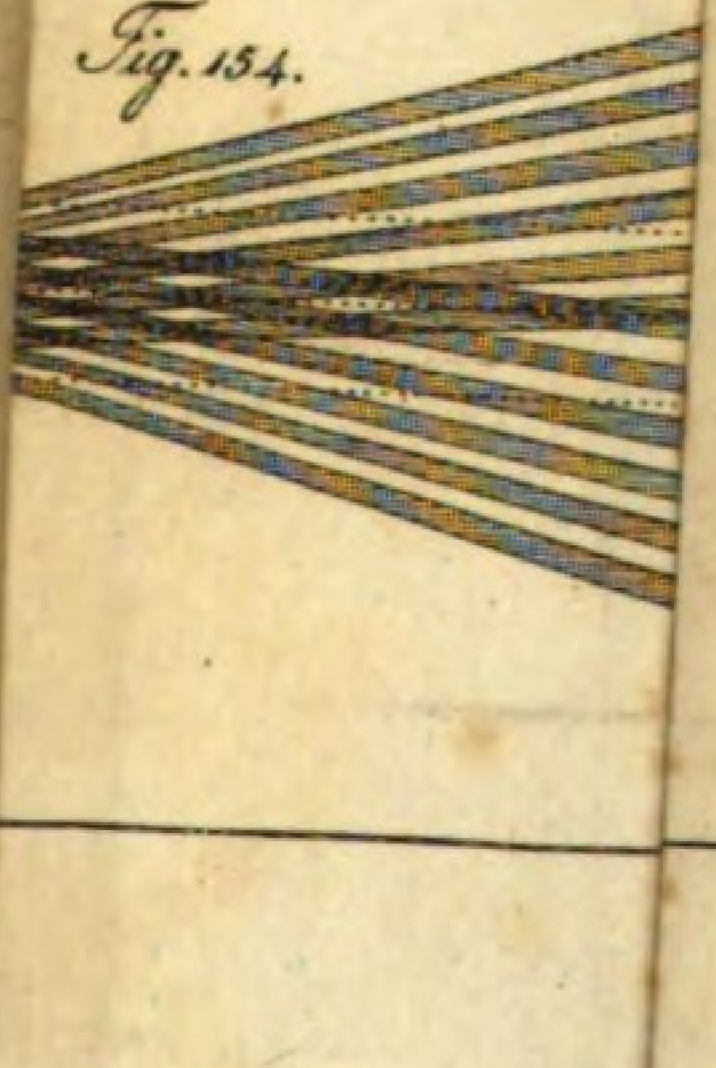
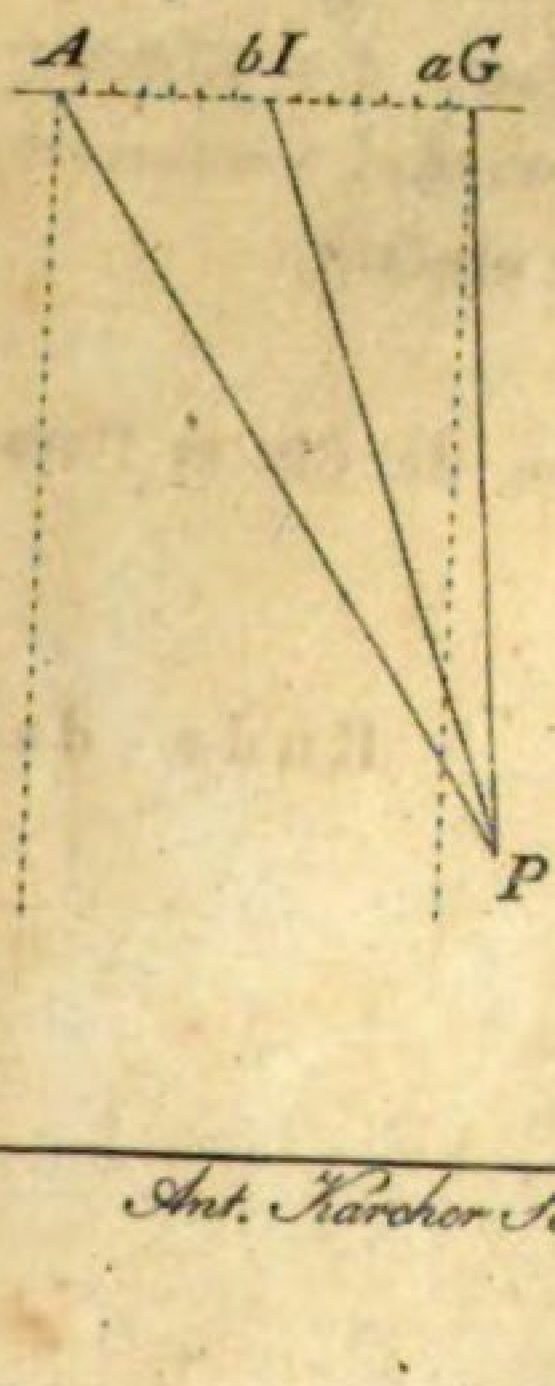


Fig. 160.



Ant. Karcher Sc.

Tafel. Zum Kyanometer schlägt Biot statt der Glimmerplatte eine 3 Millimeter dicke Platte von Bergkrystall senkrecht auf die Axe geschnitten vor, die bei dieser Dicke einen weiſsen, ungewöhnlich gebrochenen Strahl zeigt, welcher bei einer Drehung des Prisma's links oder rechts allmälig in bläulich und endlich in tiefes Blau übergeht, so also zum Abmessen der Bläue des Himmels dient[1].

Arago hat hiergegen die nachher auch von Biot anerkannte Bemerkung gemacht, daſs wegen der nicht vollkommenen Durchsichtigkeit der Körper einige Strahlen verloren gehen und daher das in der Theorie allerdings richtige Hervorgehen *aller* Farbenabstufungen wohl nicht strenge statt finde; indeſs sey dennoch dieses Instrument vollkommen geeignet zu einer unveränderlichen und vergleichbaren Farbenbestimmung. Zum Kyanometer hält aber Arago eine andere Einrichtung, die der in der Atmosphäre statt findenden Beimischung von Weiſs zu einem und demselben Blau noch mehr entspreche, für angemessener. Das der Atmosphäre eigene Blau findet sich in der Reihe der Farben, welche man erhält, wenn man einen polarisirten weiſsen Strahl, welcher durch eine Bergkrystallplatte von 6 Millimeter Dicke, senkrecht auf die Axe geschnitten, durchgegangen ist, mit einem doppelt brechenden Krystalle zerlegt. Dieses Blau neigt sich mehr zum Weiſs hin, wenn es minder oder mehr unpolarisirtes Licht enthält. Läſst man die Strahlen, welche durch jene Krystallplatte gedrungen sind, von einem Glase unter 35° Neigung zurückgeworfen werden, so erhält man ein sehr schönes Himmelblau, das allmälig in Weiſs übergeht, wenn man den Neigungswinkel verändert, so daſs der Strahl mehr und mehr senkrecht einfällt.

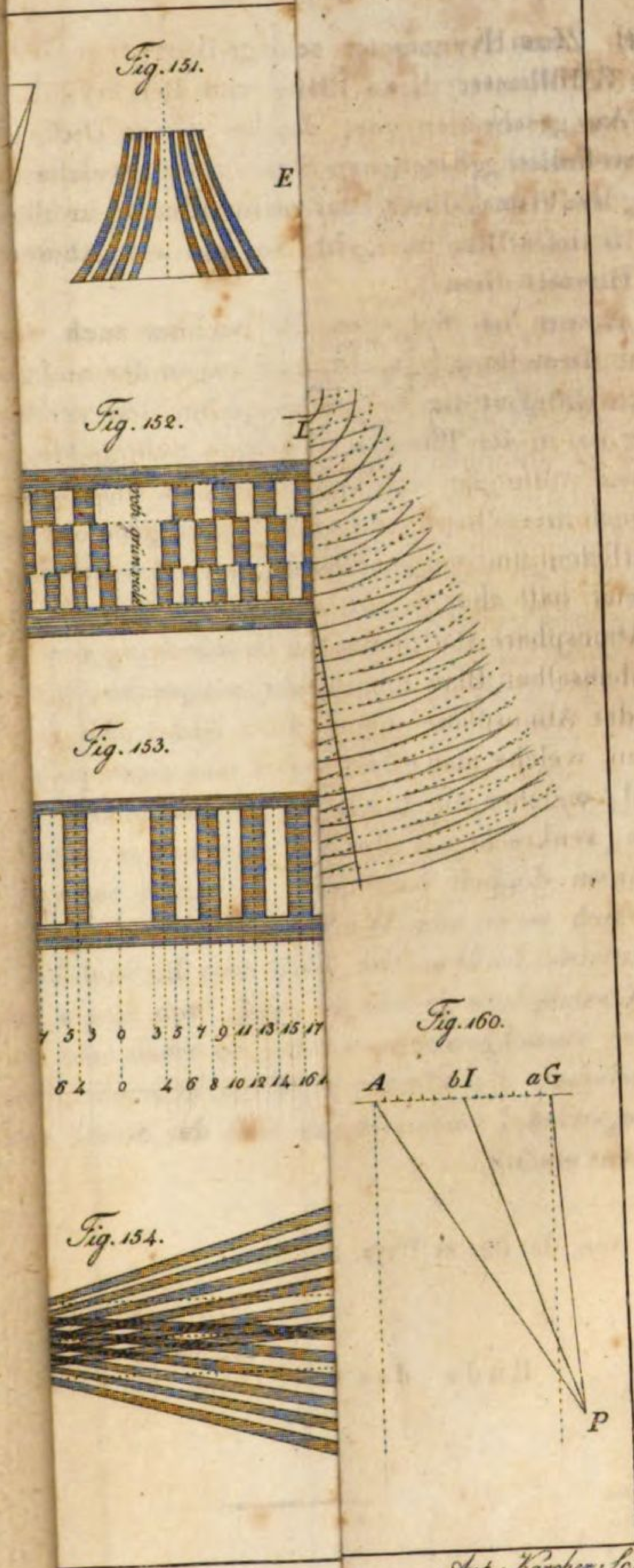
B.

1 Ann. de Ch. et Phys. IV. 91.

Ende des fünften Bandes.

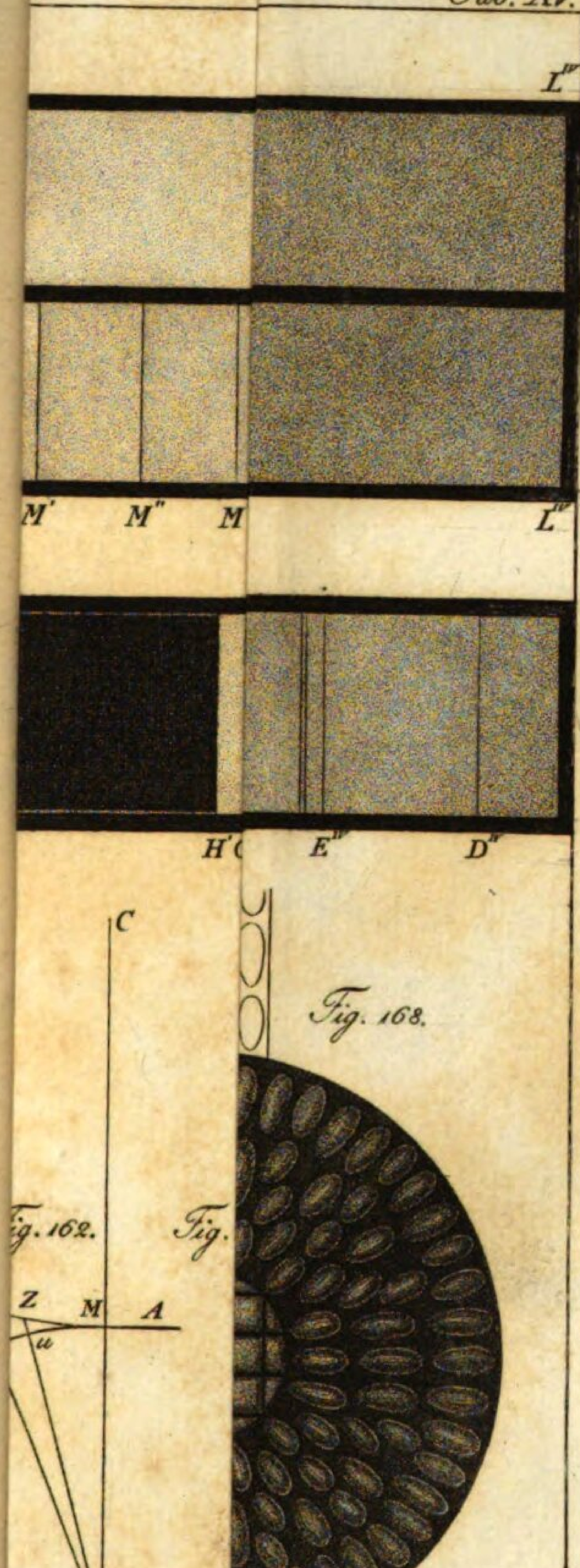
Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. XIV.

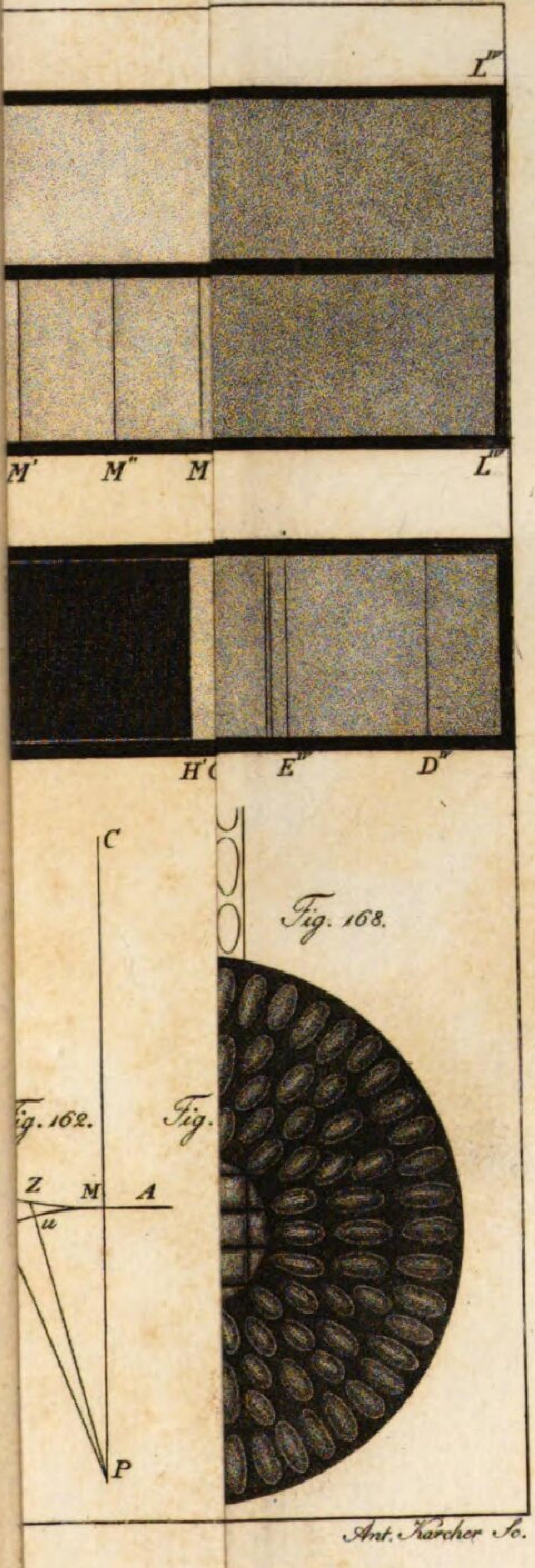


Ant. Karcher Sc.

Tab. XV.

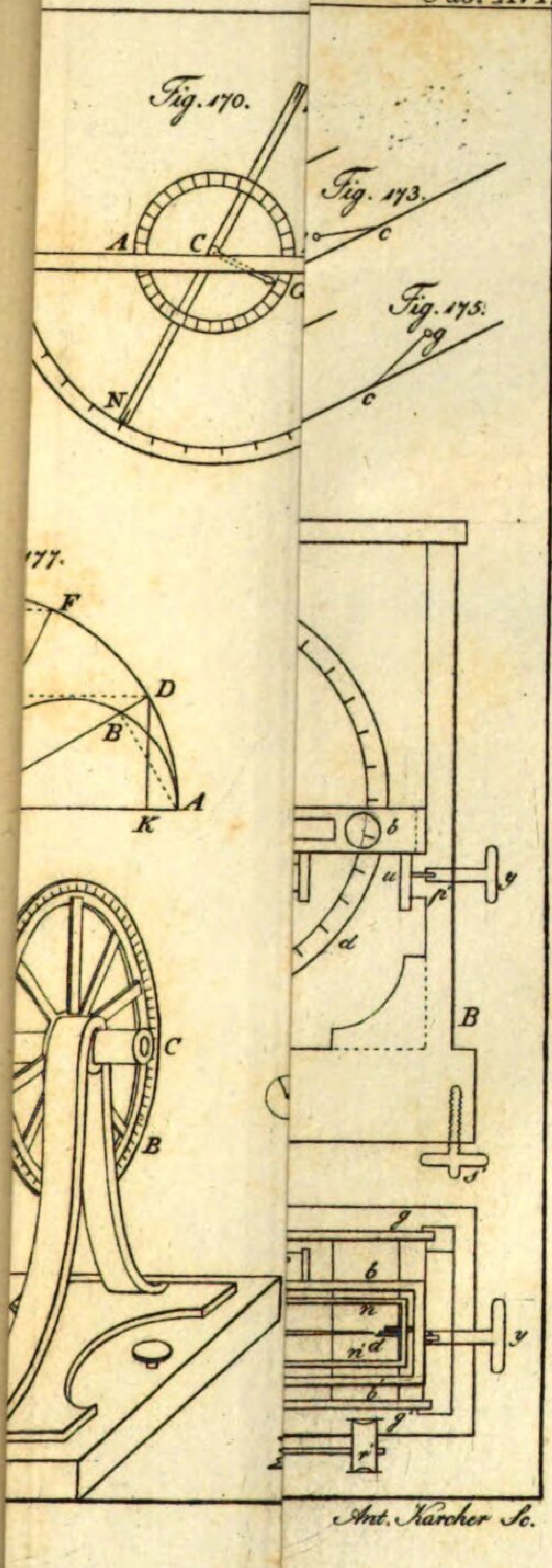


Ant. Karcher Sc.



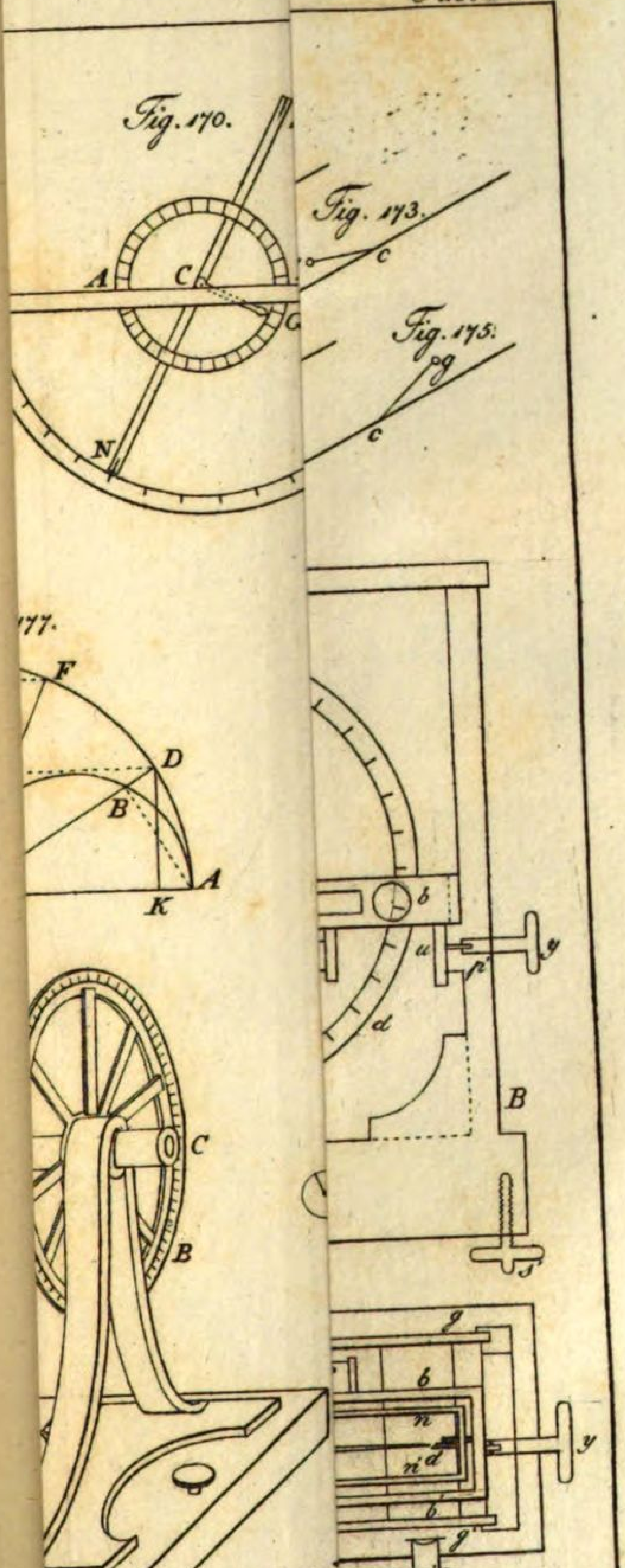
Ant. Karcher Sc.

Tab. XVI.

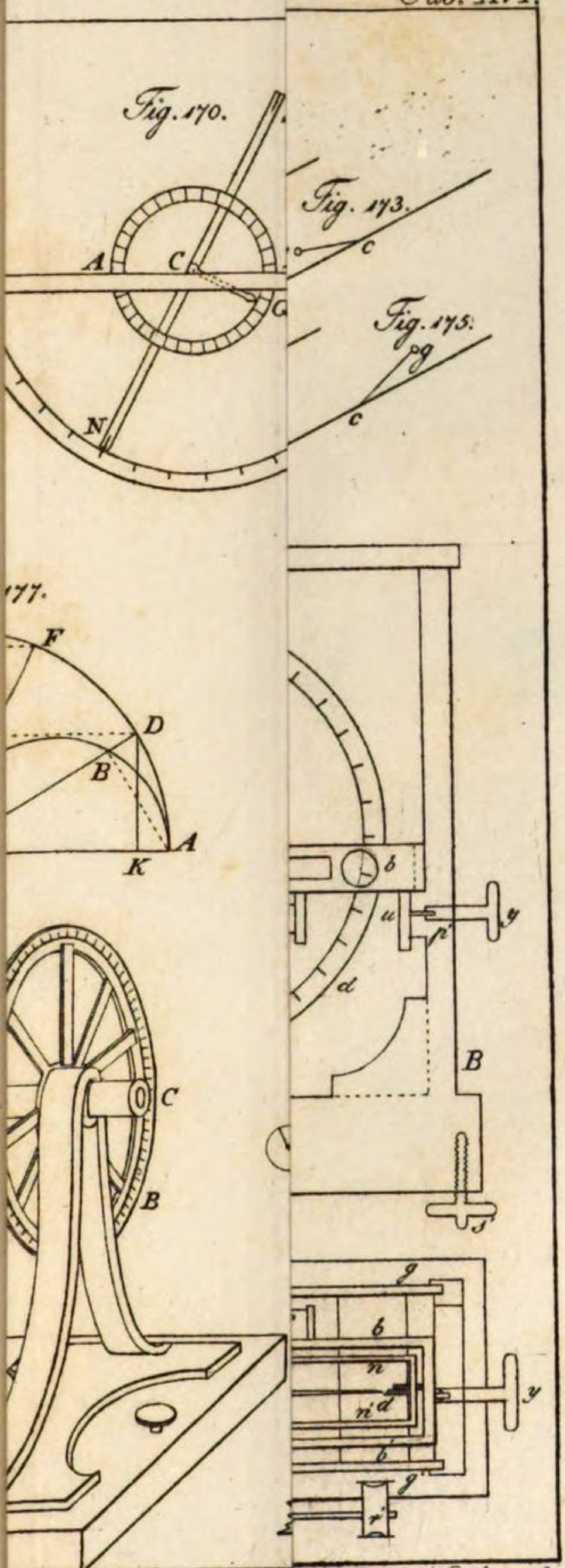


Ant. Karcher Sc.

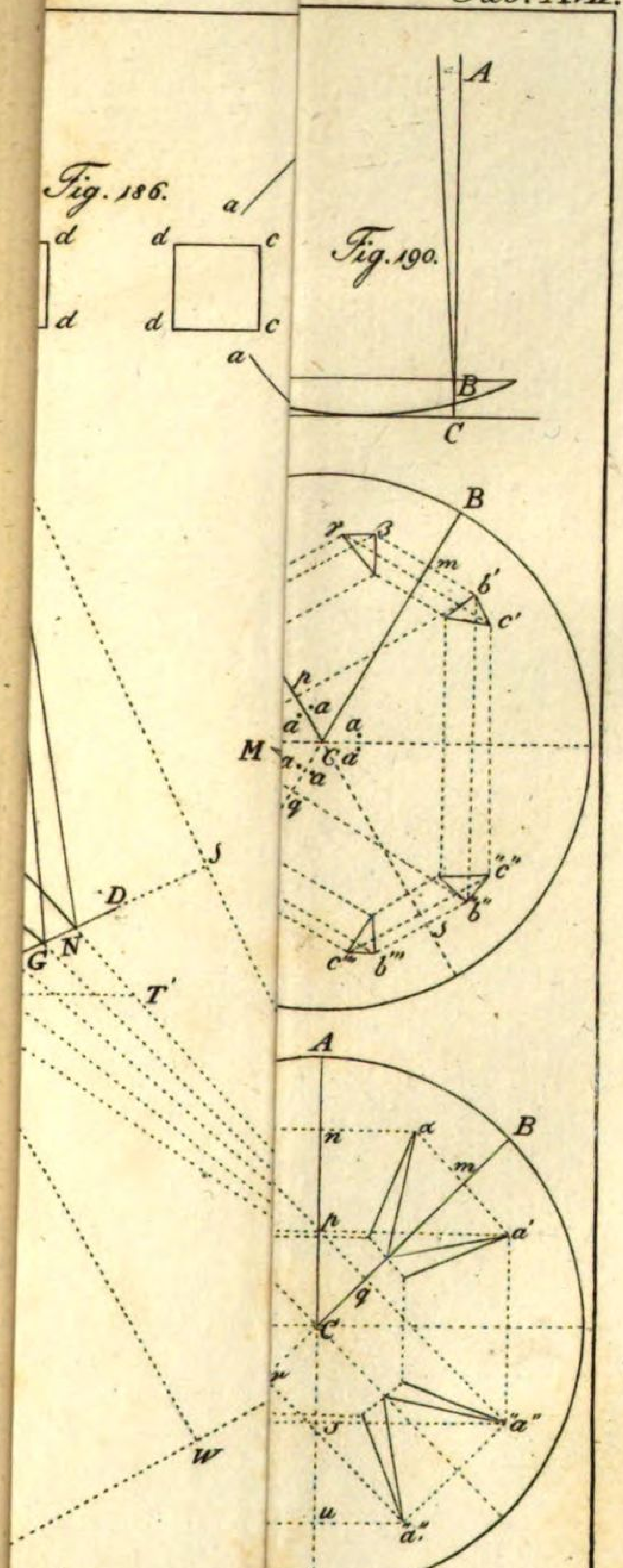
Tab. XVI.



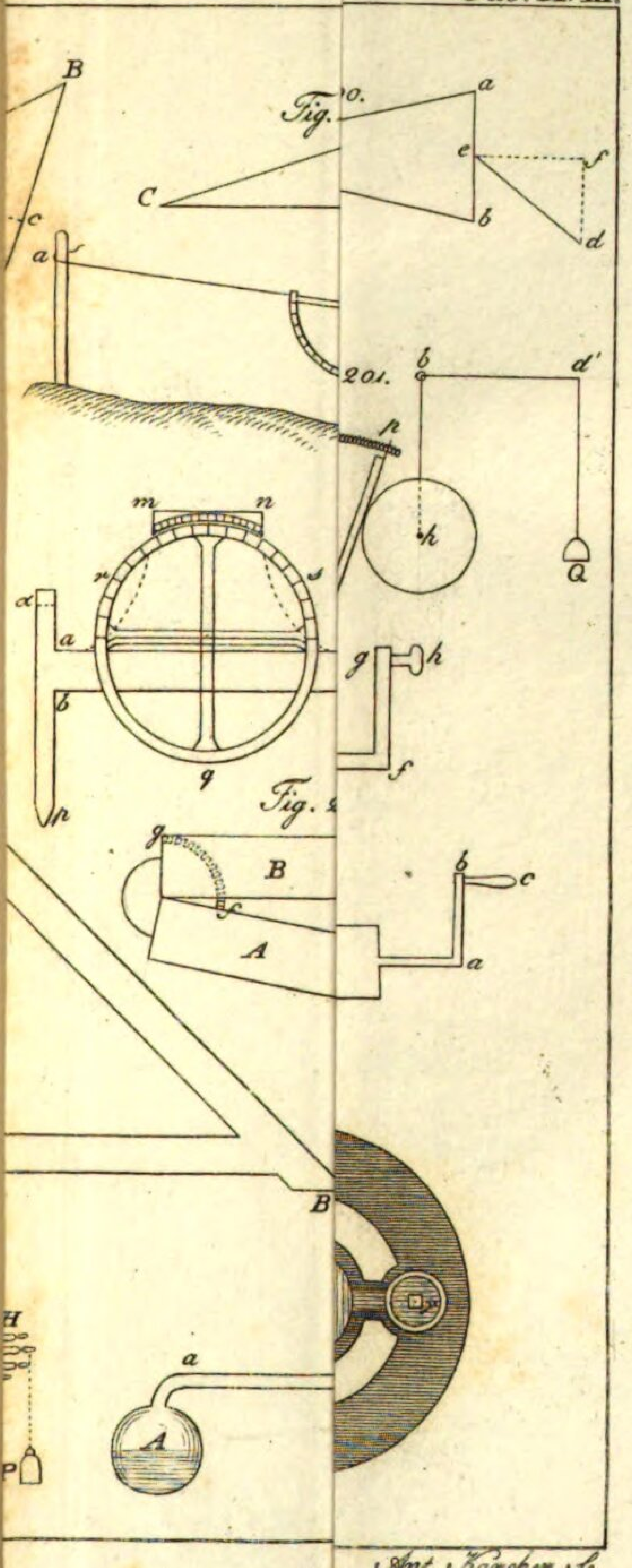
Ant. Karcher Sc.



Ant. Karcher Sc.

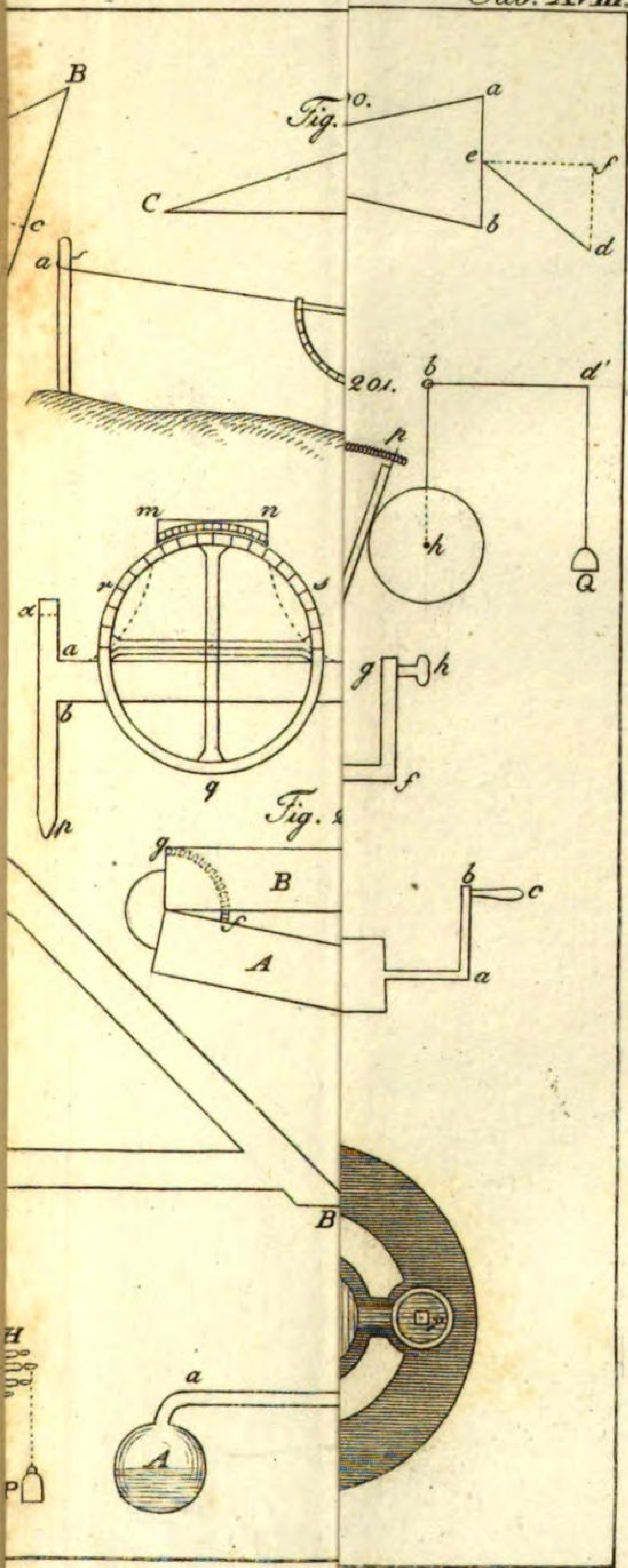


Ant. Karcher Sc.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XVIII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XIX.

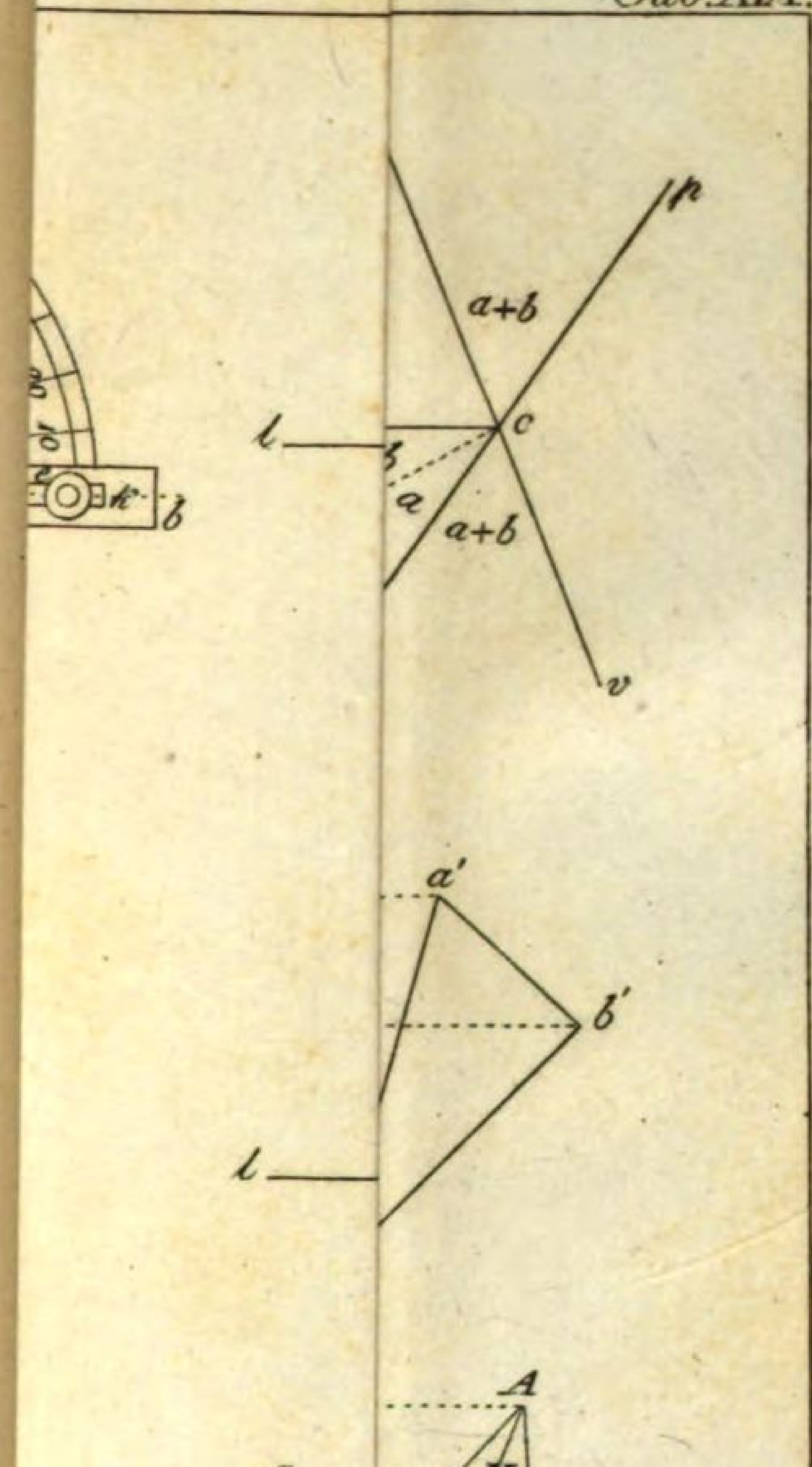
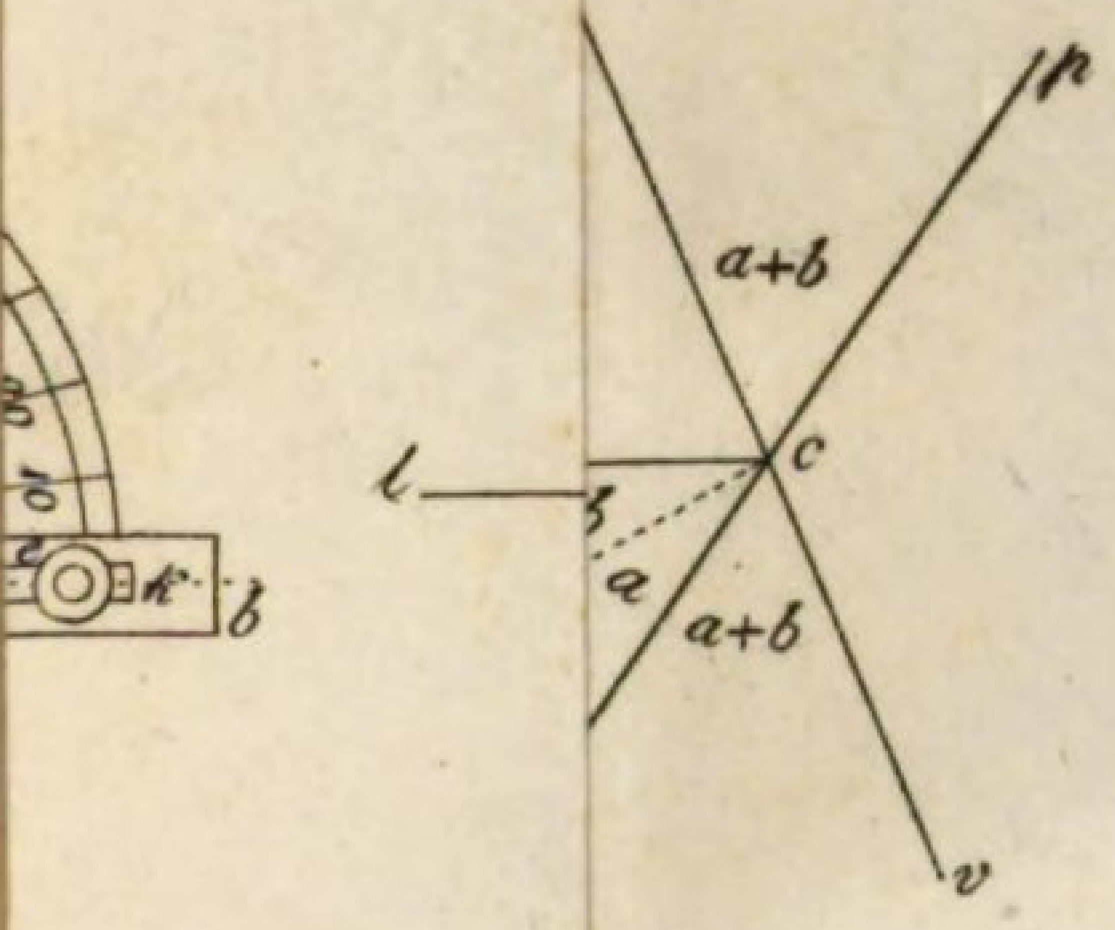


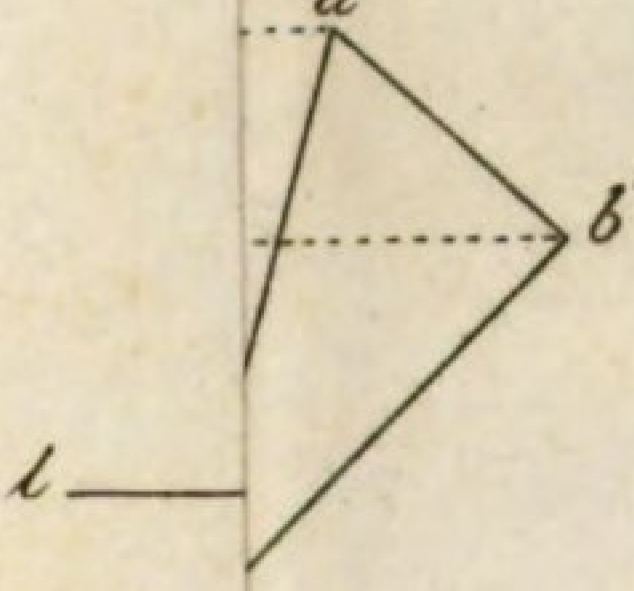
Fig. 220.

Fig. 225.

Ant. Karcher Sc.

Tab. XIX.





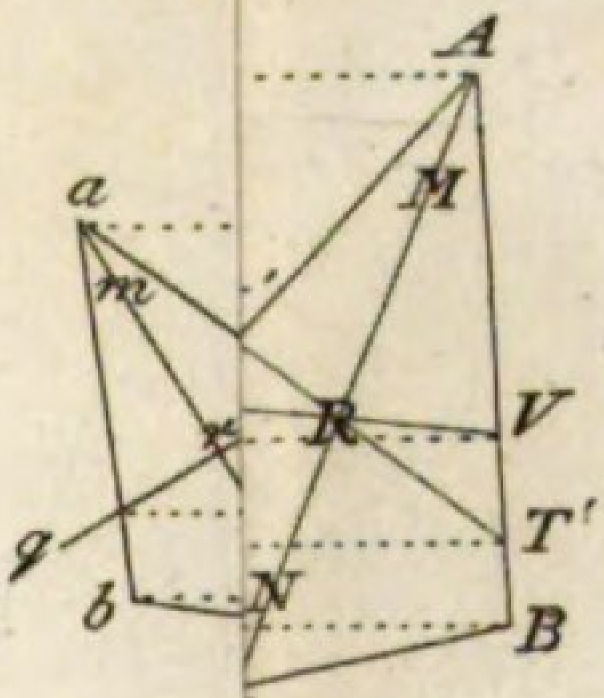


Fig. 220.

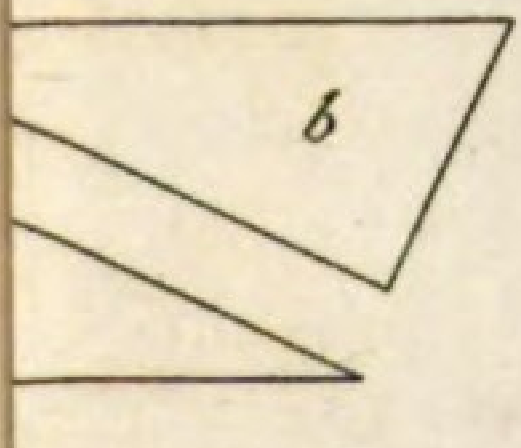
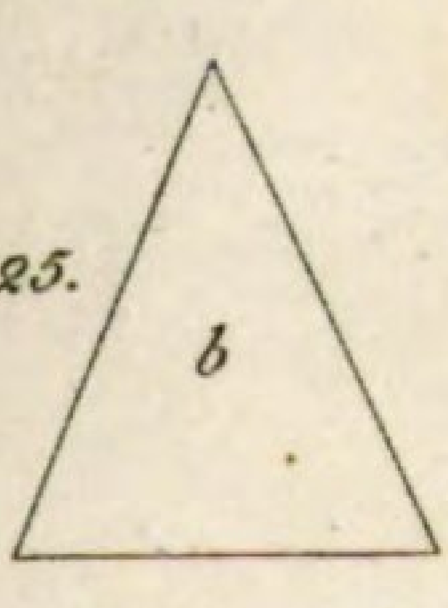
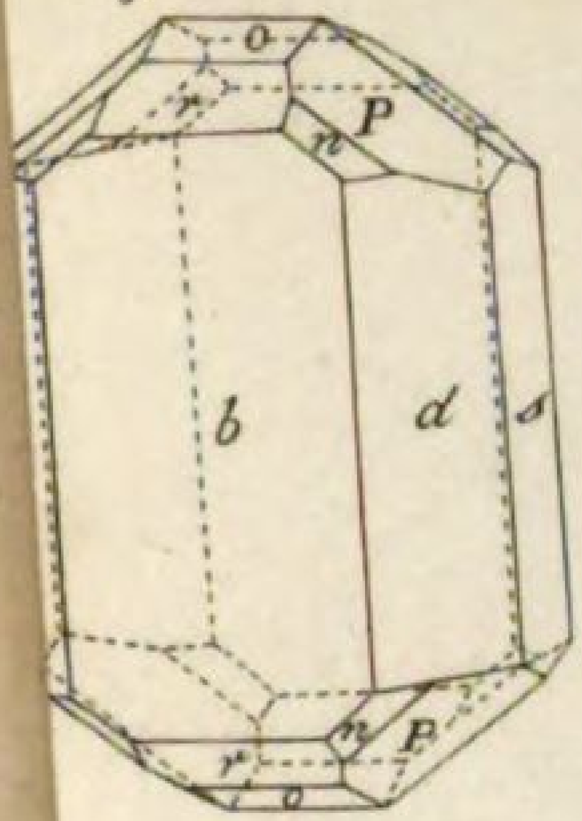


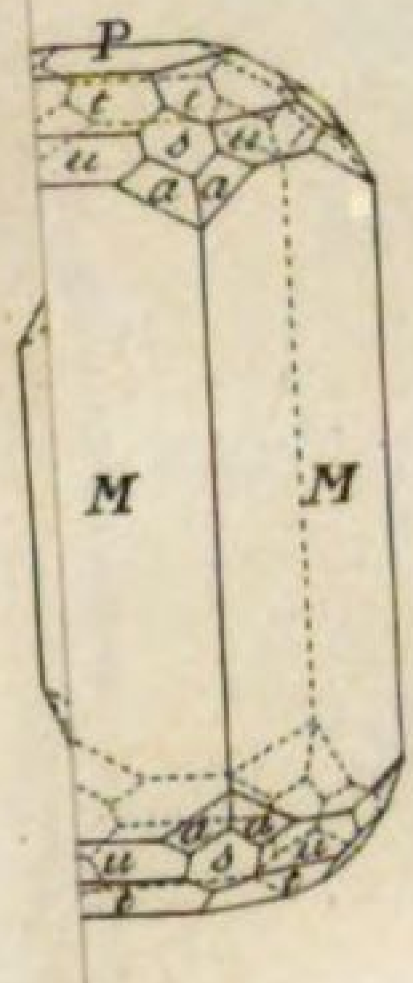
Fig. 225.



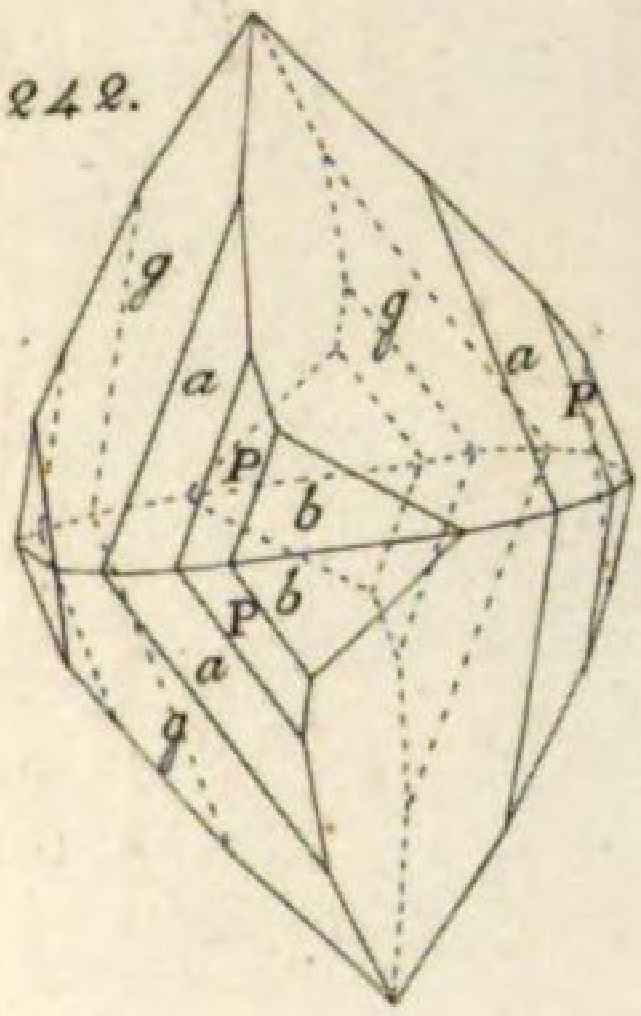
Ant. Karcher Sc.

Fig. 237.

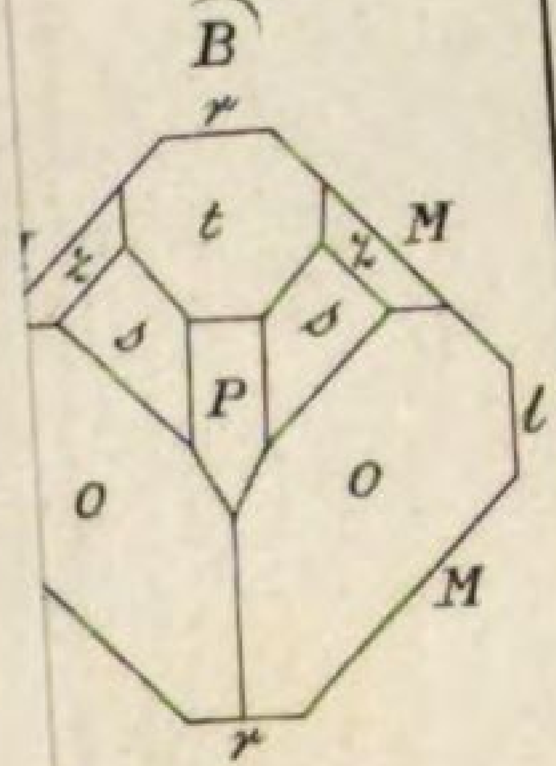




g. 242.



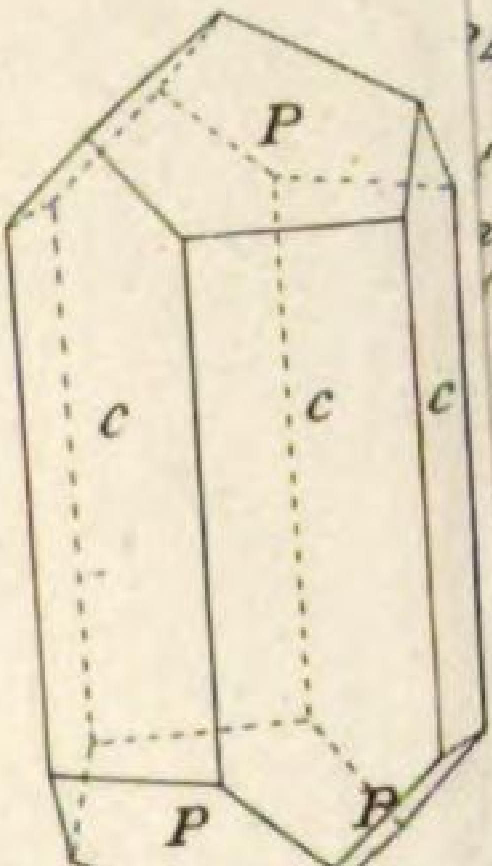
B



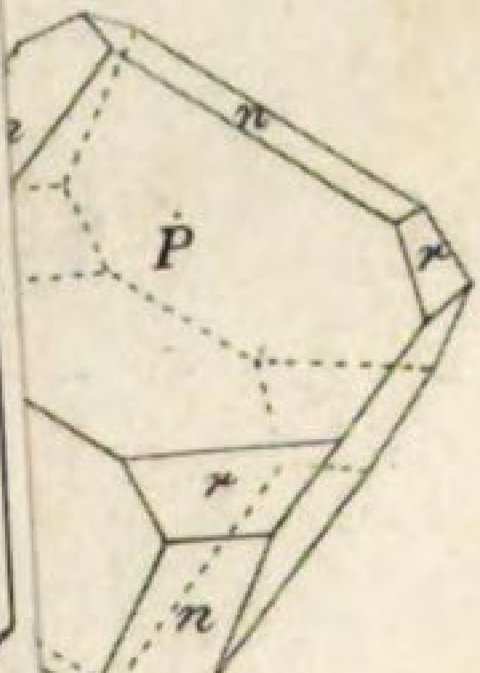
1.



246. B.

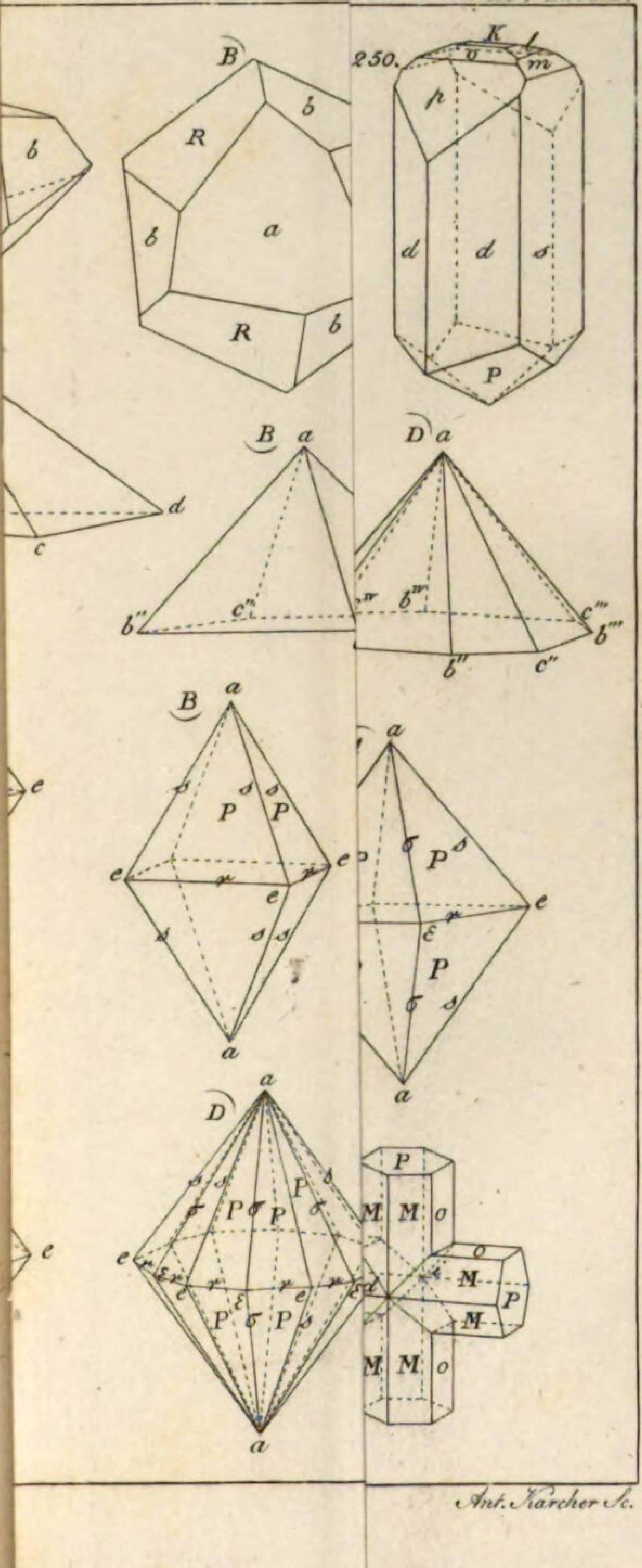


46. E.



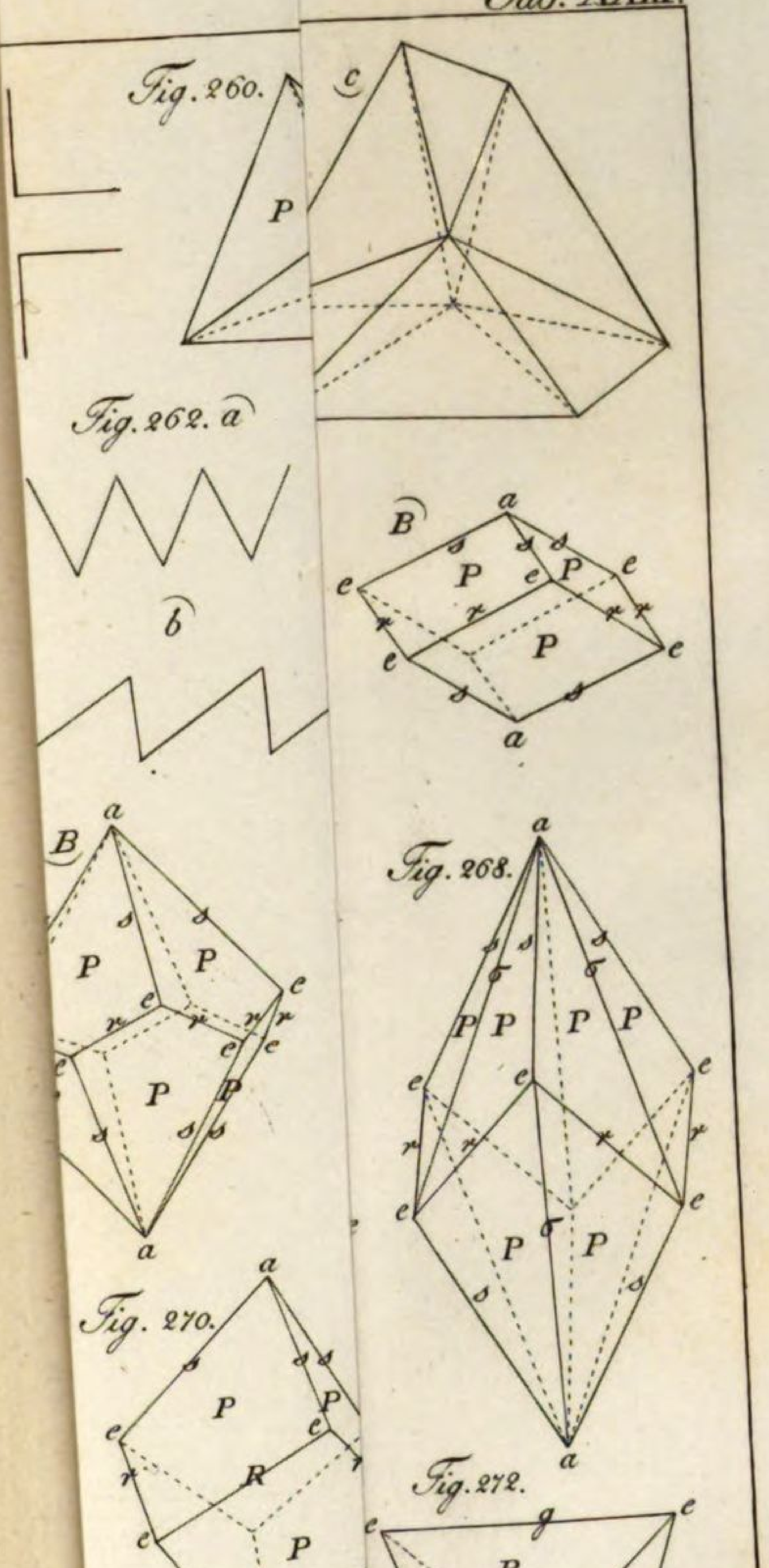
Ant. Karcher Sc.

Tab. XXII.



Ant. Karcher Sc.

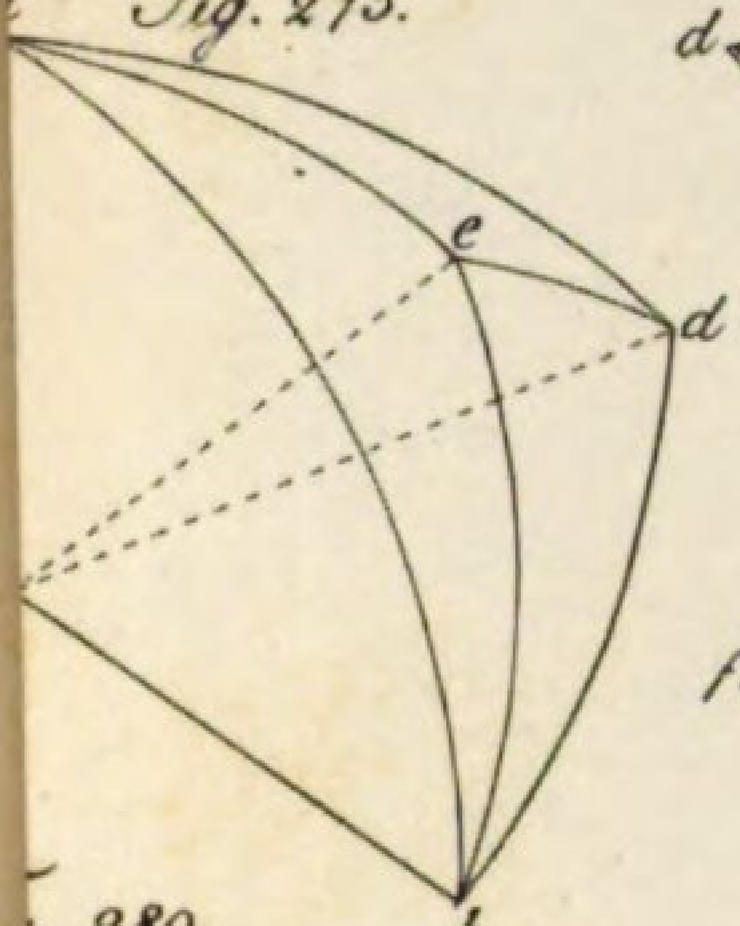
Tab. XXIII.



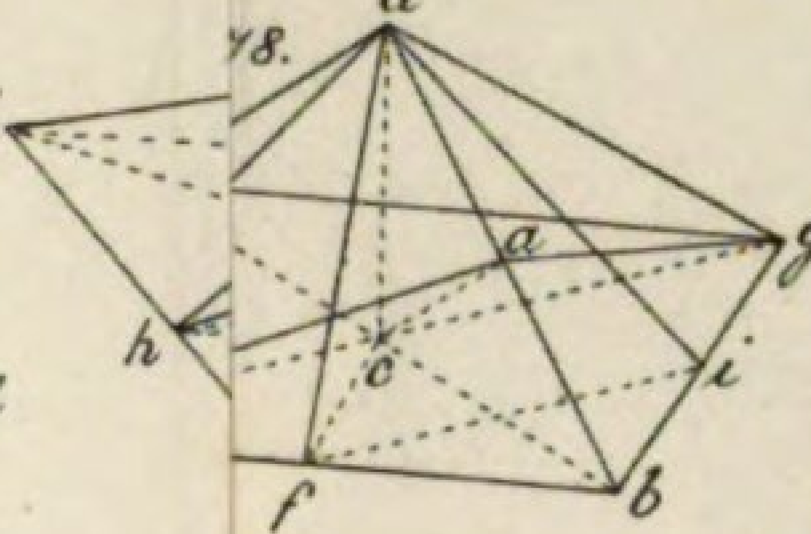
Ant. Karcher Sc.

Tab. XXIV.

Fig. 275.



…78.



…. 280.

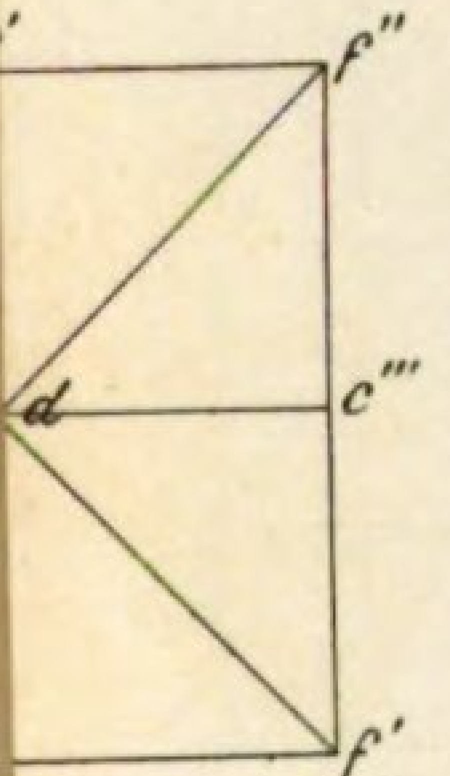
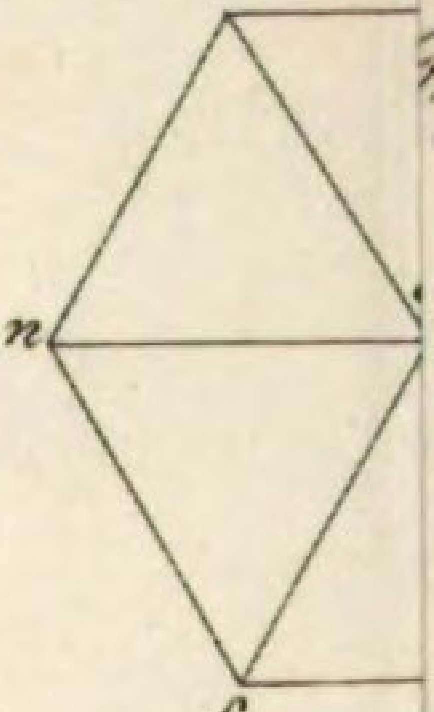




Fig.



…g. 287.

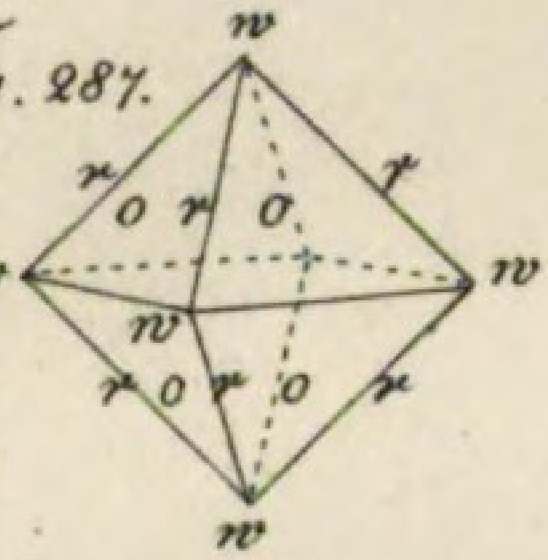


Fig. 288.

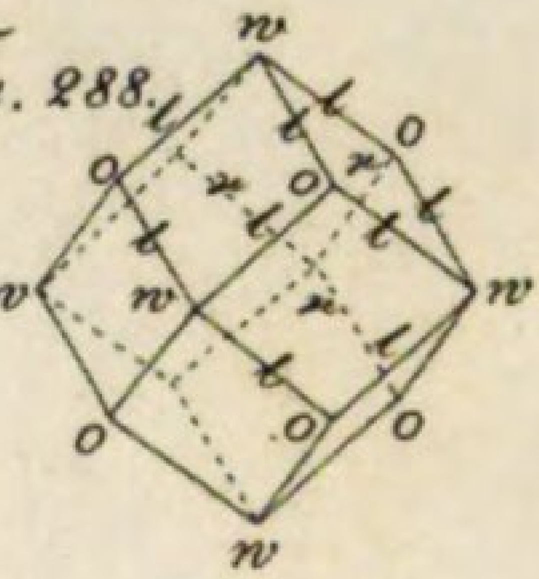
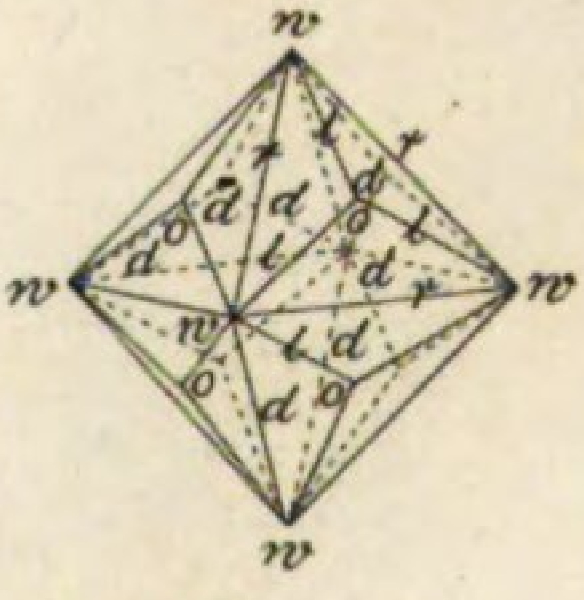


Fig. 290.



…84.

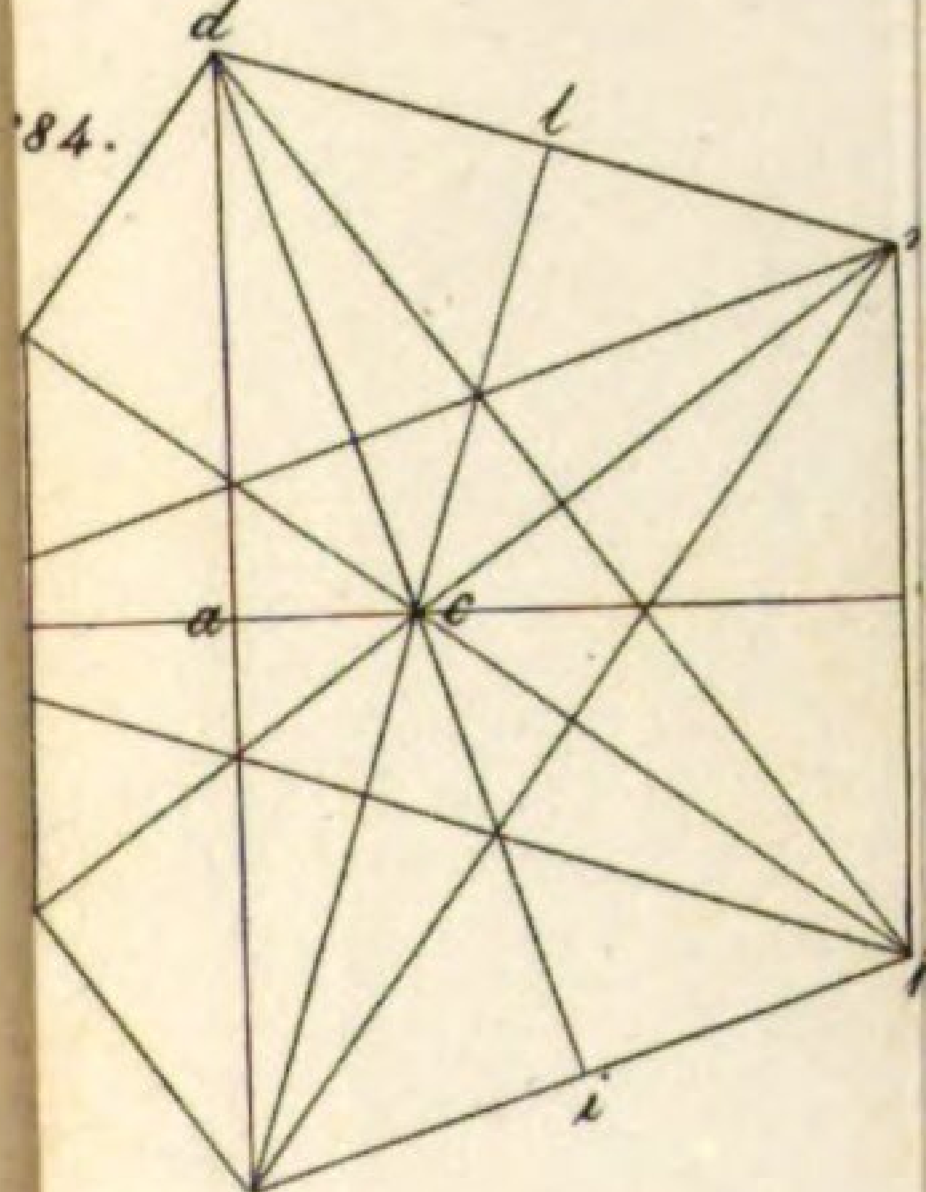
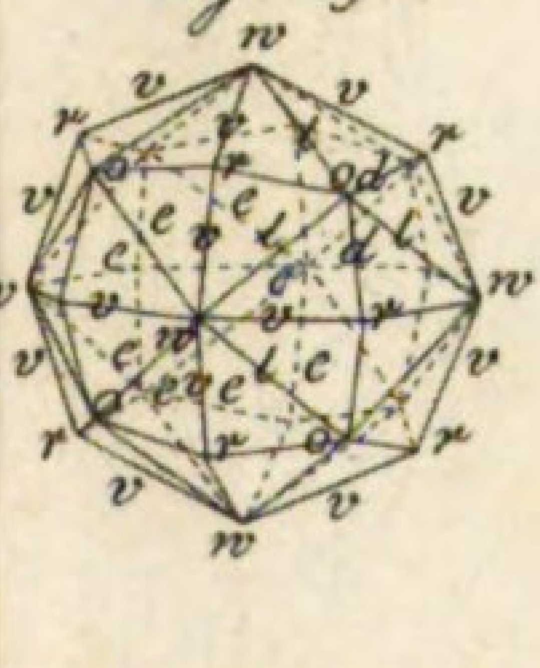


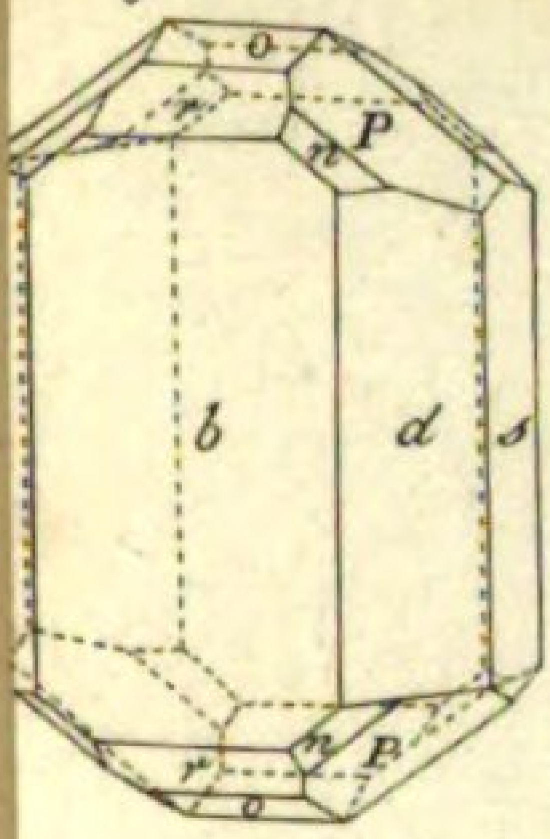
Fig. 292.

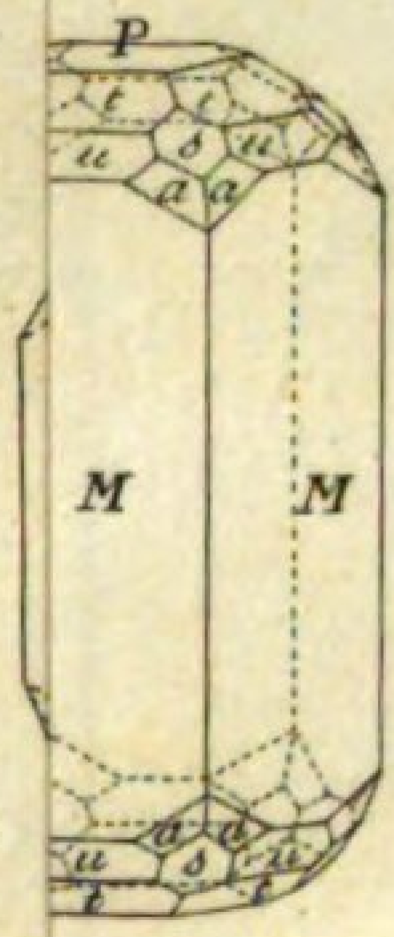


Ant. Karcher Sc.

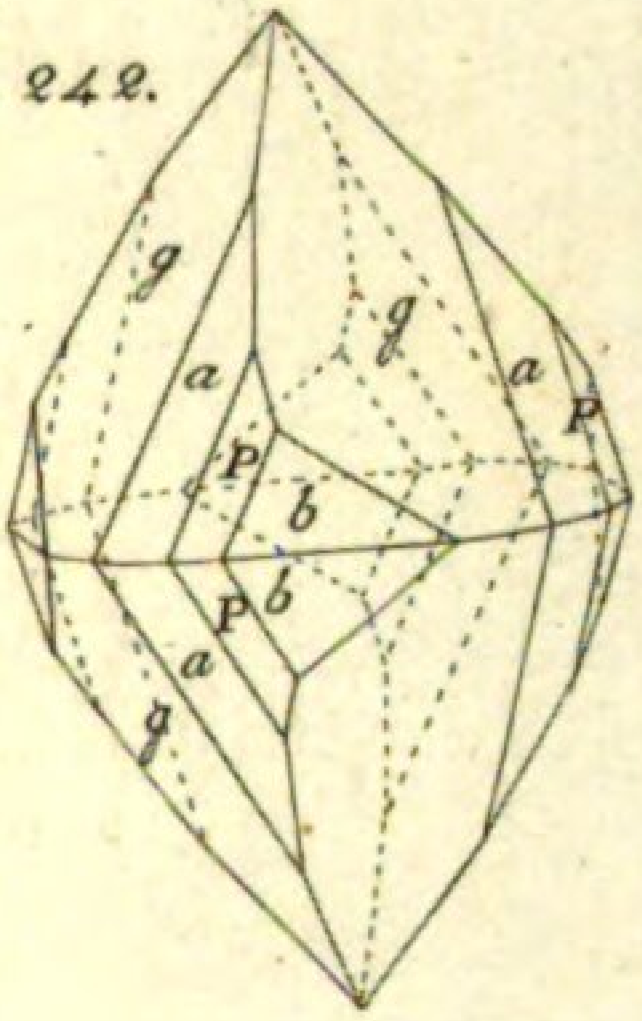
Tab. XXI.

Fig. 237.

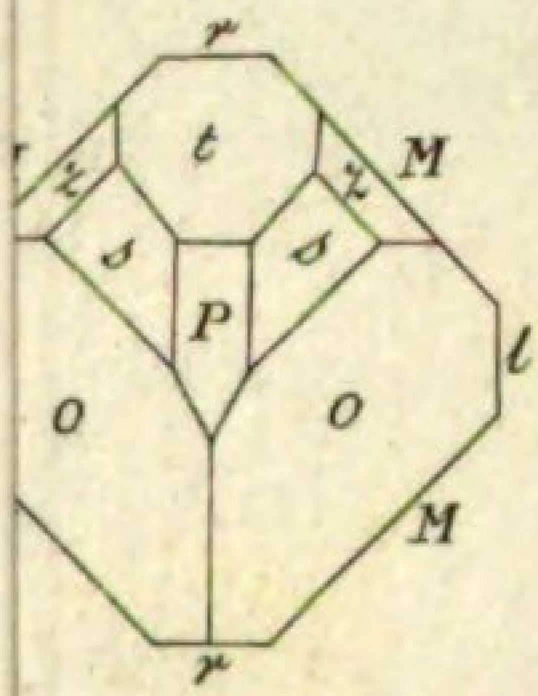




g. 242.



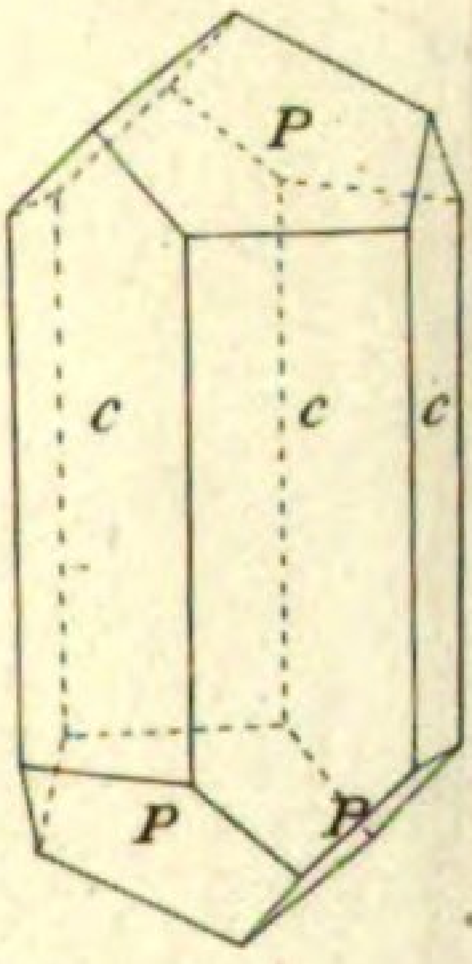
B



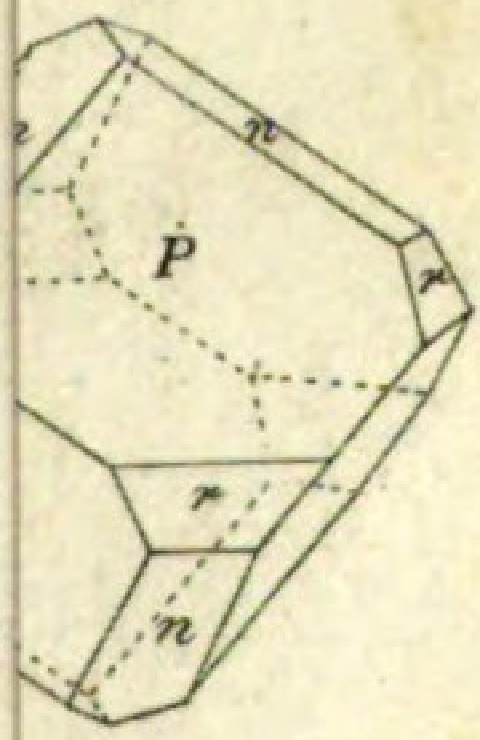
1.



246. B.

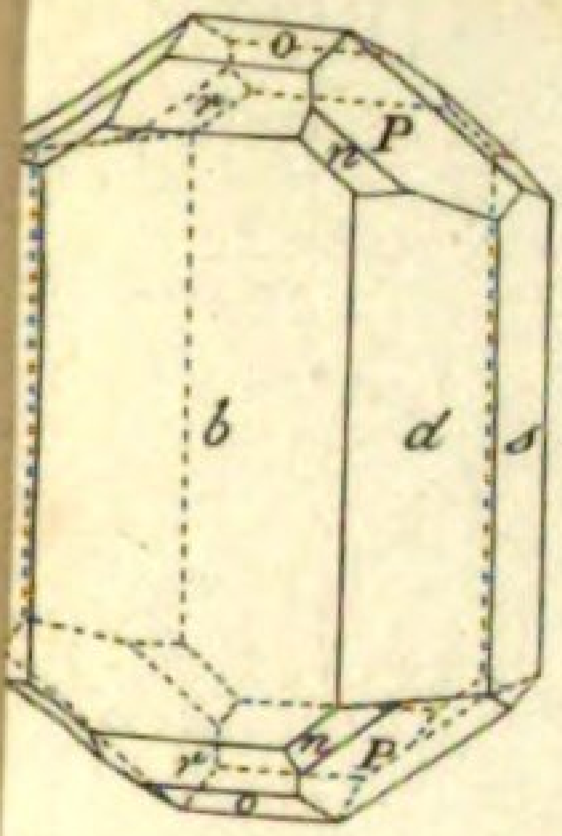


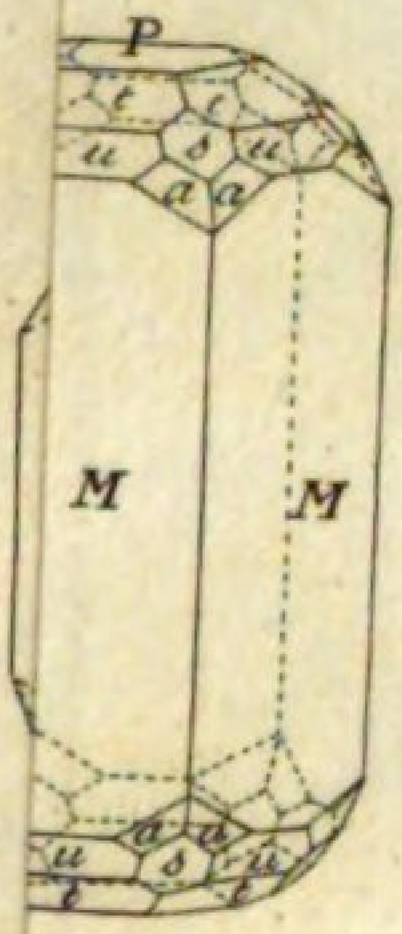
46. E.



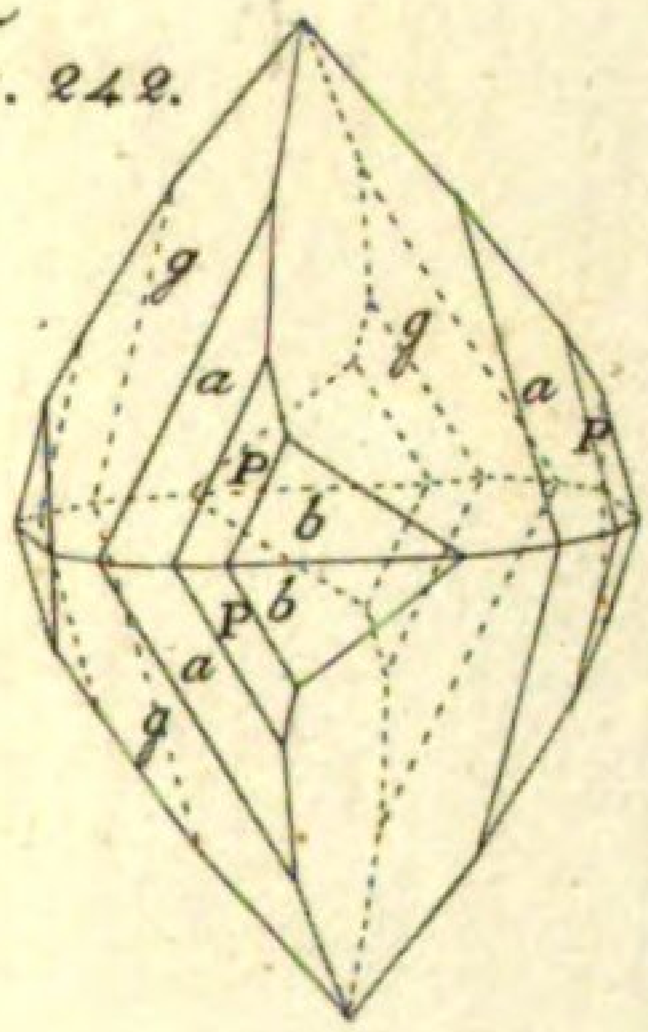
Ant. Karcher Sc.

Fig. 237.

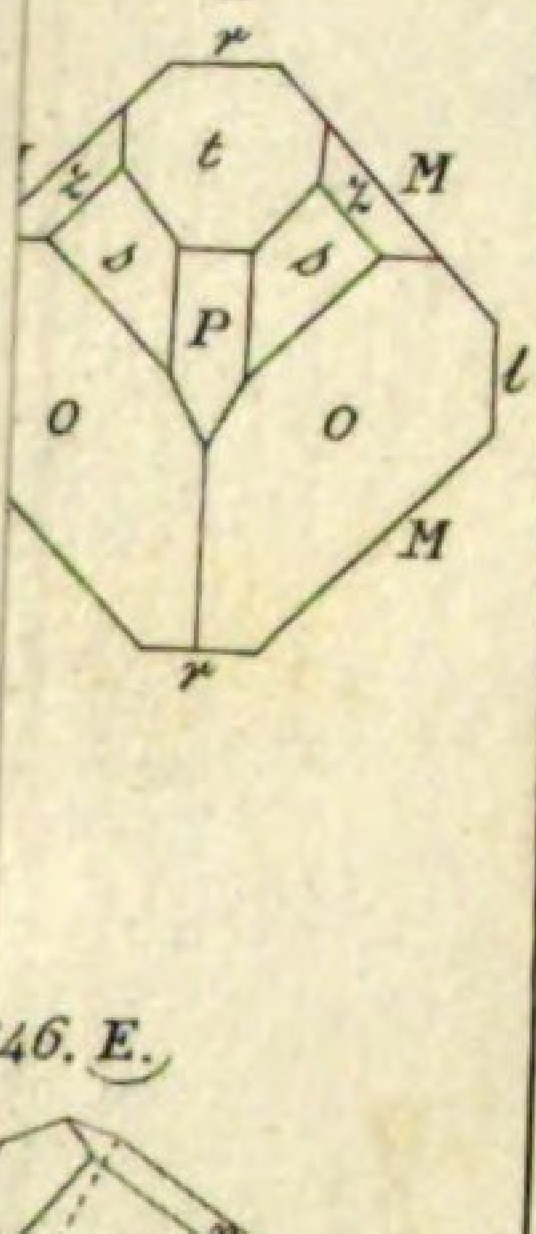




g. 242.



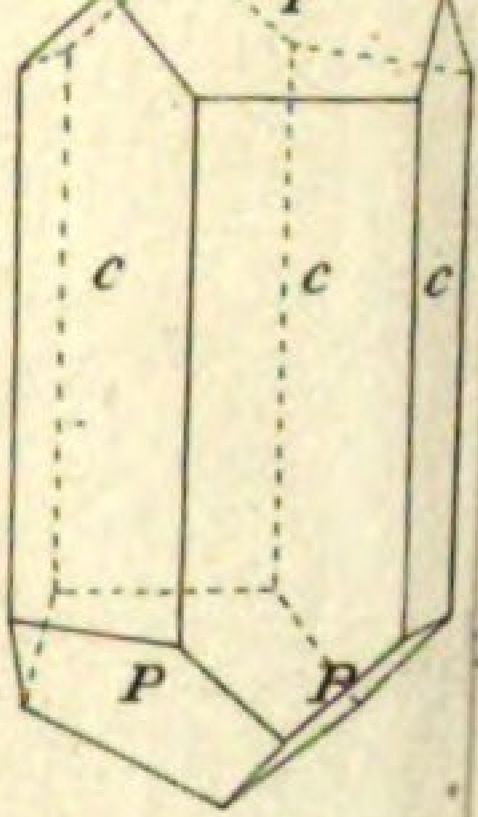
B



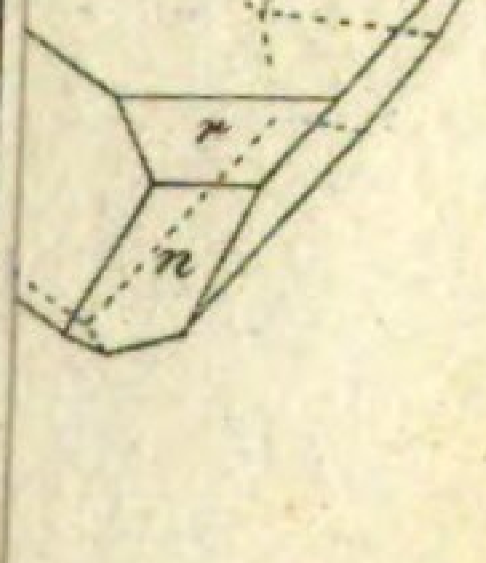
1.



246. B.

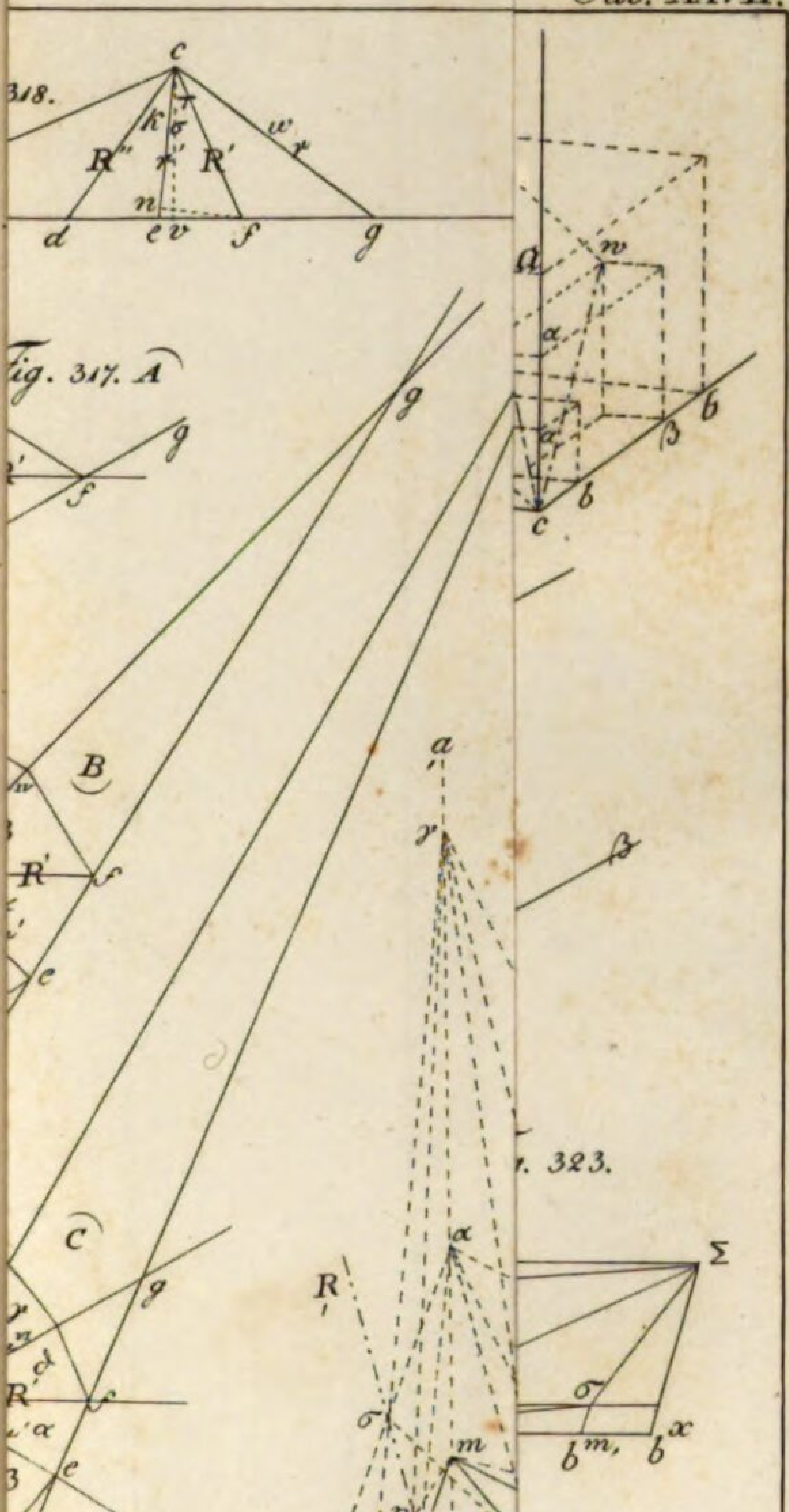


46. E.



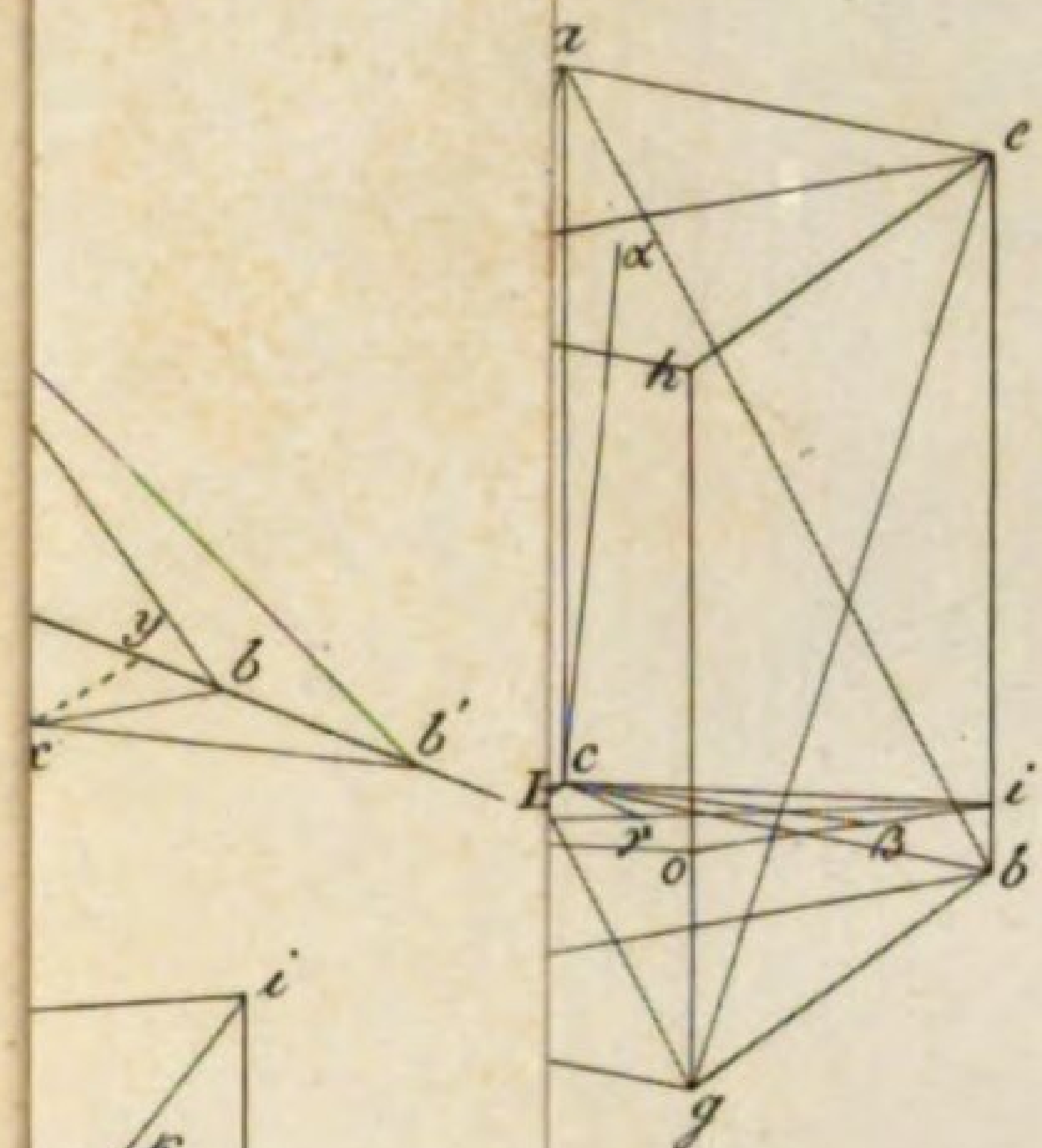
Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVIII.



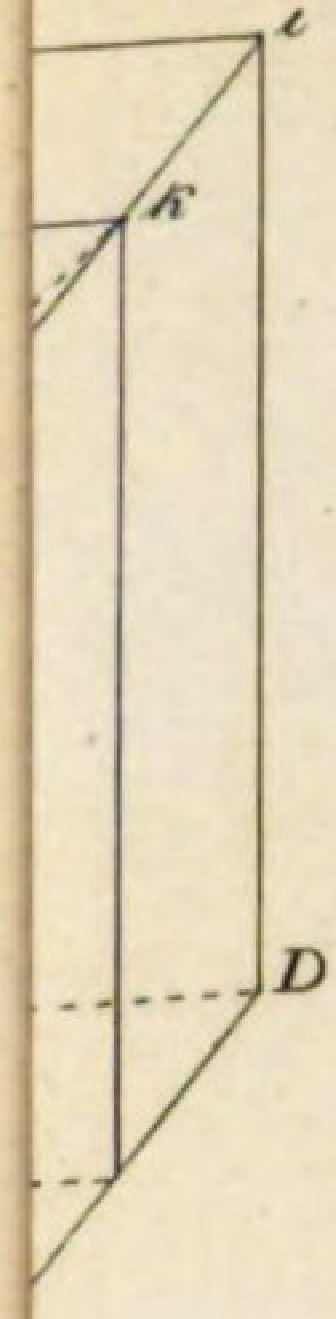
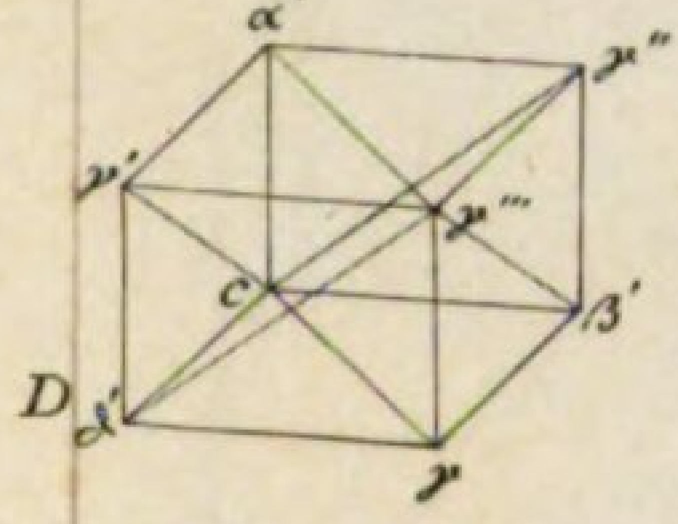
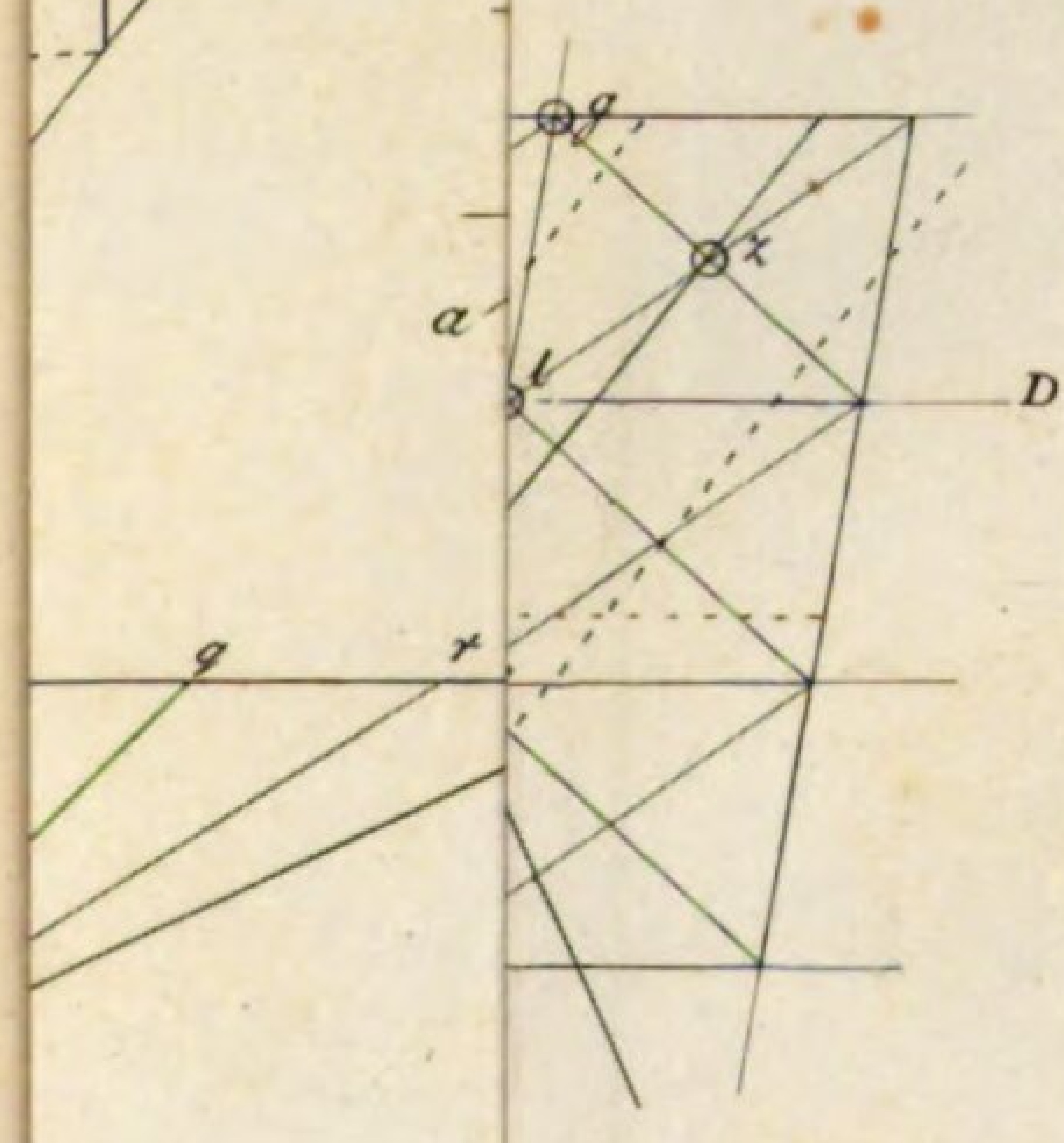


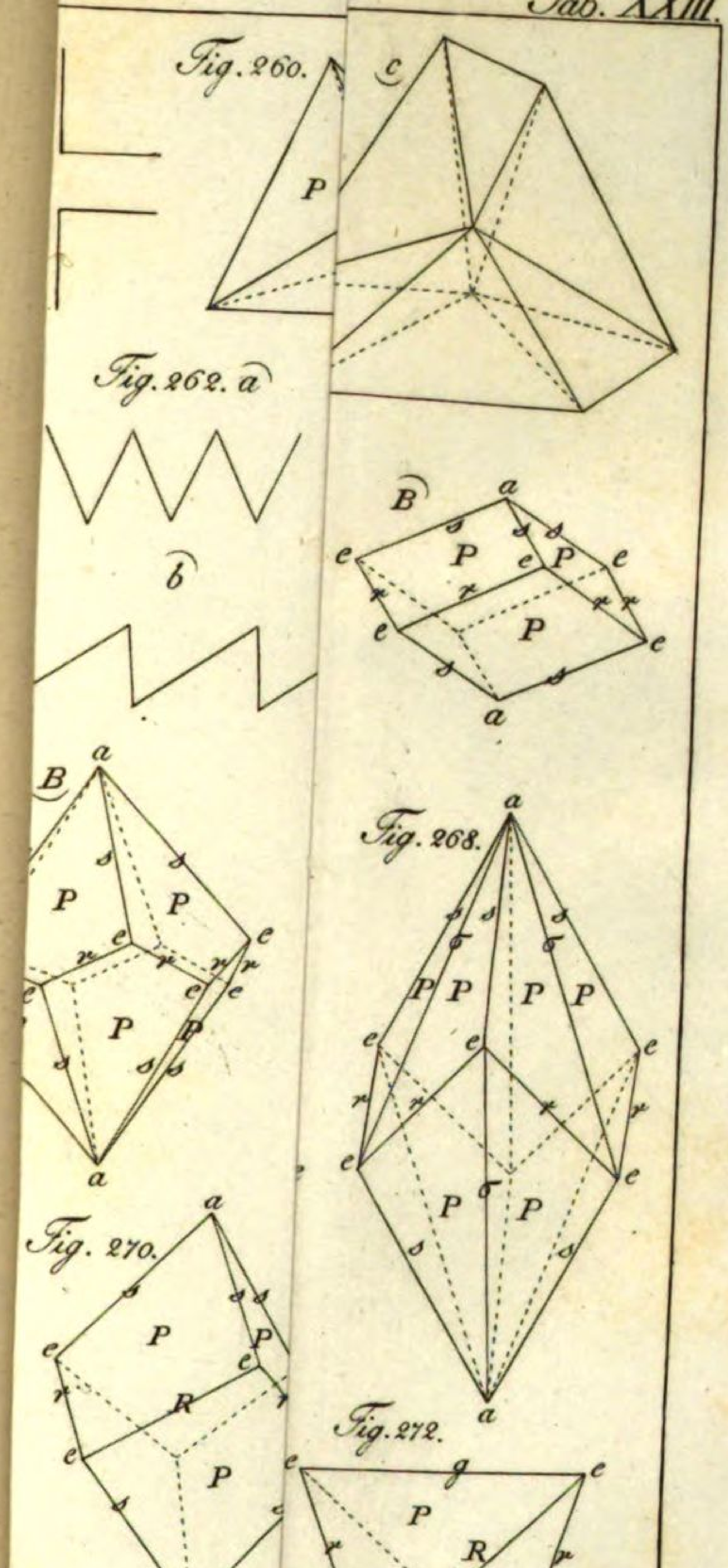
Fig. 329.





Ant. Karcher Sc.

Tab. XXIII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXX.

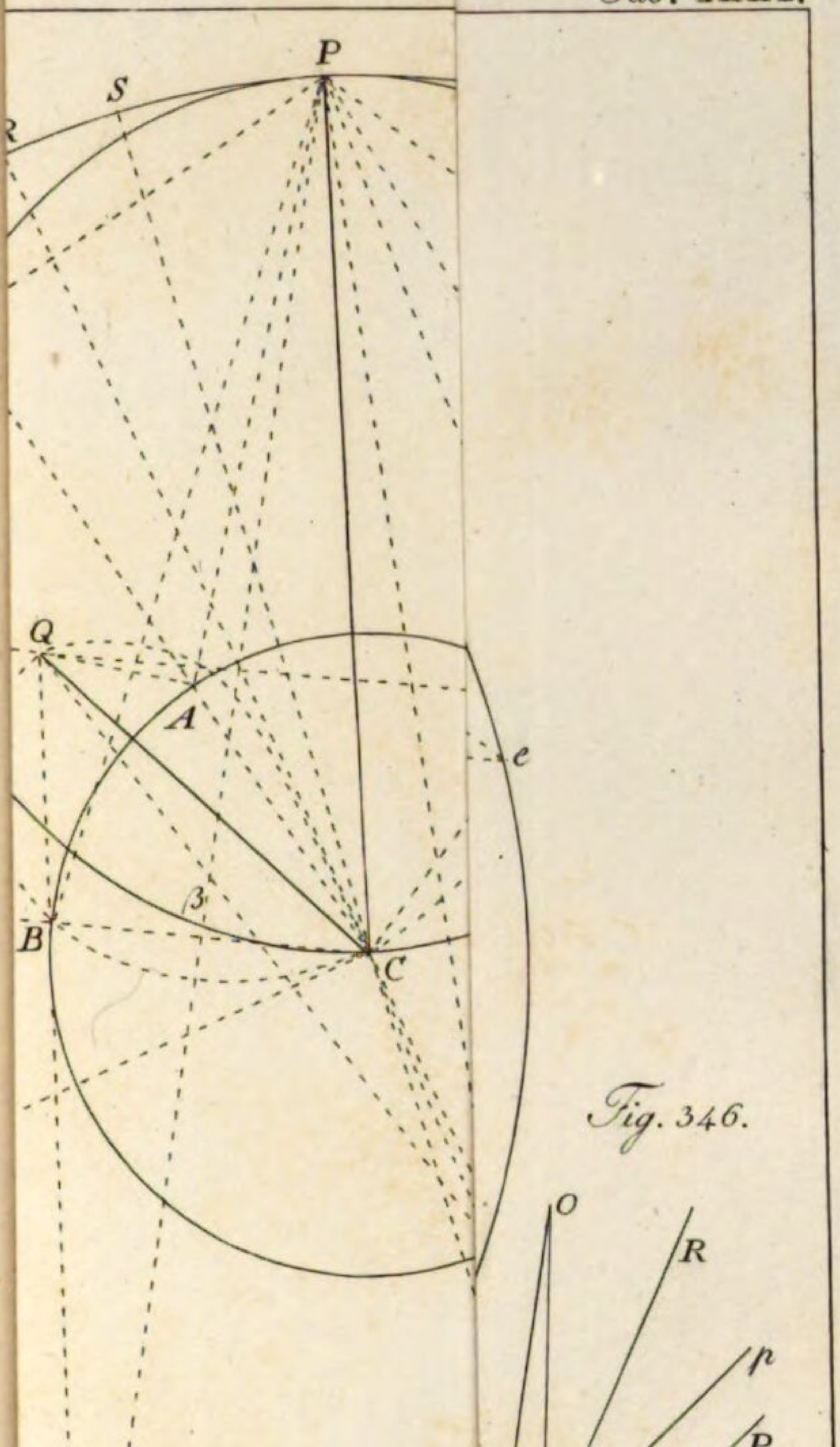
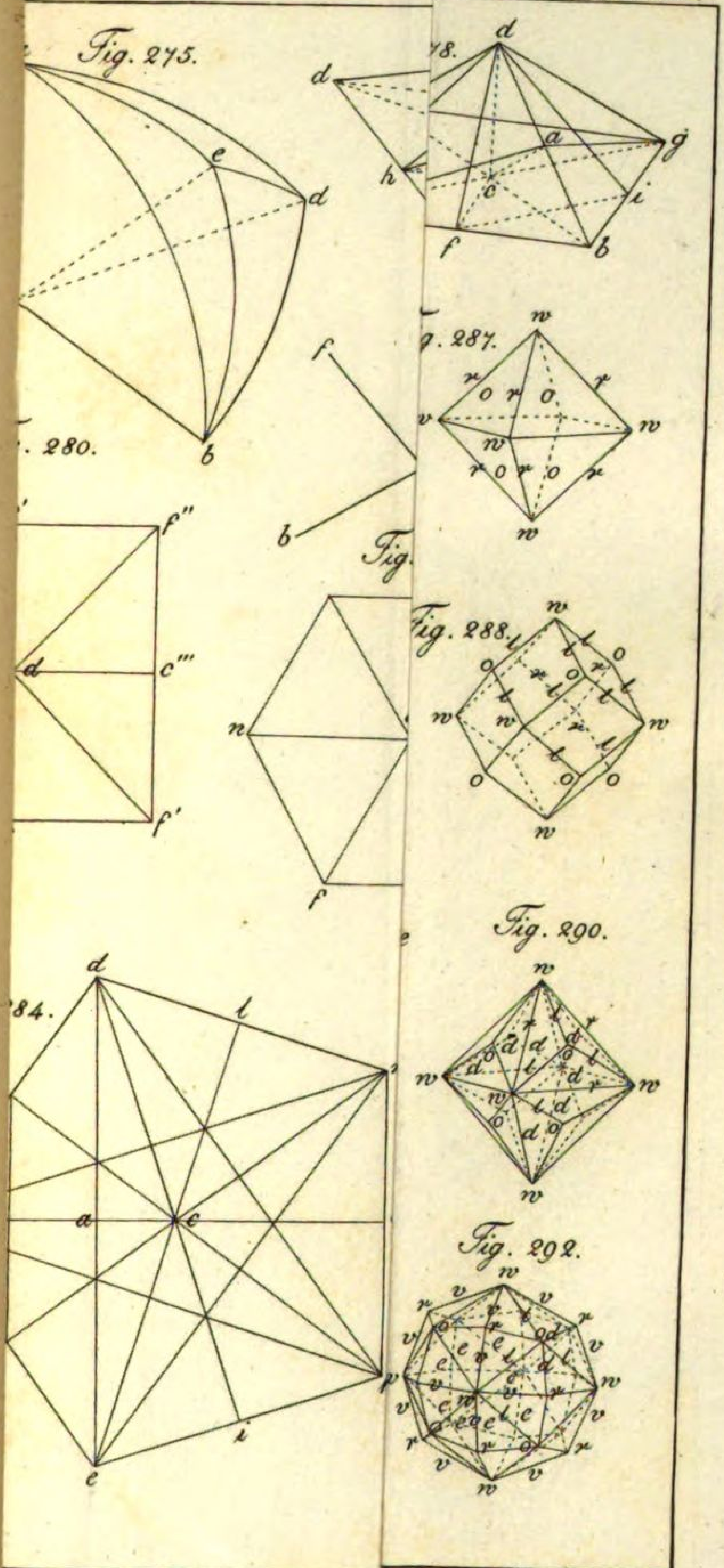


Fig. 346.

Ant. Karcher Sc.

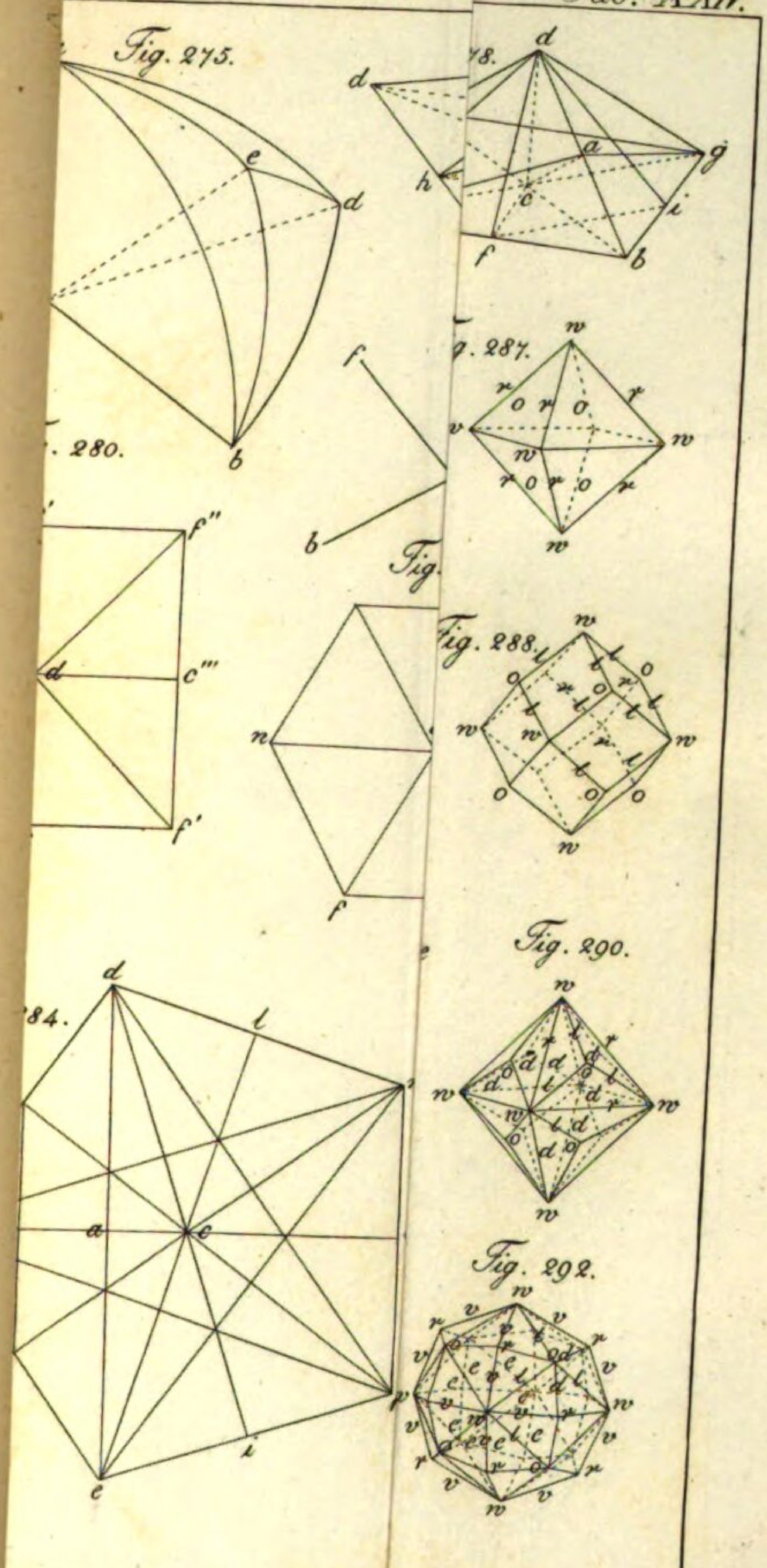
Bayerische
Staatsbibliothek
München

Tab. XXIV.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXIV.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXV.

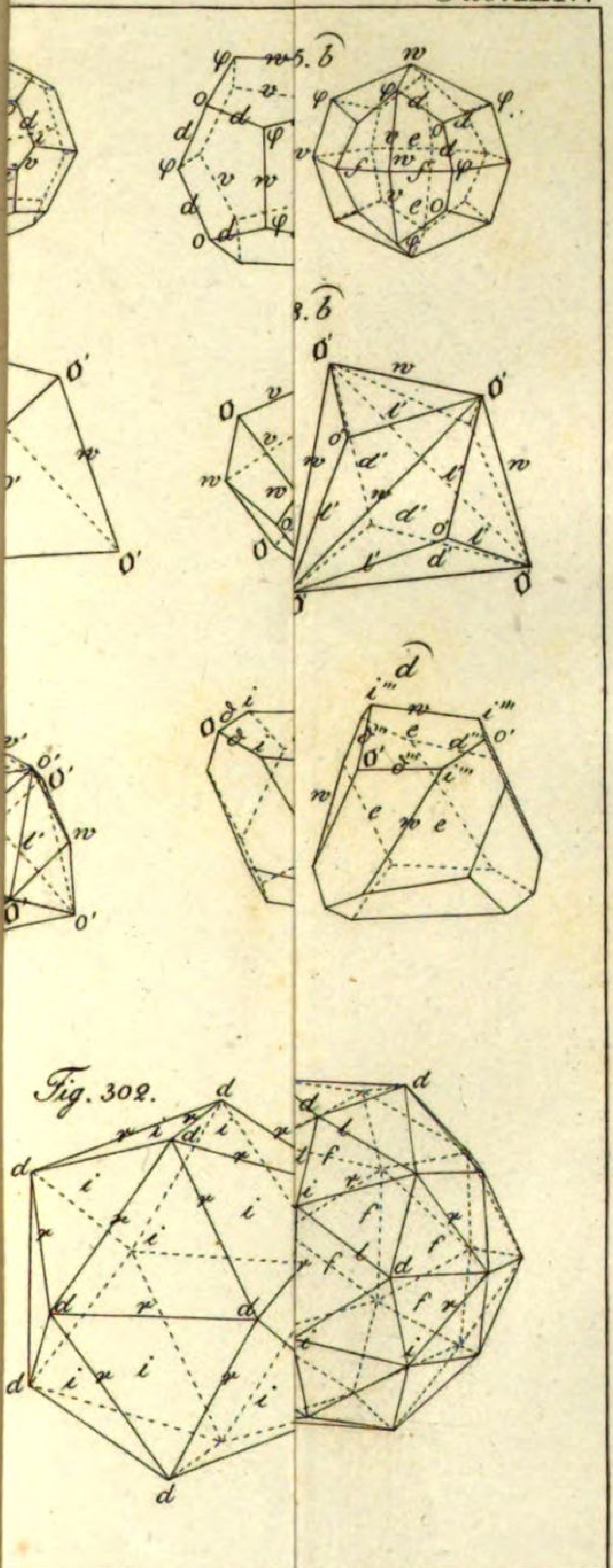
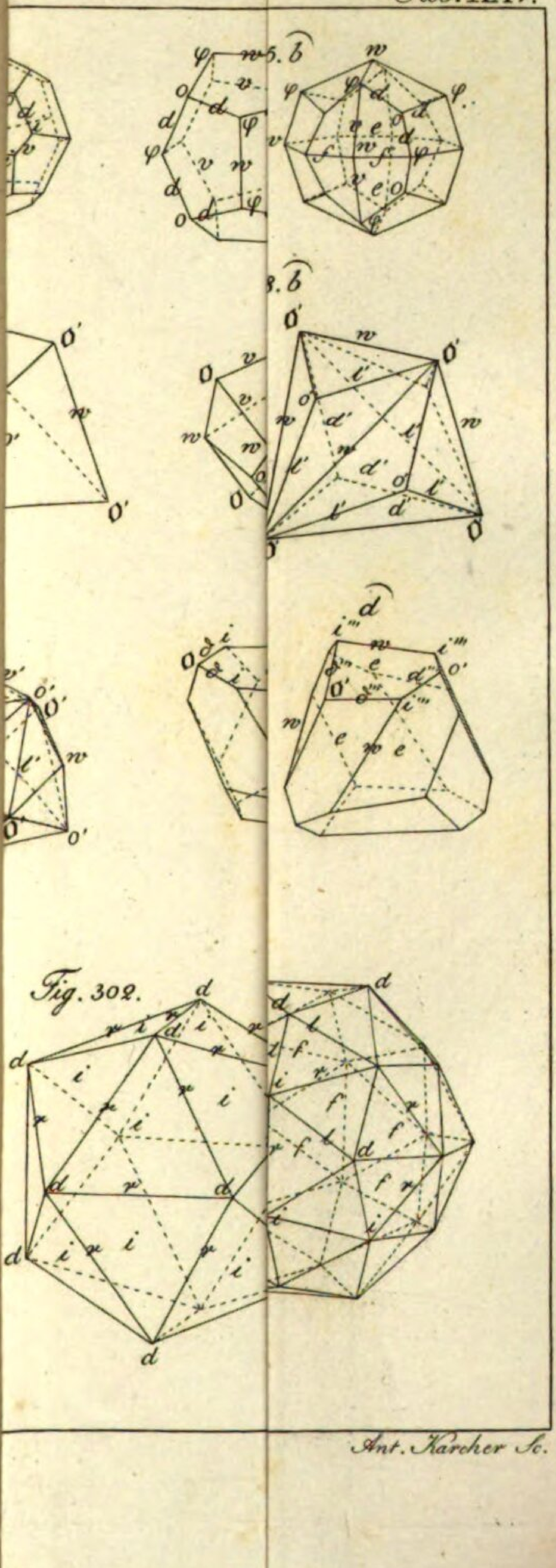


Fig. 302.

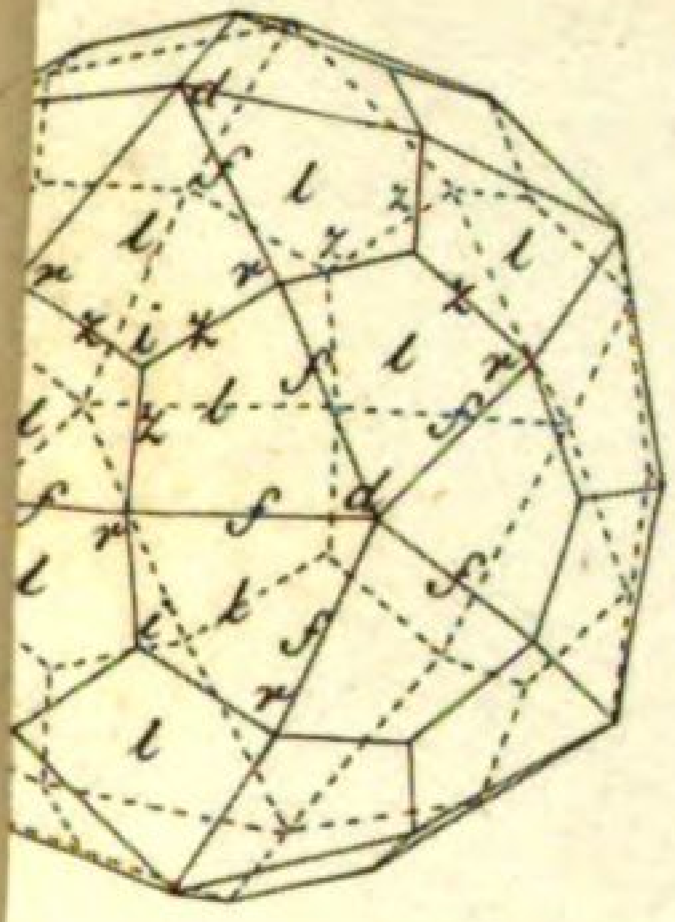
Ant. Karcher Sc.

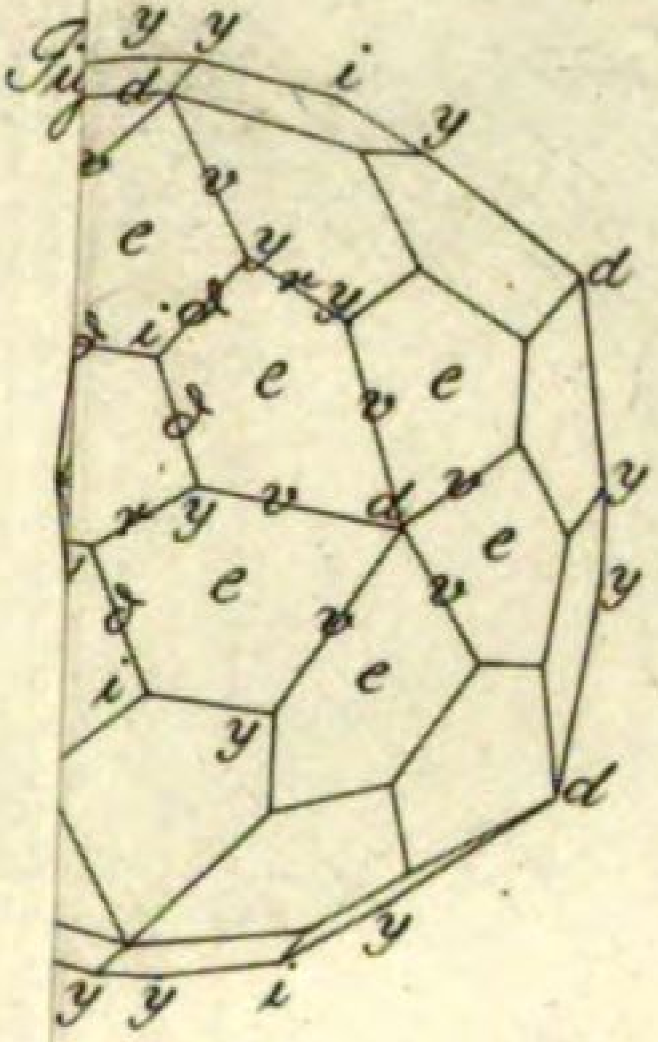
Tab. XXV.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVI.





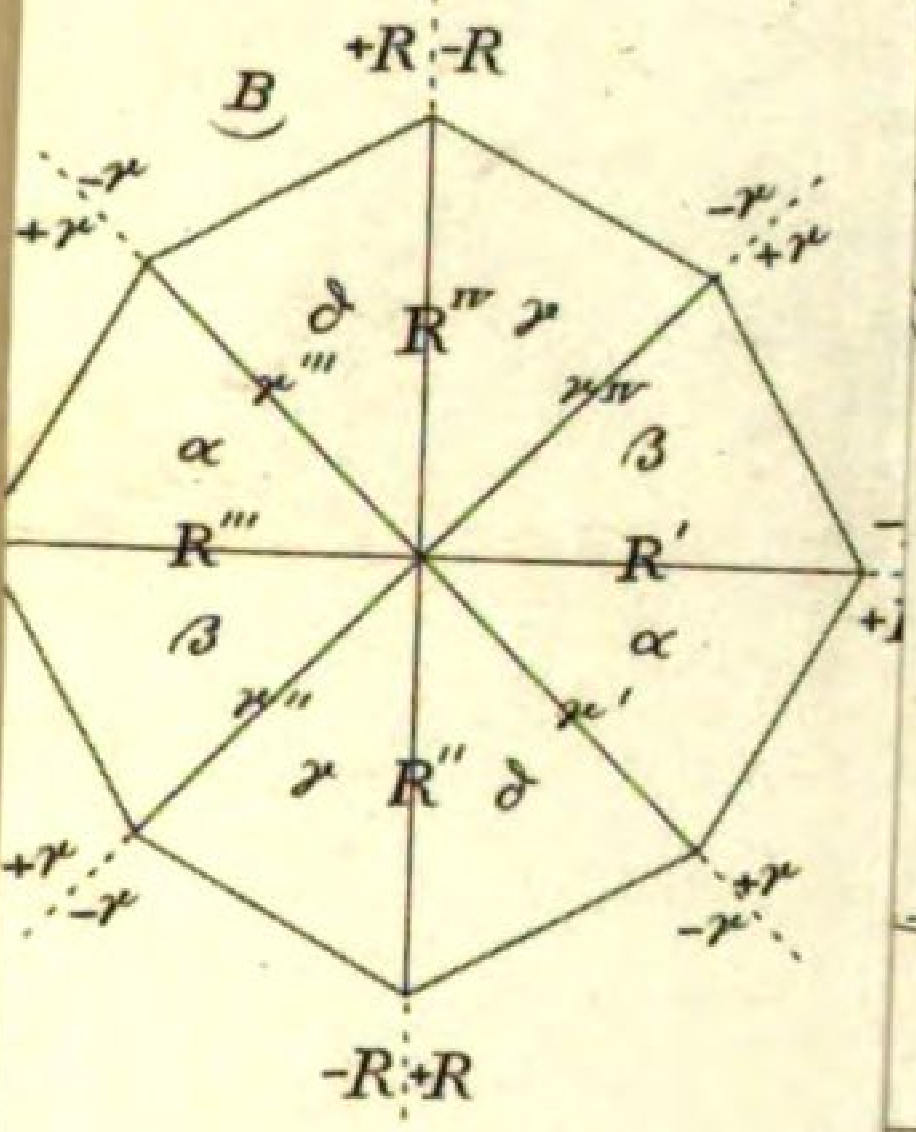


Fig. 310.

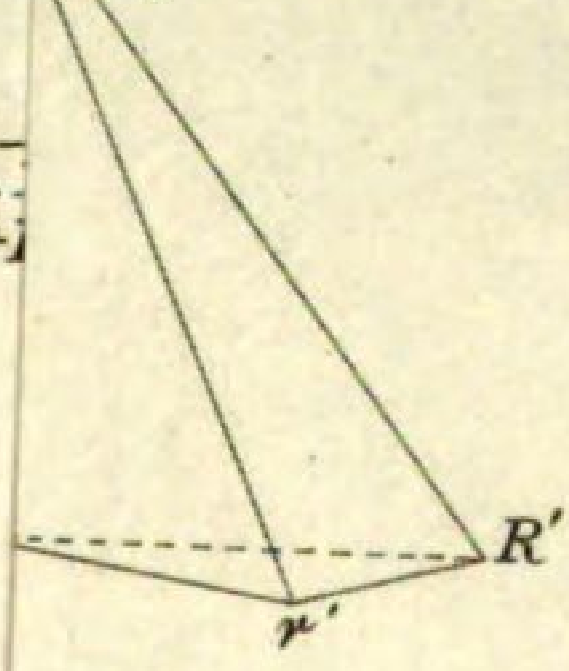
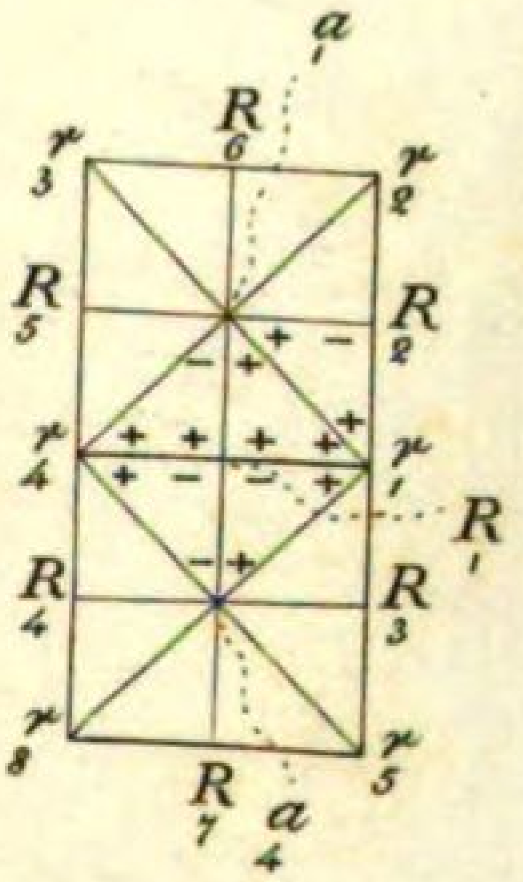
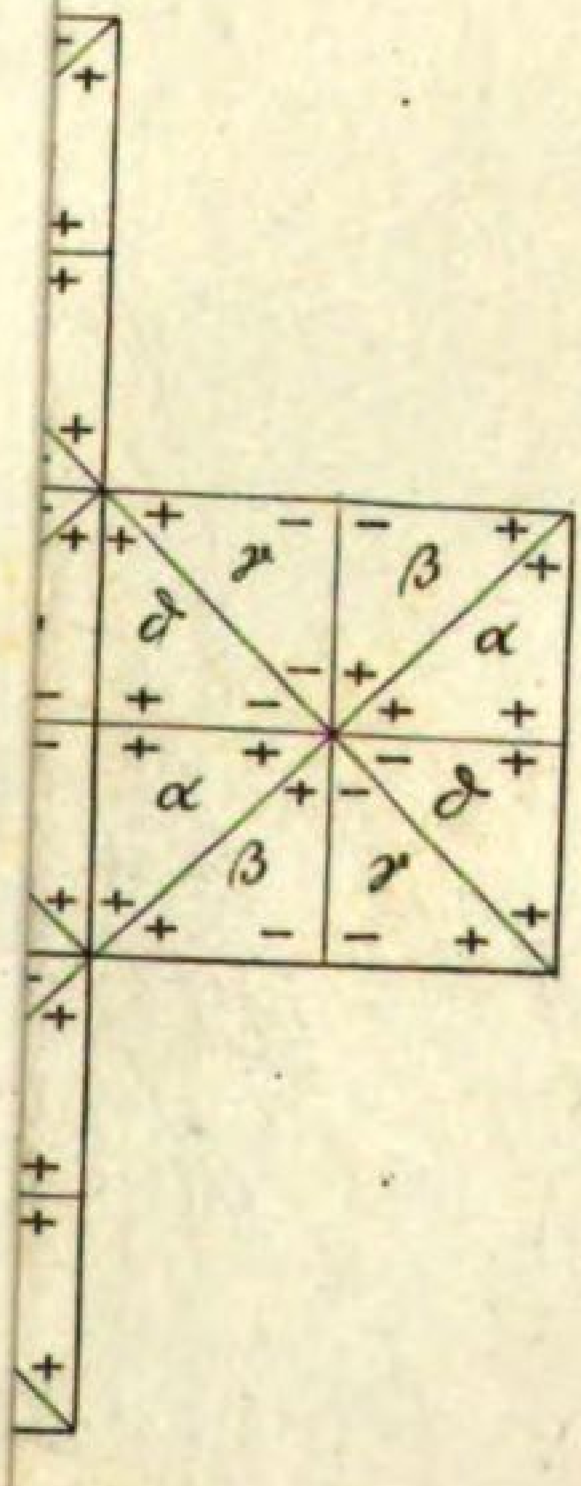
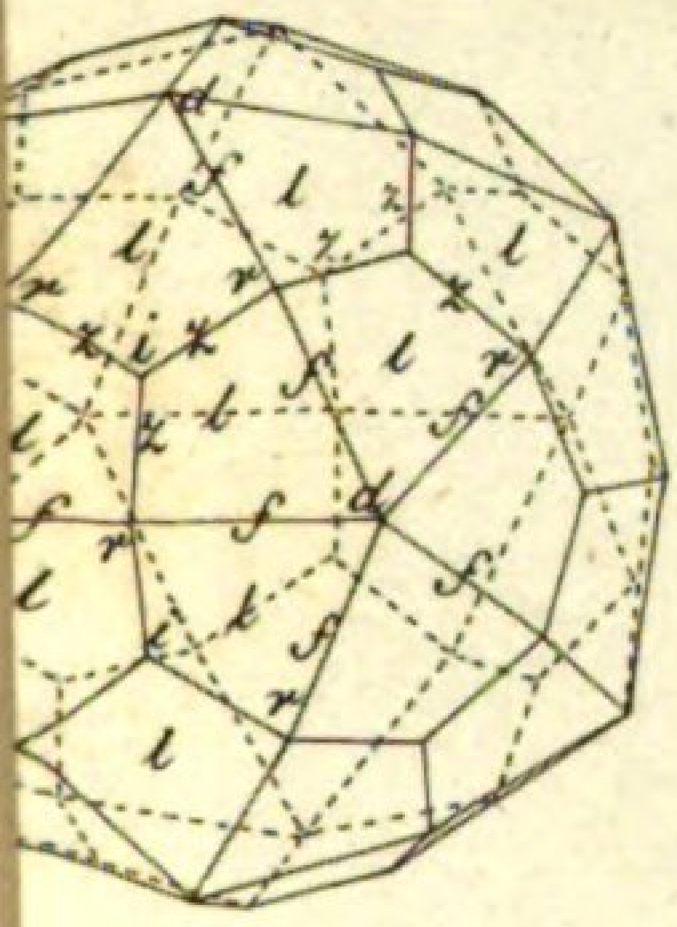


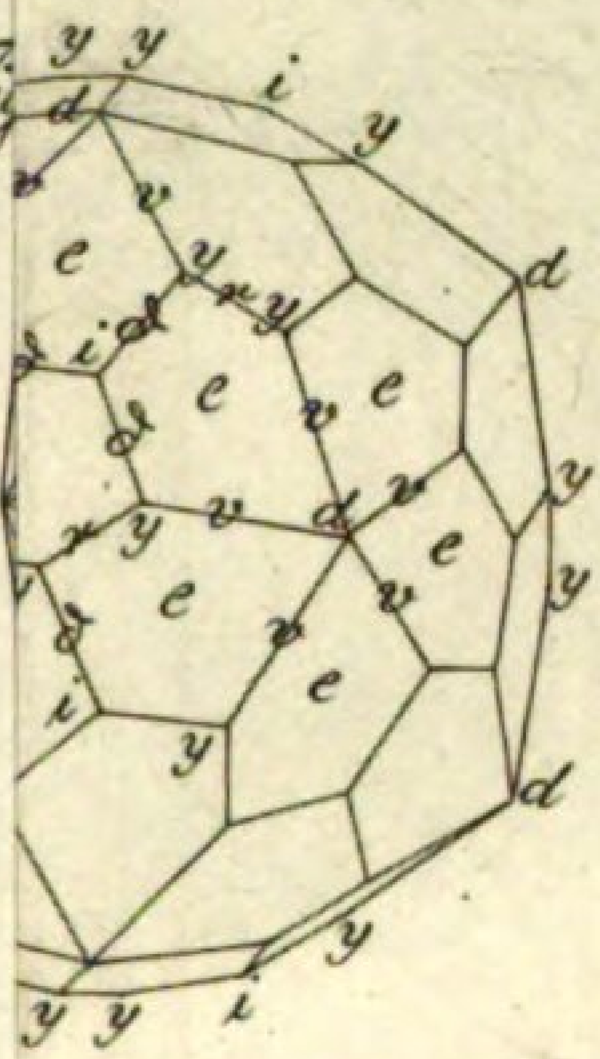
Fig. 314.





Ant. Karcher Sc.





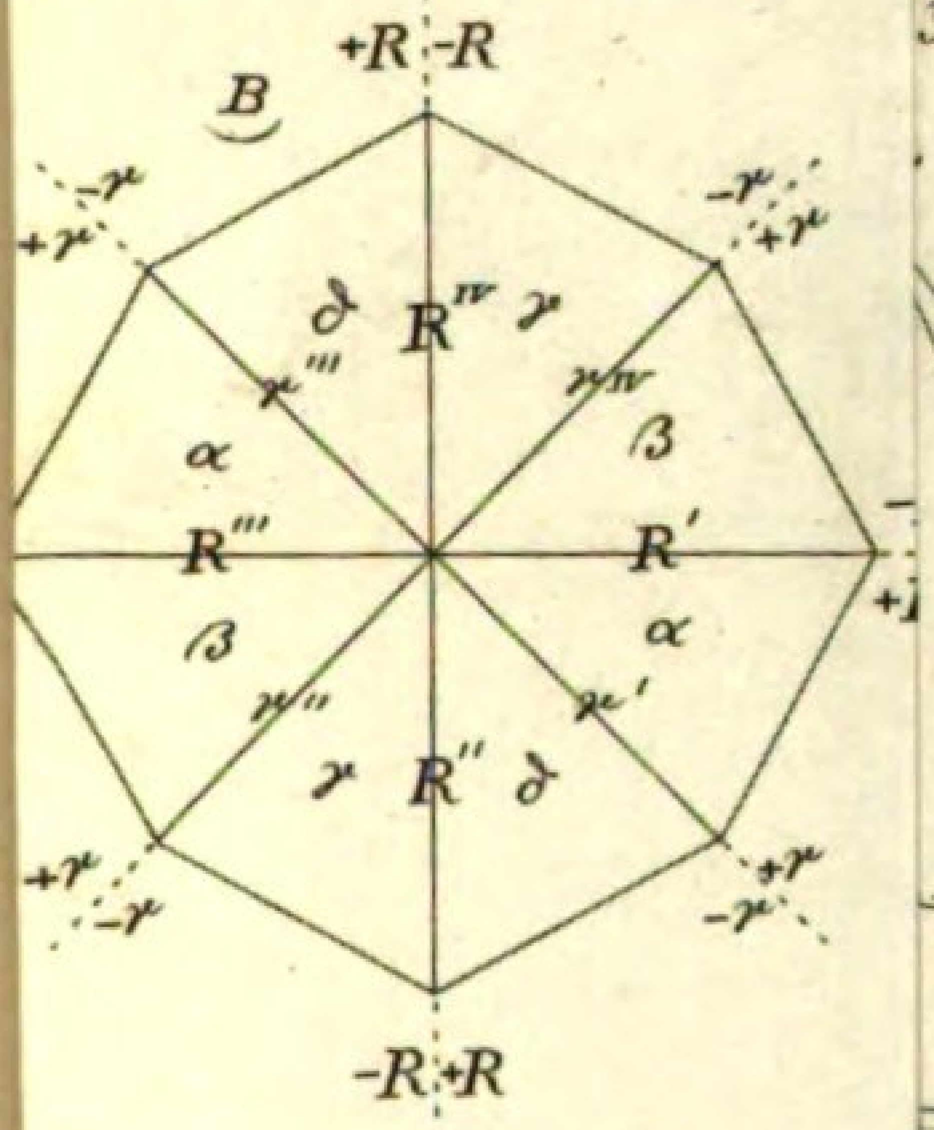


Fig. 310.

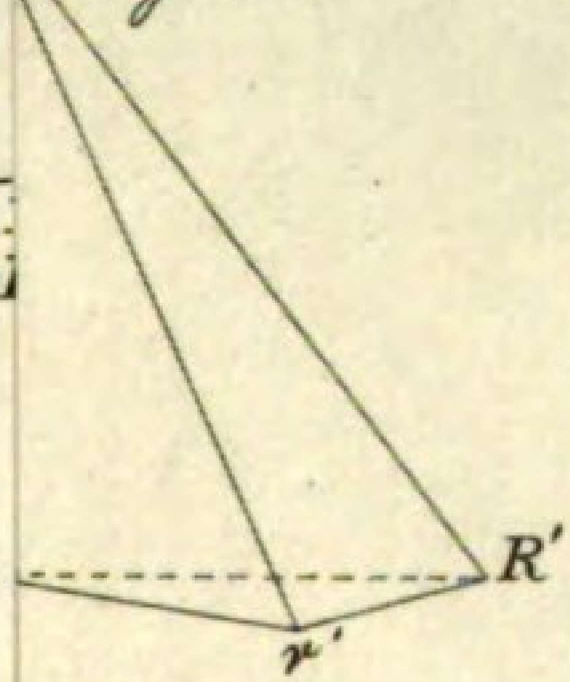
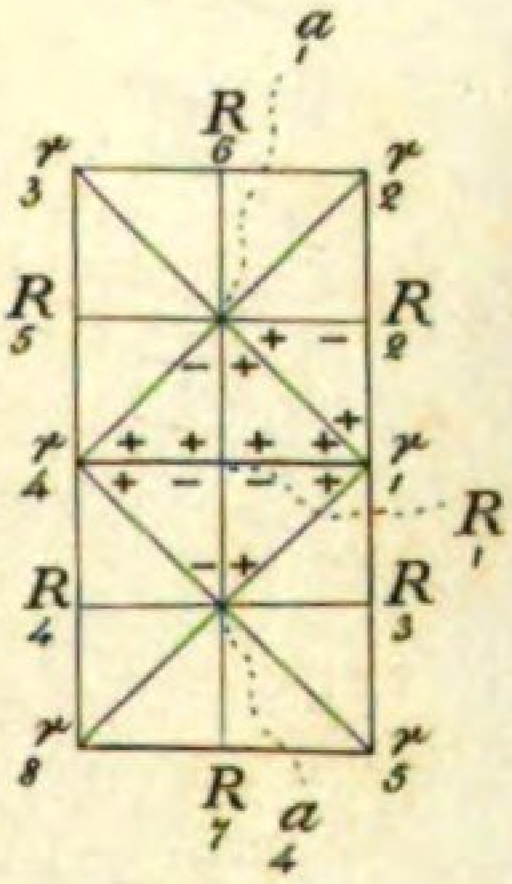
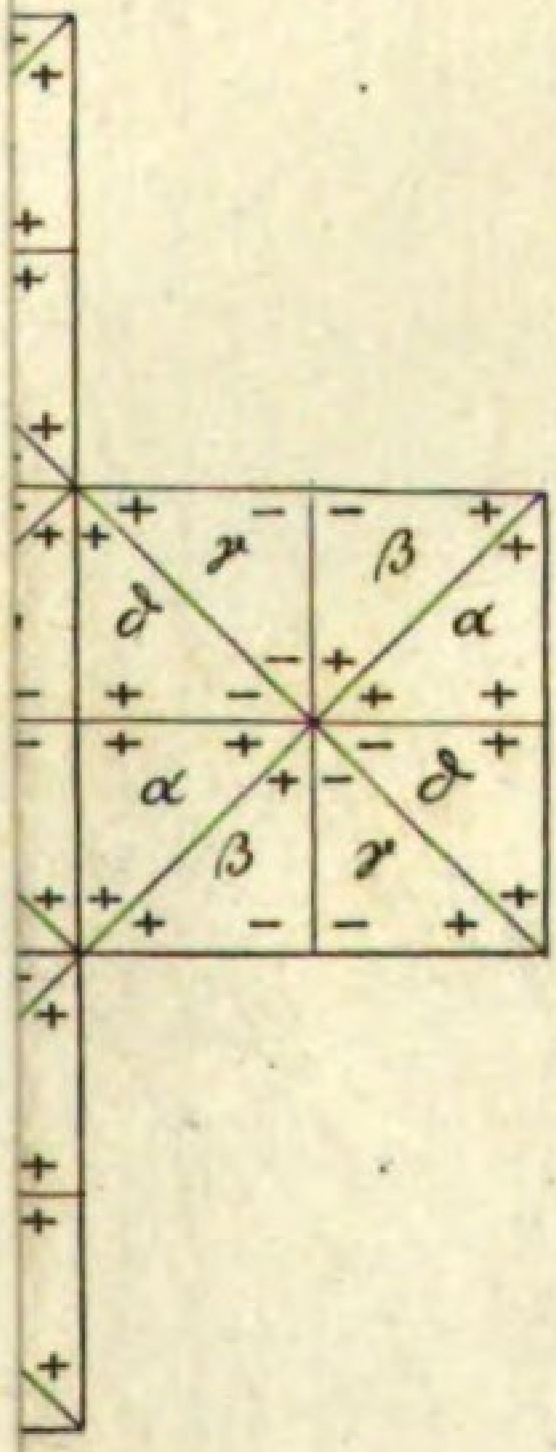


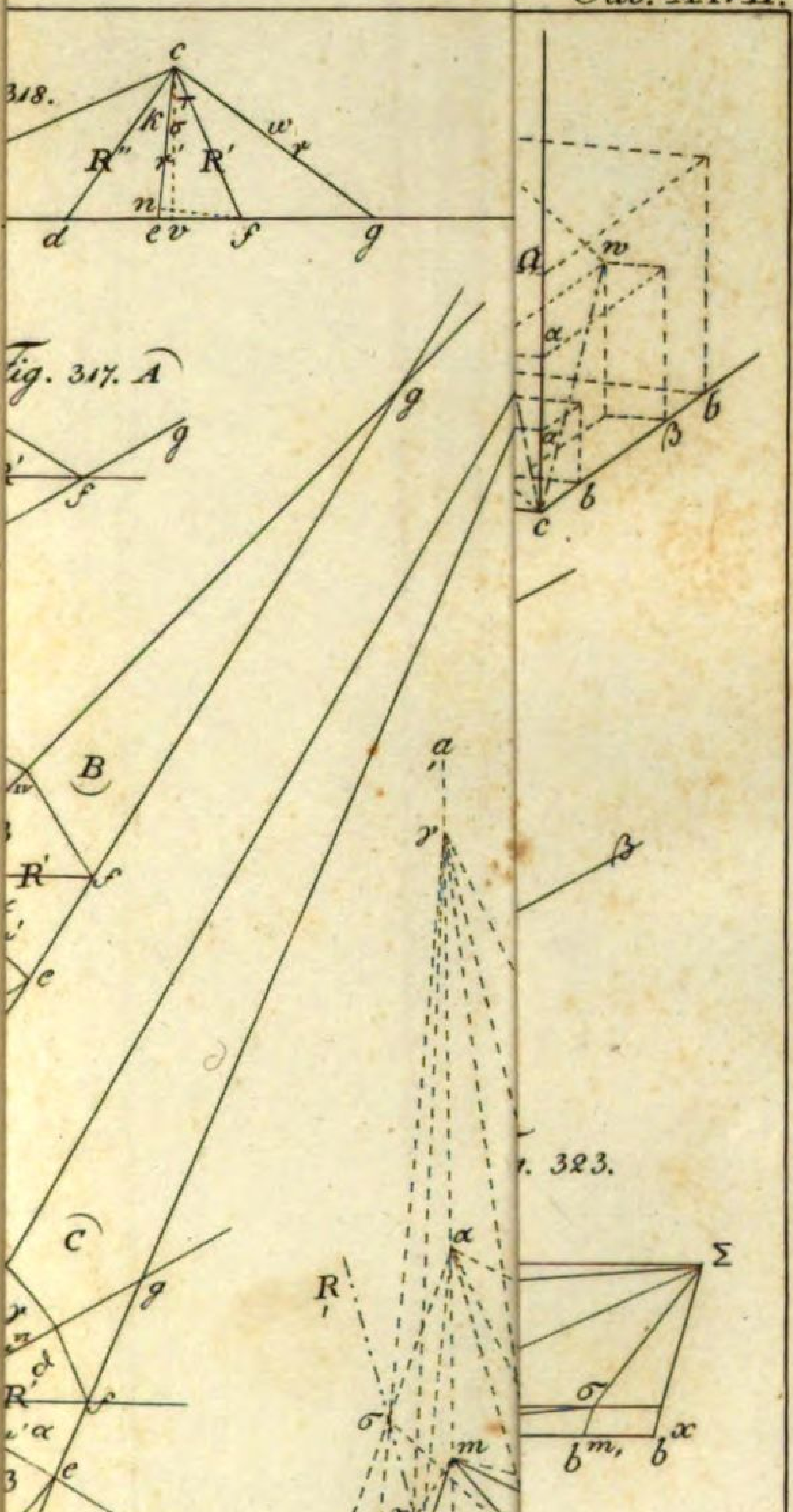
Fig. 314.





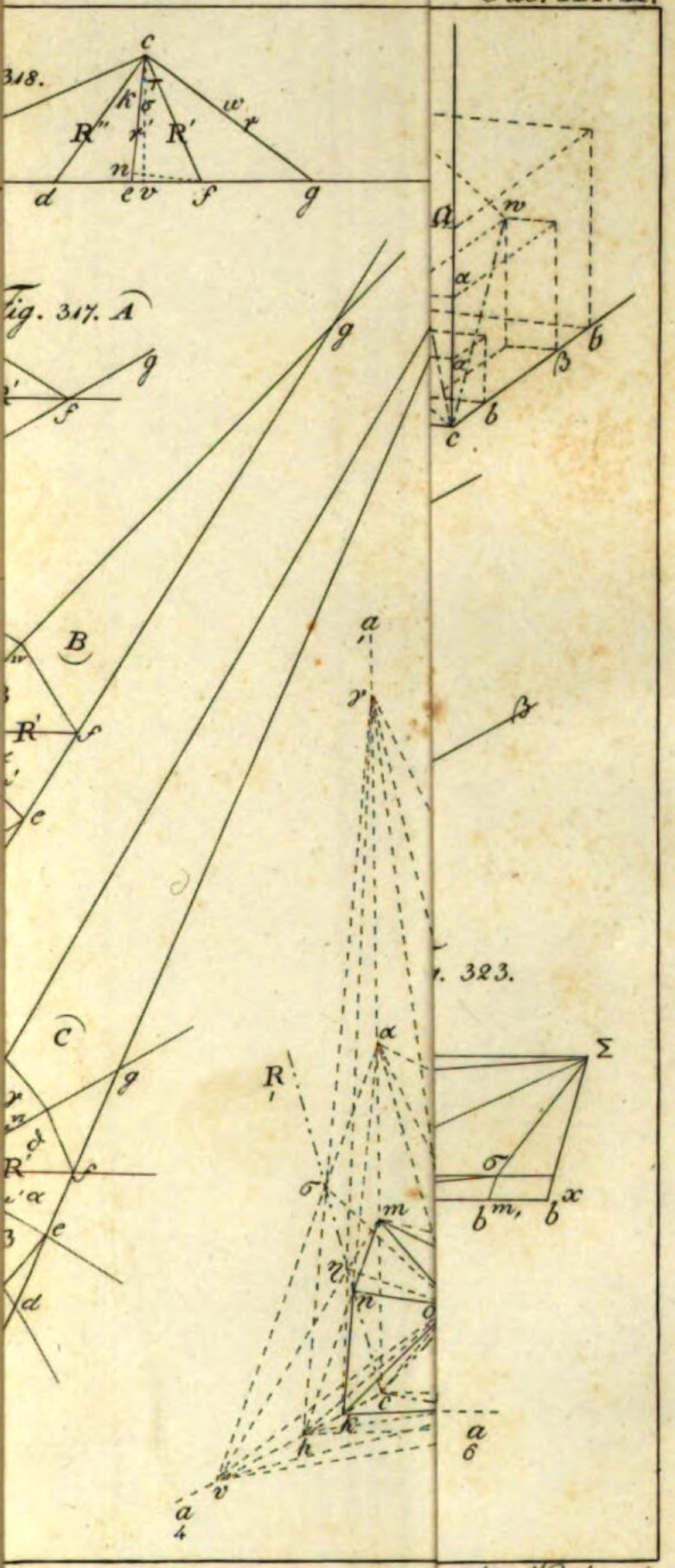
Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVIII.

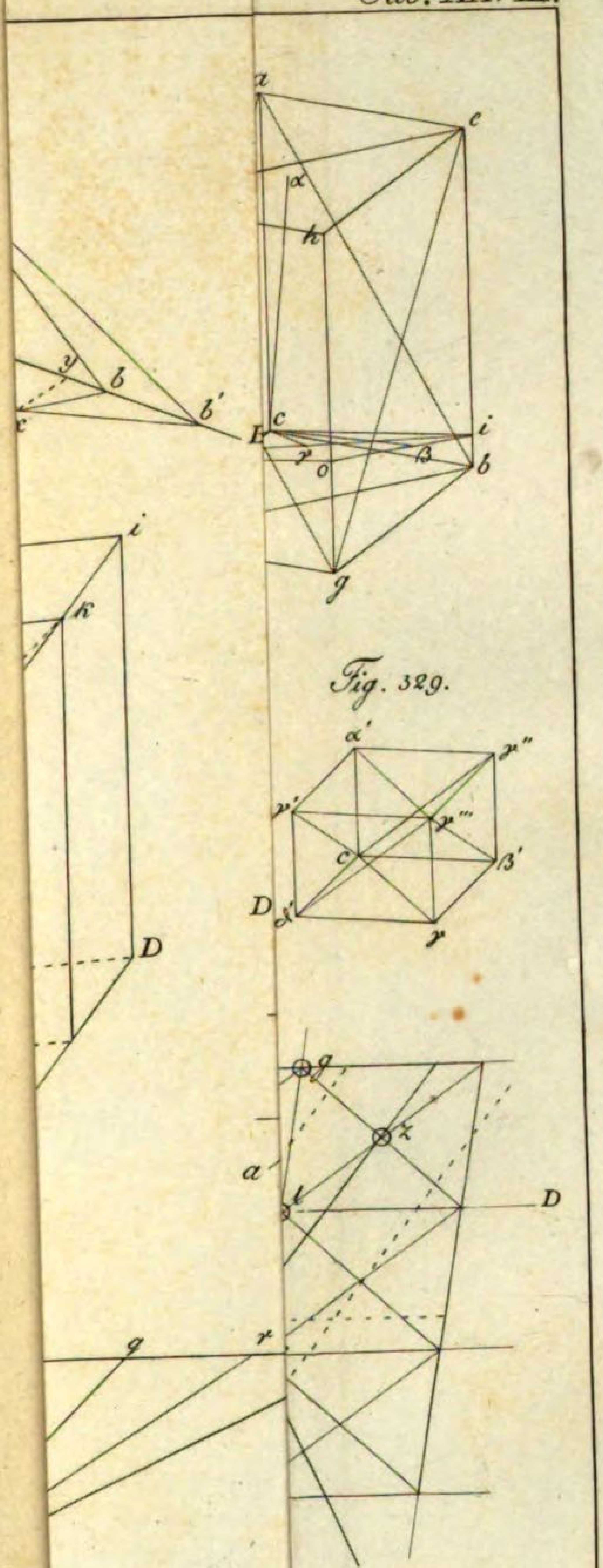
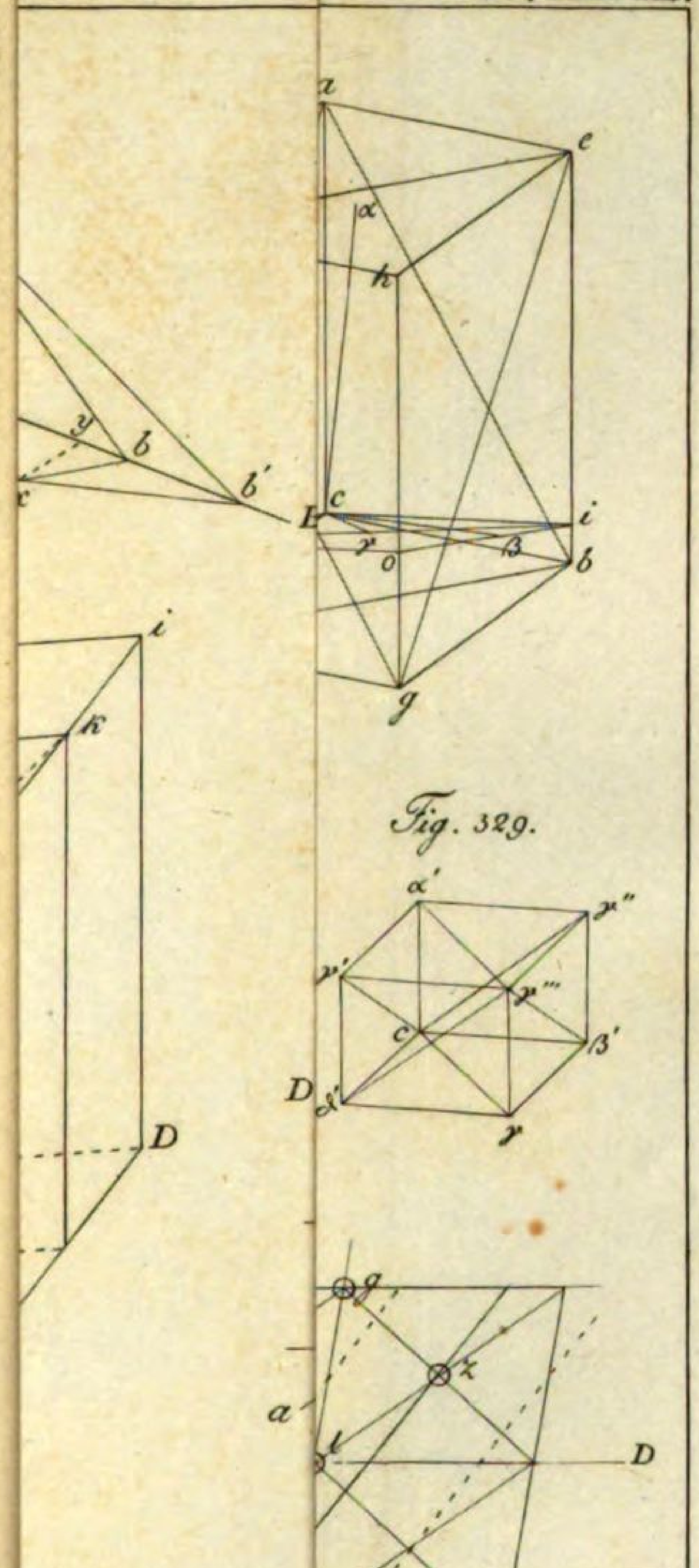


Fig. 329.

Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVIII.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXVIII.

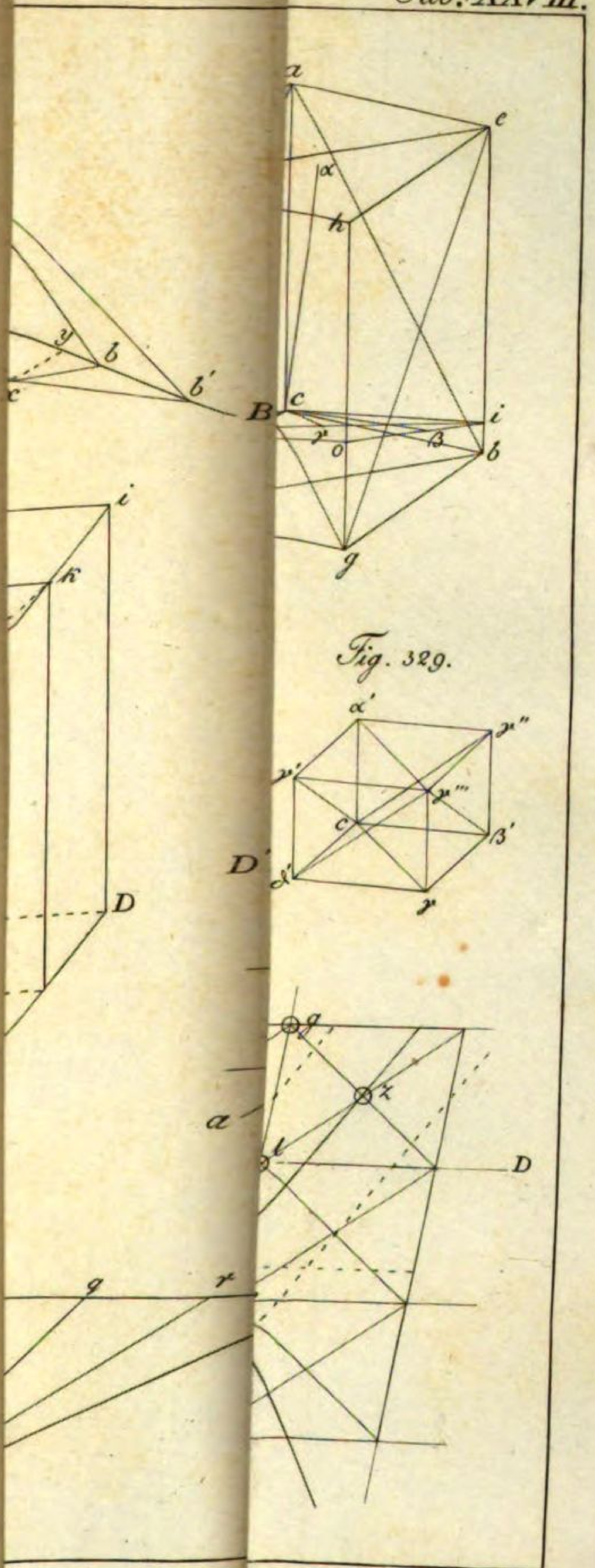


Fig. 329.

Ant. Karcher Sc.

Tab. XXIX.

35.

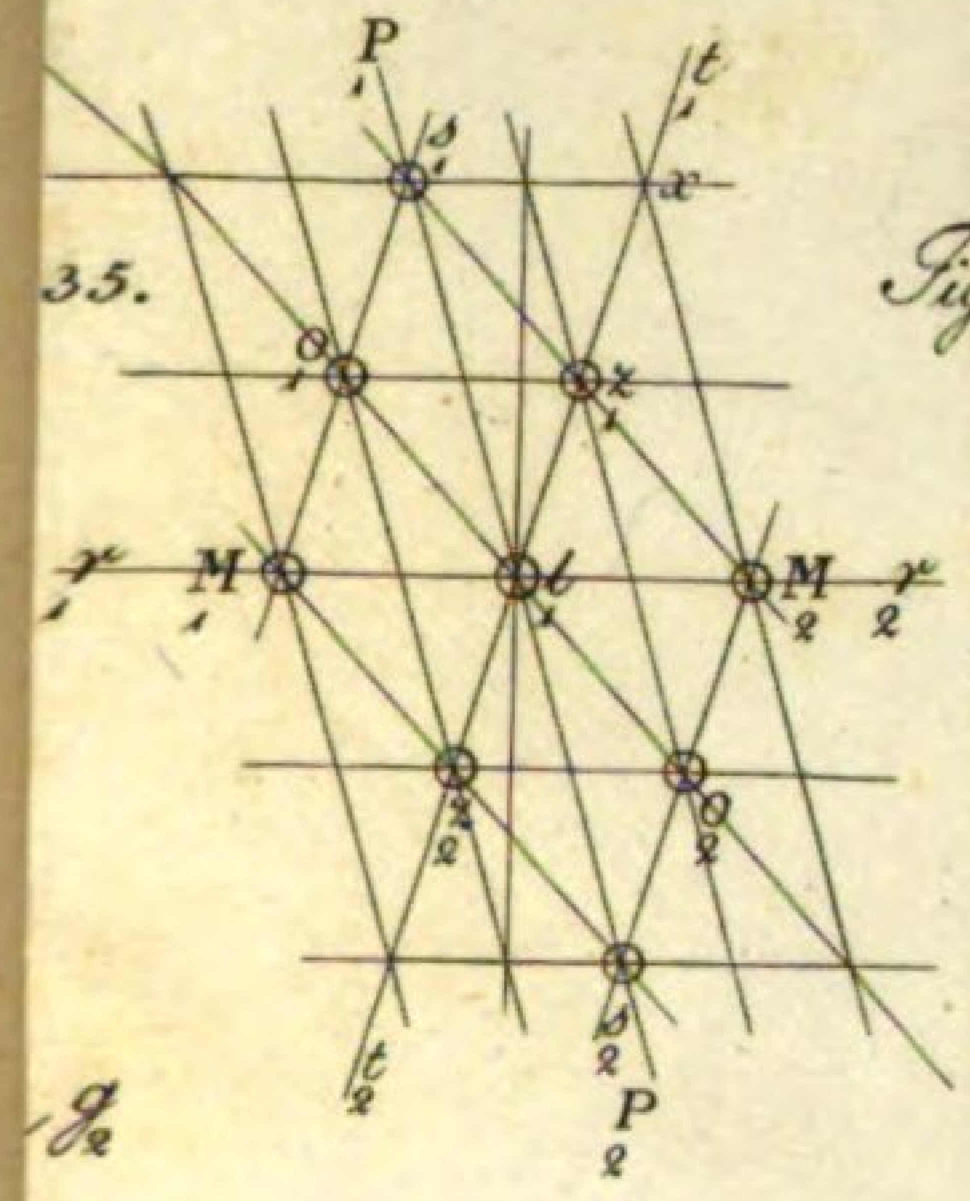
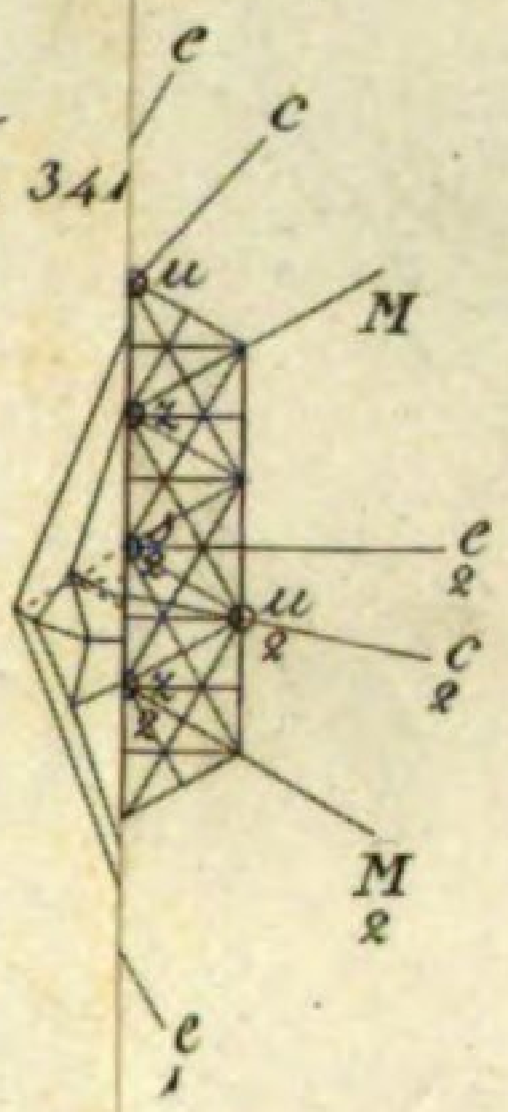


Fig. 341



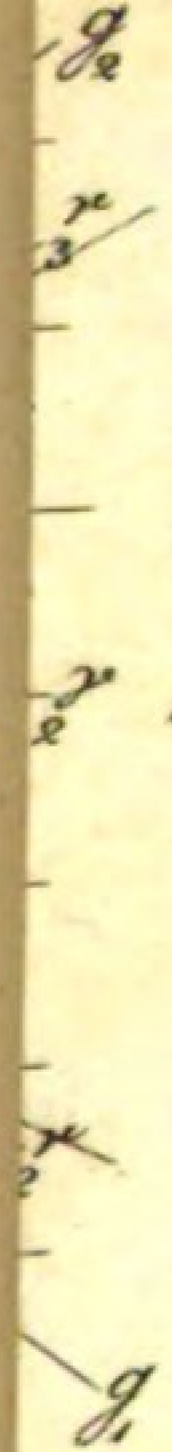
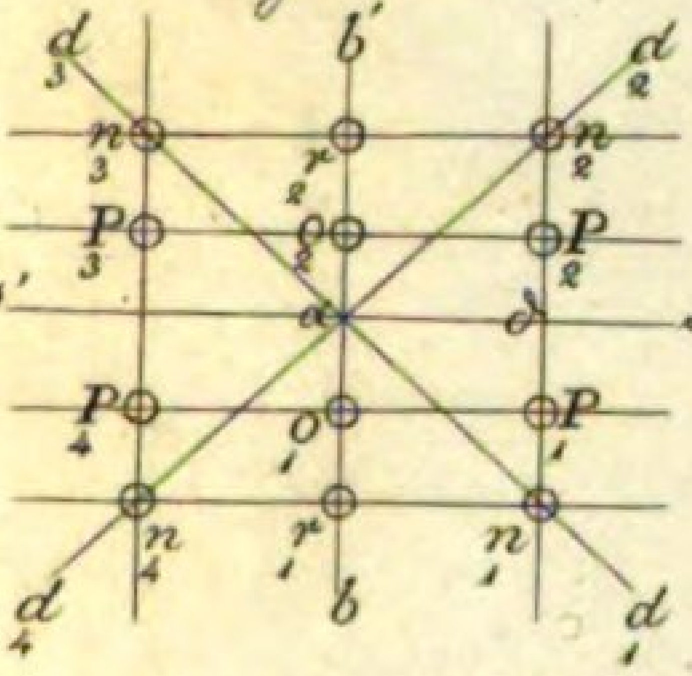


Fig. 336.



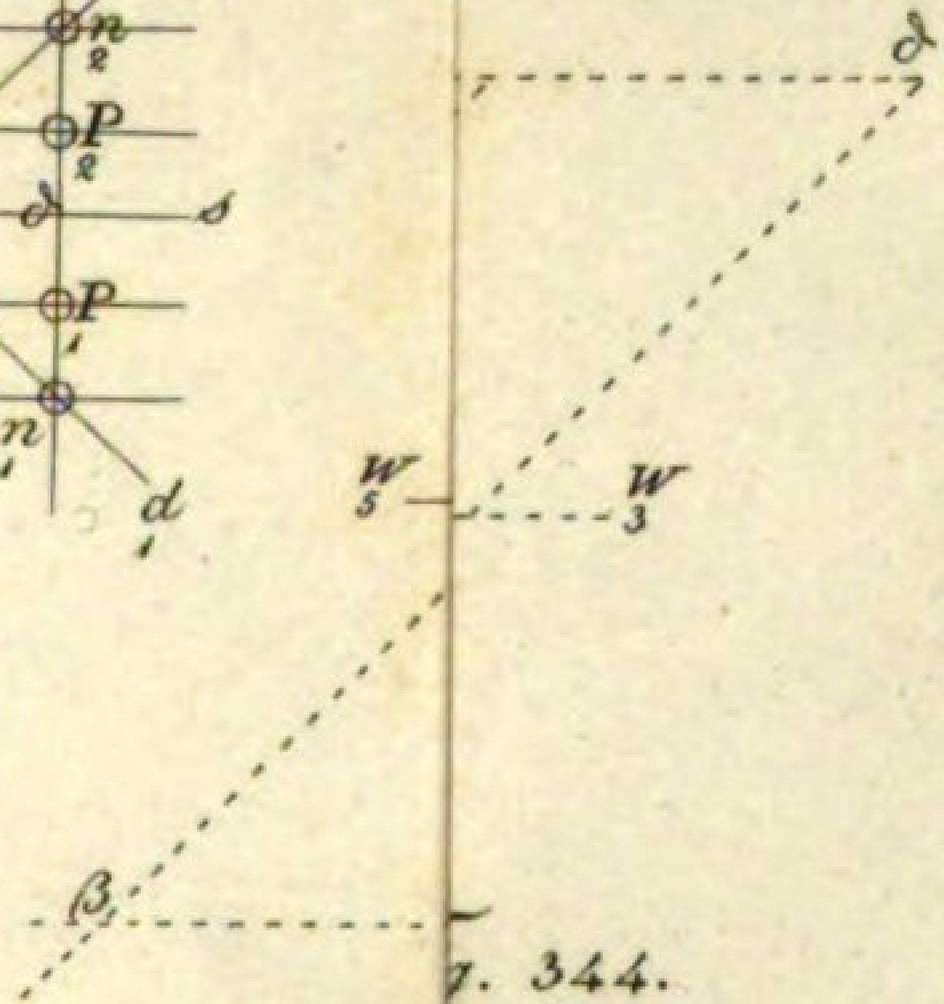
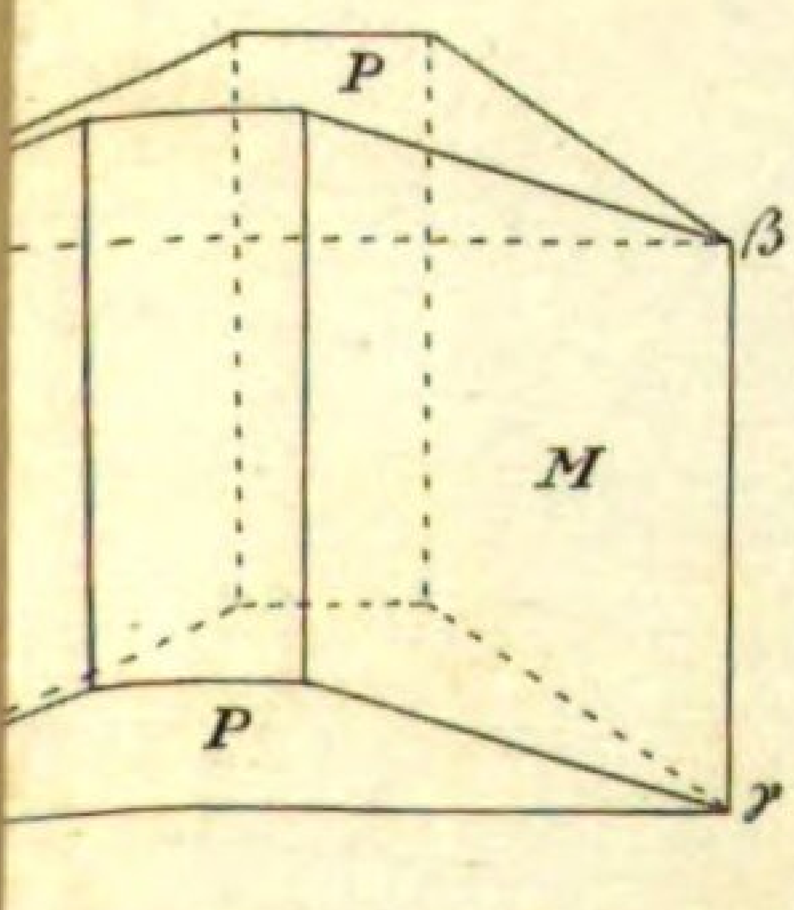
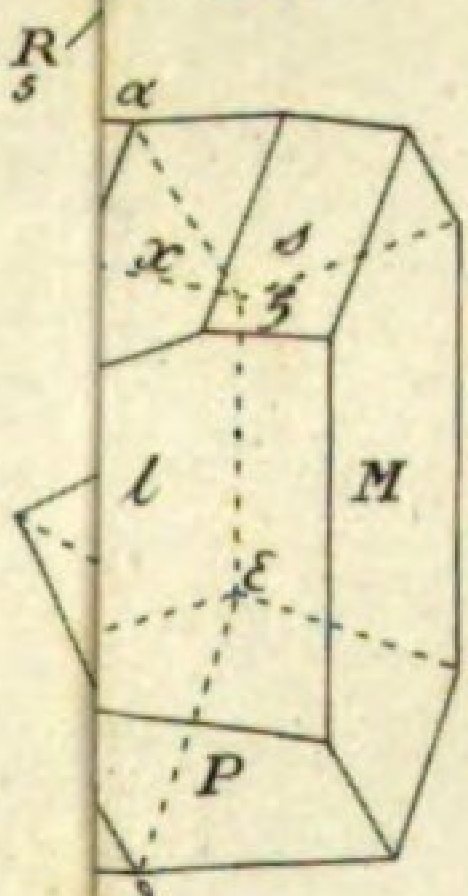


Fig. 343.



g. 344.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXIX.

[Fig. 3]35.

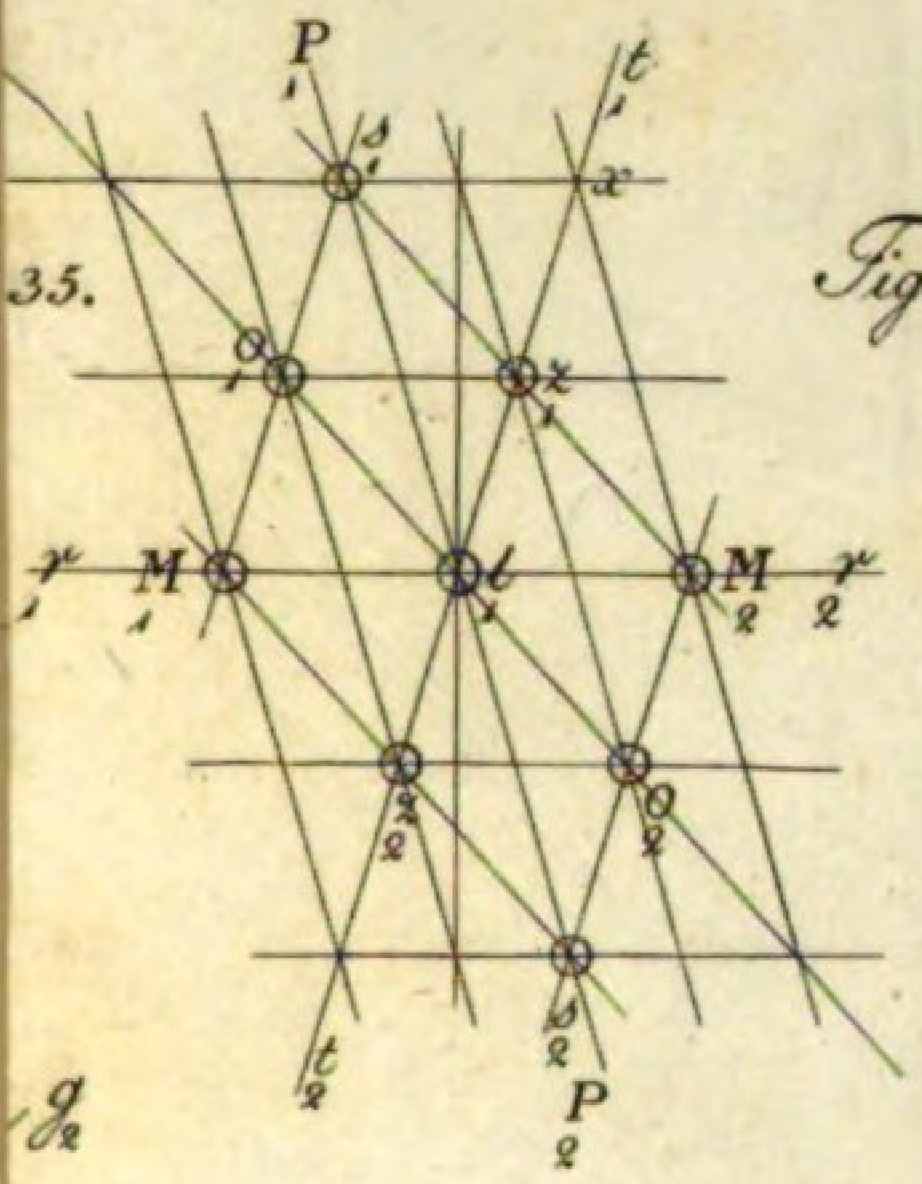


Fig. 341

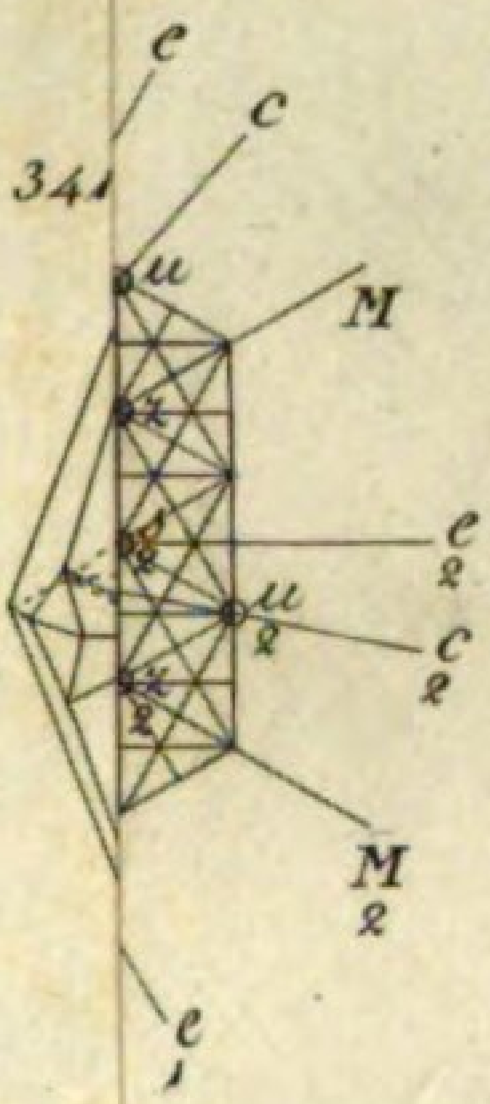
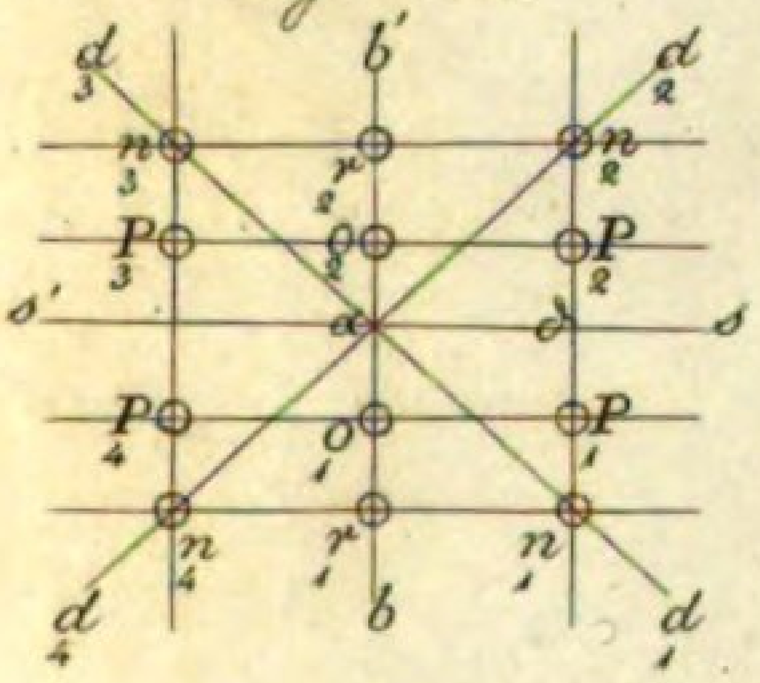




Fig. 336.



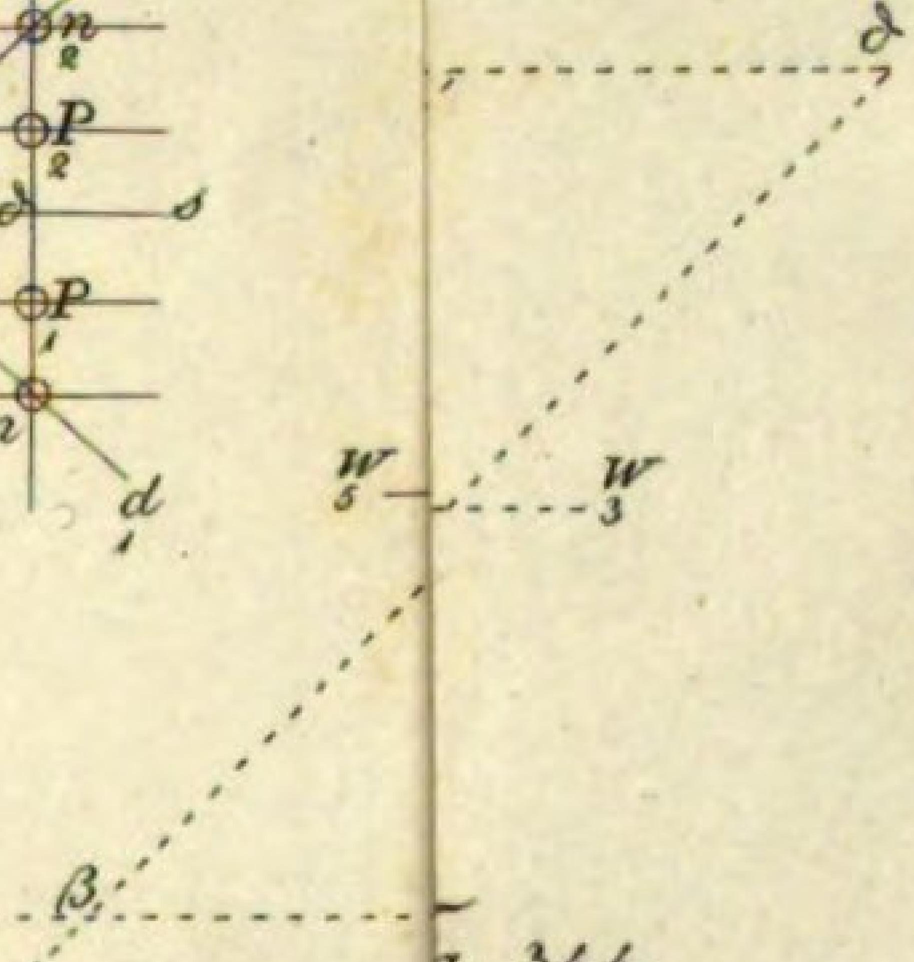
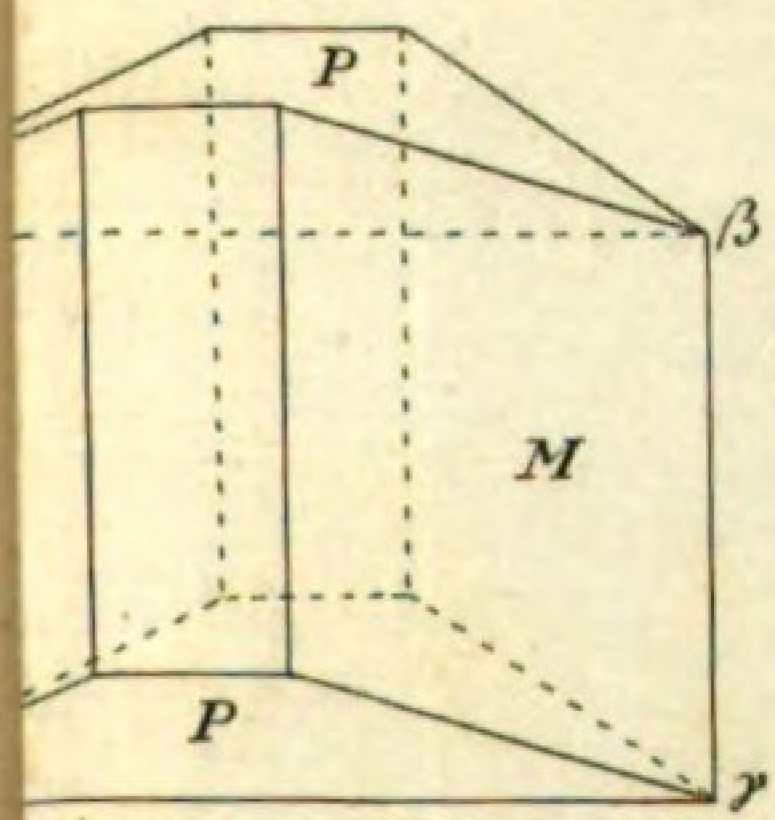
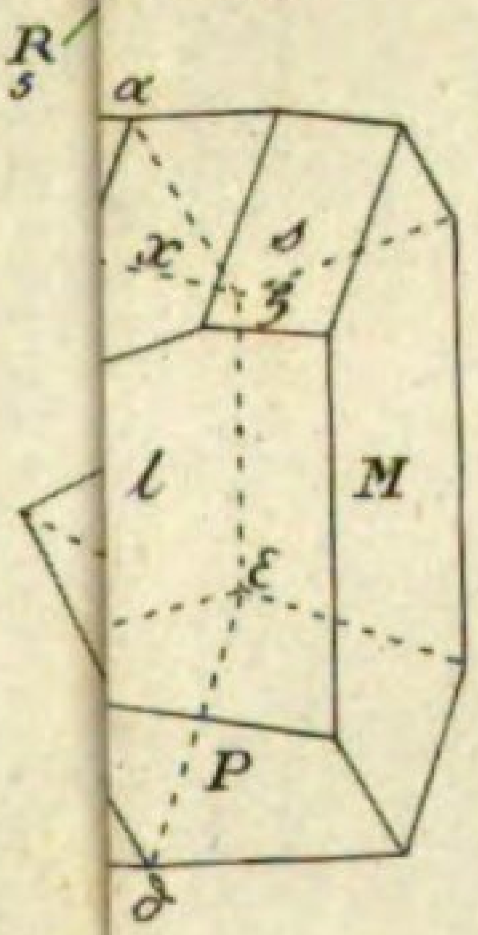


Fig. 343.

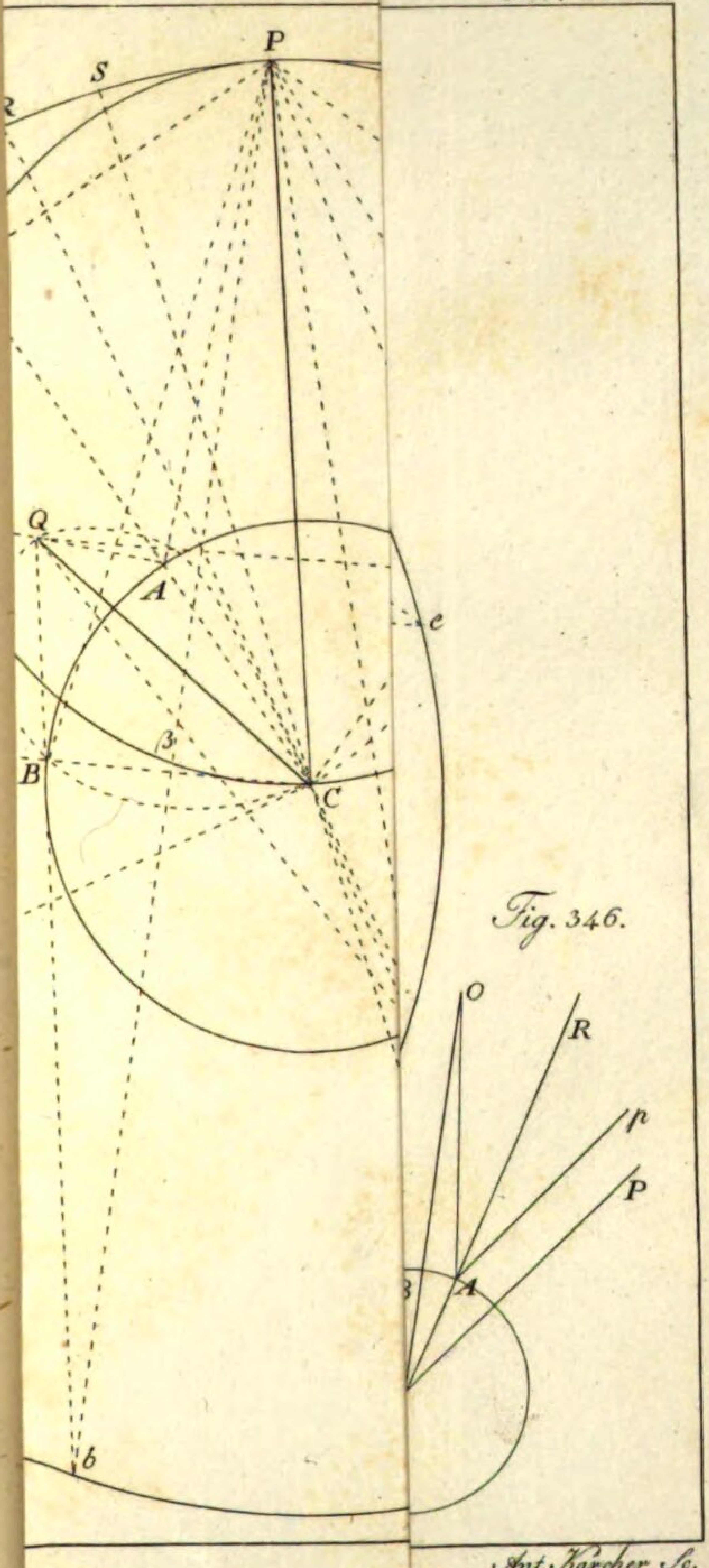


[Fi]g. 344.



Ant. Karcher Sc.

Tab. XXX.



Ant. Karcher Sc.

Bayerische Staatsbibliothek München

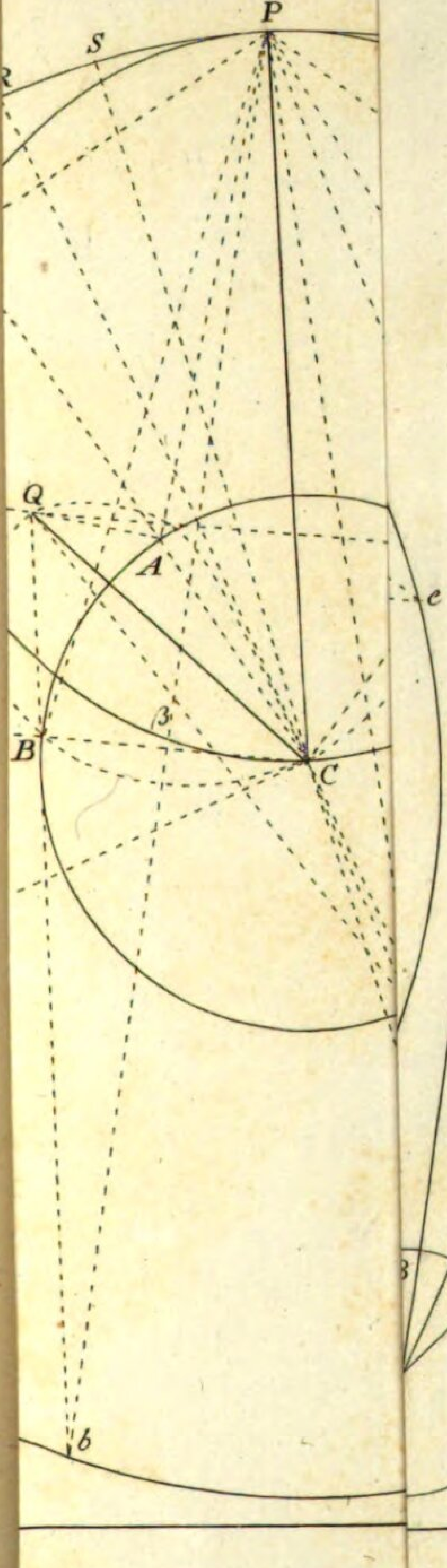
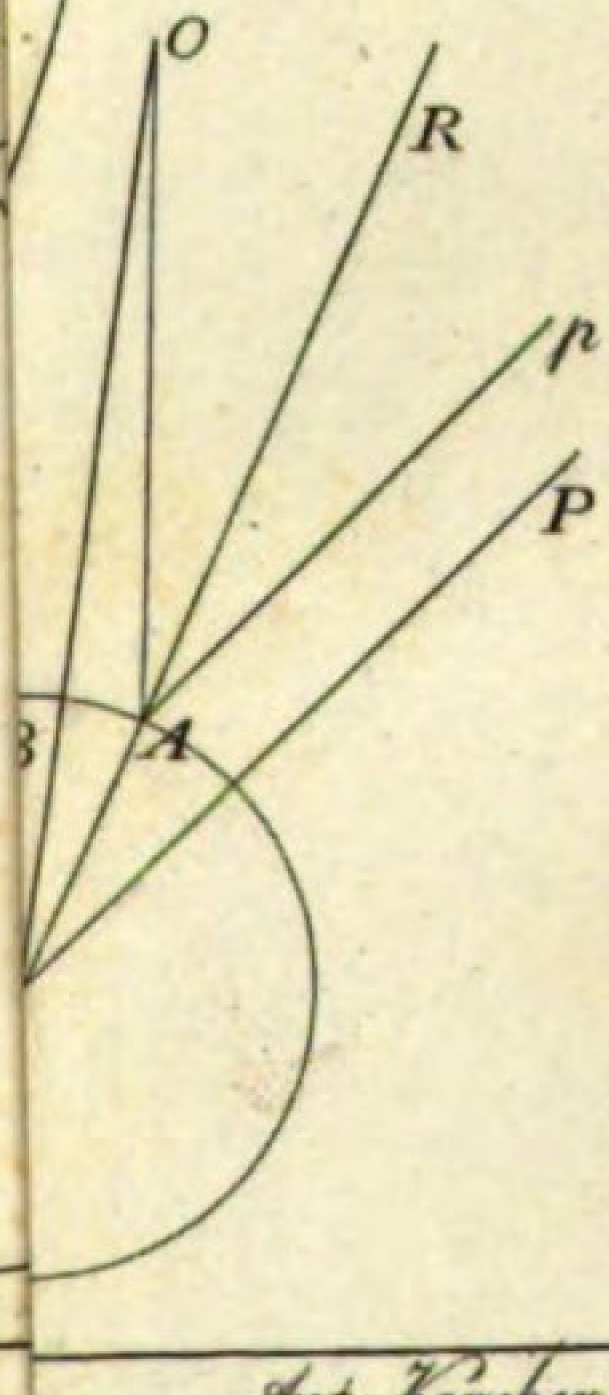


Fig. 346.



Ant. Karcher Sc.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

17. Q.

17. 2.

77

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gehler, Johann Samuel Traugott,

Johann Samuel Traugott Gehler's Physikalisches Wörterbuch

Bd.: 5,2

Leipzig 1830

XXXPhys.g. 134 b-5,2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10131088-8